Садовников Николай Владимирович
д.п.н., доцент, Филиал ВА МТО (г. Пенза), Пенза
Sadovnikov Nikolay Vladimirovich, Branch of the VA MTO (Penza)

Кабина Светлана Васильевна,
Филиал ВА МТО (г. Пенза), Пенза
Kabina Svetlana Vasilievna, Branch of VA MTO (Penza)

Мухамбетов Артур Русланович,
курсант 3 курса, Филиал ВА МТО (г. Пенза), Пенза
Mukhambetov Arthur, Branch of VA MTO (Penza)

ИЗУЧЕНИЕ СВОЙСТВ ЛОГИЧЕСКИХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ ВОЕННОГО ВУЗА
STUDYING THE PROPERTIES OF LOGICAL DETERMINANTS IN THE COURSE OF MATHEMATICAL LOGIC OF A MILITARY UNIVERSITY

Аннотация: В бесконечнозначной логике возможно выделение только максимального и минимального элемента рассматриваемого множества. Военно-инженерная практика требует более общие построения, позволяющие выделить произвольный порядковый элемент из этого множества с помощью *r*–операции. В статье нами сформированы и обоснованы основные свойства логических определителей, на которые опираются при вычислении ЛО на практике.

Abstract: In infinite-valued logic, it is possible to select only the maximum and minimum elements of the set under consideration. Military engineering practice requires more general constructions that allow selecting an arbitrary ordinal element from this set using the r-operation. In this article, we have formed and substantiated the basic properties of logical determinants that are relied upon when calculating LO in practice.

Ключевые слова: порядковая логика, бесконечнозначная логика, *r*-функция $f^{(r)}$, квазиматрица *q*-го порядка, порядковый логический определитель *r*-го ранга от квазиматрицы A_q, бесконечный и полубесконечный логический определитель.

Keywords: ordinal logic, infinite-valued logic, r-function, q-th order quasi-matrix, ordinal logical determinant of r-th rank from quasi-matrix, infinite and semi-infinite logical determinant.

Как известно, *r*-функция $\left(f^{(r)}\right)$ в порядковой логике позволяет выделять *r*-ый по рангу (по неубыванию) элемент конечного множества $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ из *n* элементов a_i, $a_i \in [A, B]$.

Рассмотрим некоторое множество из непересекающихся подмножеств:

$$A_q = Q_1 \vee Q_2 \vee \dots \vee Q_q,\ Q_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im_q}\},\ i = 1, \dots, q \qquad \textbf{(1)}$$

содержащее $n = \sum_{i=1}^{q} m_i$ числовых элементов $a_{ij} \in [A, B]$. Элементы каждого подмножества Q_i упорядочены:

$$a_{i1} \le a_{i2} \le \dots \le a_{im_i},\ i = 1, \dots, q \qquad \textbf{(2)}$$

Множество (1) в порядковой логике записывают в виде квазиматрицы *q*-го порядка:

$$A_q = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m_1} \\ a_{21} & \dots & a_{2m_2} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{q1} & \dots & a_{qm_q} \end{Vmatrix} = \left\| a_{ij} \right\|,\ a_{ij}, i = 1,\dots,q,\ j = 1,..,m_q, \qquad \textbf{(3)}$$

в которой различные строки представляют различные упорядоченные подмножества Q_i.

Расположим все элементы a_{ij} квазиматрицы (3) в порядке неубывания:

$$a^{(1)} \le a^{(2)} \le \dots \le a^{(n)},\ a^{(r)} \in A_q = \{a_{11},\dots,a_{qm_q}\}, \qquad \textbf{(4)}$$

где $a^{(r)}$ – r-ый порядковый элемент множества A_q.

Порядковым логическим определителем r-го ранга от квазиматрицы $A_q = \left\| a_{ij} \right\|$ называется r-функция $f^{(r)}(a_{ij})$ от множества $\{a_{ij}\}$ элементов квзаиматрицы.

Таким образом, порядковый логический определитель r-го ранга выделяет r-ый по величине (порядку) элемент исходной квазиматрицы A_q. Он служит некоторой числовой характеристикой квазиматрицы.

Обозначается логический определитель r-го ранга от квазиматрицы A_q так:

$$A_q^r = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{q1} & \dots & a_{qm_q} \end{vmatrix}^{(r)} = \left| a_{ij} \right|^{(r)},\ r = 1,\dots,n \qquad \textbf{(5)}$$

Рассмотрим основные свойства логических определителей. Эти свойства по своей математической (содержательной) сути есть не что иное, как леммы, т.е. теоремы, носящие вспомогательный характер и используемые при доказательстве других, более важных (всеобщих) теорем.

Свойство 1. Величина логического определителя является монотонно неубывающей функцией ранга, т.е. $A_q^r \ge A_q^p$, если $r \ge p$.

Свойство 2. Перестановка местами любых двух строк логического определителя A_q^r не меняет его величины.

Эти свойства следуют из логического определителя A_q^r.

Свойство 3. Общее для всех элементов слагаемое можно вынести за знак логического определителя, не изменив при этом его величины:

$$\left| a_{ij} + c \right|^{(r)} = \left| a_{ij} \right|^{(r)} + c, \qquad \textbf{(6)}$$

Доказательство вытекает из того, что прибавление общего слагаемого ко всем элементам a_{ij} не изменяет взаимной упорядоченности элементов согласно условию (4).

Свойство 4. Общий для всех элементов a_{ij} дизъюнктивной член можно вынести за знак логического определителя, при этом логический определитель не изменится.

$$\left|a_{ij} \vee c\right|^{(r)} = \left|a_{ij}\right|^{(r)} \vee c \tag{7}$$

Свойство 5. Общий для всех элементов a_{ij} конъюнктивный член можно вынести за знак логического определителя, не изменив его величины.

$$\left|a_{ij} \wedge c\right|^{(r)} = \left|a_{ij}\right|^{(r)} \wedge c \tag{8}$$

Доказательства свойств (4) и (5) следует из того, что введение общего для всех элементов дизъюнктивного (конъюнктивного) члена *c* не изменяет взаимной упорядоченности элементов, а лишь приводит к замене на *c* тех из них, которые первоначально были меньше (больше) *c*.

Свойство 6. Общий для всех элементов a_{ij} сомножитель *c* можно вынести за знак логического определителя с сохранением первоначального ранга *r*, если *c>0*, и замены его на дополнительный *r-r+1*, если *c<0*; в результате величина логического определителя не изменится.

$$\left|a_{ij} \cdot c\right|^{(r)} = \begin{cases} c\left|a_{ij}\right|^{(r)}, c > 0 \\ c\left|a_{ij}\right|^{(n-r+1)}, c < 0. \end{cases} \tag{9}$$

Действительно, при *c>0* упорядоченность множества величин $a_i \cdot c$ и $a_{ij}(i > 1,\ldots,q;\ j = 1,\ldots,m_e)$ - одинаковая, а при *c<0* – противоположная (т.е. при умножении на *c<0* максимальное из a_{ij} входит в минимальное из $a_{ij} \cdot c$, предмаксимальное из a_{ij} - в послеминимальное из $a_{ij} \cdot c$ и т.д.)

Свойство 7. Величина логического определителя не меняется при добавлении к нему справа столбца из равных по величине элементов

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m_1} & c \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{q1} & \ldots & a_{qm_q} & c \end{vmatrix}^{(r)} = \begin{cases} \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{q1} & \ldots & a_{qm_q} \end{vmatrix}, r = 1,\ldots,n; \\ c, r = n+1,\ldots,n+q \end{cases} \tag{10}$$

Здесь элементы *c* в силу (4) должны удовлетворять условию $c > a_{im_i}, i = 1,\ldots,q$.

Свойство 8. При добавлении к логическому определителю слева столбца из равных по величине элементов величина логического определителя остается неизменной, если ранг уменьшить на число его строк.

$$\begin{vmatrix} c & a_{11} & \ldots & a_{1m_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c & a_{q1} & \ldots & a_{qm_q} \end{vmatrix}^{(r)} = \begin{cases} c, r = 1,\ldots,q \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{q1} & \ldots & a_{qm_q} \end{vmatrix}^{(r-q)} & , r = q+1,\ldots,q+n \end{cases} \tag{11}$$

Здесь элементы *c* в силу (4) должны удовлетворять условию $c > a_{i1}, i = 1,\dots,q$.

Свойство 9. Величина логического определителя не меняется при исключении из него элемента ∞, расположенного в конце какой-либо строки.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m_1} & \infty \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q1} & \dots & a_{qm_q} & \infty \end{vmatrix}^{(r)} = \begin{cases} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{q1} & \dots & a_{qm_q} \end{vmatrix}, r = 1,\dots,n; \\ \infty, r = n+1 \end{cases}$$

(12)

Свойство 10. Величина логического определителя не изменится, если из него исключить элемент $-\infty$, стоящий в начале какой-либо строки, а ранг уменьшить на 1.

$$\begin{vmatrix} -\infty & a_{11} & \dots & a_{1m_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\infty & a_{q1} & \dots & a_{qm_q} \end{vmatrix}^{(r)} = \begin{cases} -\infty, r = 1 \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{q1} & \dots & a_{qm_q} \end{vmatrix}^{(r-1)} , r = 2,\dots,n+1 \end{cases}$$

(13)

Доказательство свойств 7-10 вытекает непосредственно из определения логического определителя.

Формулы (10) – (13) можно применять повторно, если в логического определителя имеется несколько столбцов или элементов указанных типов.

Свойство 11. Величина логического определителя не изменится, если произвольную совокупность строк $i_1,\dots,i_k$ заменить строкой расположенных в порядке возрастания ранга *p*-блочного логического определителя $\begin{vmatrix} i_1 \\ \dots \\ i_k \end{vmatrix}^{(p)}$, составленных из указанных строк.

$$A_q^r = \begin{vmatrix} A_{q \backslash i_1 \dots i_k} \\ A^1_{i_1 \dots i_k} \cdot A^2_{i_1 \dots i_k} \dots A^{\sum_{s=1}^{k} m_{is}}_{i_{1 \dots k}} \end{vmatrix}$$

(14)

Здесь $A_{q \backslash i_1 \dots i_k}$ - квазиматрица, полученная из исходной квазиматрицы A_q исключением строк $i_1,\dots,i_k$; $A^p_{i_1 \dots i_k} = \begin{vmatrix} i_1 \\ \dots \\ i_k \end{vmatrix}^{(p)}$ - логический определитель *r*-го ранга *k*-го порядка, составленный из строк $i_1,\dots,i_k$ квазиматрицы A_q

Доказательство: действительно, указанная замена означает лишь совместное упорядочение элементов строк $i_1,\dots,i_k$ и поэтому не может влиять на величину любого порядкового элемента $a^{(r)}$ множества A_q , а, следовательно, и на величину логического определителя A_q^r . Формулу (14) можно рассматривать как правило разложения, позволяющее путем последовательного понижения порядка привести любой логического определителя к логическому определителю второго порядка.

Свойство 12. Любой логический определитель *q*-го порядка с двумя одинаковыми строками можно представить в виде логического определителя (*q*-1)-го порядка, не имеющего одинаковых строк.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q-1,1} & \cdots & a_{q-1,m_{q-1}} \\ a_{q-1,1} & \cdots & a_{q-1,m_{q-1}} \end{vmatrix}^{(r)} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q-1,1} & \cdots & a_{q-1,m_{q-1}} \end{vmatrix}^{(r)} \tag{15}$$

Доказательство немедленно следует из свойства 11, если принять *k*=2, $i_1 = q-1, i_2 = q$ и учесть, что $A_{q-1,q}^1 = A_{q-1,q}^2 = a_{q-1,1}; A_{q-1,q}^3 = A_{q-1,q}^4 = a_{q-1,2,...}$

Свойство 13. Любой конечный логический определитель можно представить, как некоторый бесконечный или полубесконечный логический определитель того же порядка и ранга.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qm_q} \end{vmatrix}^{(r)} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m_1} & \infty & \infty & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qm_q} & \infty & \infty & \cdots \end{vmatrix}^{(r)},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qm_q} \end{vmatrix}^{(r)} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m_1} & \infty & \infty \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{lm_l} & \infty & \infty \\ a_{l+1,1} & \cdots & a_{l+1,m_{l+1}} & \infty & \infty \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qm_q} & \infty & \infty \end{vmatrix}^{(r)} \tag{16}$$

Доказательство этих соотношений получается повторным применением формулы (12). Заметим, что ∞ в (16) можно заменить любыми конечными элементами $a_{i_k}, k > m_i$, такими, чтобы сохранилась упорядоченность (4) элементов каждой строки и выполнялись неравенства $a_{i_k} \geq \bigvee_{i=1}^{q} a_{im_i}, i = 1,...,q.$

Свойство 14. Величина ЛО *r*-го ранга не изменится, если в любой его *i*-ой строке исключить элементы $a_{i,r+1}, a_{i,r+2}, \ldots$, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{q1} & \dots & a_{qm_q} \end{vmatrix}^{(r)} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{q1} & \dots & a_{qr_q} \end{vmatrix}^{(r)}, \tag{17}$$

где m_i - конечные величины или бесконечности, а $r_i = \min(r, m_i)$.

Доказательство: действительно, *r*-ым порядковым элементом $a^{(r)}$ любой квазиматрицы A_q может быть только один из *r* первых элементов какой-либо ее строки.

Свойство 15. Пусть $A_q^r = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{q1} & \dots & a_{qm_q} \end{vmatrix}^{(r)}$ - некоторый конечный ЛО, а

$B_q^r = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_{1m_1}} & \dots & \frac{1}{a_{11}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{a_{qm_q}} & \dots & \frac{1}{a_{qm_1}} \end{vmatrix}$ - конечный ЛО, полученный из A_q^r инверсией всех строк и переходом к обратным величинам элементов.

Тогда ЛО $B_q^r = \frac{1}{A_q^{n-r+1}}$ для всех *r*=1,…,*n*.

Доказательство следует из того, что упорядоченность множеств величин a_{ij} и $\frac{1}{a_{ij}} (i = 1,\dots, q,\ j = 1,\dots, m_i)$ - противоположная (максимальному a_{ij} соответствует минимальное $\frac{1}{a_{ij}}$ и т.д.).

Свойство 16 (распределительный закон).

$$\begin{vmatrix} A_q^{p_{11}} & A^{p_{12}} & \dots & A_q^{p_{1m}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_q^{p_{s1}} & A_q^{p_{s2}} & \dots & A_q^{p_{sm_s}} \end{vmatrix} = A_q^{P_s^r} \quad \text{,где} \quad P_s^r = \begin{vmatrix} p_{11} & \dots & p_{1m_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{s1} & \dots & p_{sm_s} \end{vmatrix}^{(r)} \tag{18}$$

и $p_{i1} < p_{i2} < \dots < p_{im_i}$ **, r=1,…,n,** $n = \sum_{i=1}^{s} m_i$.

Доказательство следует из свойства 1, по которому упорядочение множества ЛО A_q^r различных рангов r от одной и той же квазиматрицы A_q можно заменить упорядочением множества рангов.

Список литературы:

1. Садовников Н.В. Логико-математические методы в экономике. Монография-Пенза: Пенз. технологический институт, 2003. – 147с.
2. Садовников Н.В. Теоретико-методологические основы методической подготовки учителя математики в педвузе в условиях фундаментации образования: Дисс. д-ра пед. наук. Саранск, 2007. – 360с.
3. Садовников Н.В., Зубков А.Ф. Экономико-математическое моделирование. Логические методы исследования экономических систем в условиях неопределенности: Учебное пособие с грифом УМО. Пенза: Пенз. Технологический институт. 2003. – 148с.
4. Садовников Н.В., Зубкова Ю.А., Султанова Г.А. Минимальное разложение общего определителя по элементам // Управление социально-экономическим развитием предприятий, отраслей, регионов: проблемы и перспективы: сб. науч. тр. XIV Междунар. науч.-практ. конф. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2024. – с. 368-372.
5. Садовников Н.В. Фундаментализация современного вузовского образования. Педагогика. – 2005. – №7. – с. 49-54.
6. Садовников Н.В. Фундаментализация как стратегическое направление модернизации содержания вузовского образования. Alta mater: Вестник высшей школы. – 2005. – №4. с. 29-31.
7. Садовников Н.В., Шипанова Е.В., Султанова Г.А. Взаимосвязь фундаментальности и военно-профессиональной направленности изучения элементов математической логики в военном вузе. Педагогика и психология как науки формирования потенциала современного общества: Монография. – Чебоксары, 2021. – с. 55-78, 160-161.
8. Садовников Н.В., Шипанова Е.В., Султанова Г.А. Реализация фундаментальной направленности нормальных форм булевых функций при обучении математики курсантов военного вуза. Педагогика и психология как науки формирования потенциала современного общества: Монография. – Чебоксары, 2021. – с. 79-102, 162-163.