DOI 10.58351/2949-2041.2024.15.10.014

**Машунин Юрий Константинович,** Профессор,
Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия
Mashunin Yuri Konstantinovich, Professor,
Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia

# ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ МНОГОМЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ В МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОМЫШЛЕННЫХ ПРОЦЕССОВ: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА
# THEORY AND METHODS OF MULTIDIMENSIONAL MATHEMATICS IN INDUSTRIAL PROCESS MODELLING: MATHEMATICAL APPARATUS OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE

**Аннотация.** Цель работы представить теорию и методы многомерной математики, включающей аксиоматику, принципы оптимальности и методы для решения векторных задач оптимизации в моделировании промышленных процессов. Теория и методы векторной оптимизации могут являться математическим аппаратом вычислительного интеллекта в рамках искусственного интеллекта. В рамках теория векторной оптимизации представлены принципы оптимальности решения векторных задач при равнозначных критериях и при заданном приоритете критерия https://rdcu.be/bhZ8i. (Работа "Vector optimization with equivalent and priority criteria" Springer Nature распространяется бесплатно.). На основе теории разработаны конструктивные методы решения задач векторной оптимизации, которые позволяют принимать решение, во-первых, при равнозначных критериях, во-вторых, при заданном приоритете критерия.

Практическая направленность работы связана с автоматизированным проектирование инженерных и производственных систем на базе векторной оптимизации.

Сформированные конструктивные методы решения векторных задач математического (выпуклого) программирования представлены при проектировании производственных и инженерных систем. Реализация методологии представлена на решении численных задач: принятия решений выбора оптимальной структуры материала и выбора параметров технической системы с шестью характеристиками (исследуется многомерность: шесть функций). Решение проблемы принятия решений включает: построение численной модели объекта в виде векторной задачи; решение задачи принятия решений при равнозначных критериях, решение векторной задачи принятия решений с приоритетом критерия.

**Abstract.** The purpose of the work is to present the theory and methods of multidimensional mathematics, including axiomatics, principles of optimality and methods for solving vector optimization problems in modeling industrial processes. The theory and methods of vector optimization can be the mathematical apparatus of computational intelligence within the framework of artificial intelligence.

Within the framework of the theory of vector optimization, the principles of optimality of solving vector problems with equivalent criteria and with a given priority of the criterion are presented https://rdcu.be/bhZ8i. (The work "Vector optimization with equivalent and priority criteria» by Springer Nature is distributed free of charge.). On the basis of the theory, constructive methods for solving vector optimization problems have been developed, which make it possible to make a decision, first, with equivalent criteria, and second, with a given priority of the criterion.

The formed constructive methods for solving vector problems of mathematical (convex) programming are presented in the design of production and engineering systems. The implementation of the methodology is presented on the solution of numerical problems: decision-making on the choice of the optimal structure of the material and the selection of parameters of a technical system with six characteristics (multidimensionality: six functions is investigated). The solution to the problem of decision-making includes: the construction of a numerical model of the object in the form of a vector problem; solution of the decision-making problem with equivalent criteria, solution of the vector decision-making problem with the priority of the criterion.

**Ключевые слова:** Многомерная математика, Векторная оптимизация, Методы решения векторных задач; Теория принятия решений; Моделирование производственной системы; Моделирование технической системы.

**Keywords**: Multidimensional Mathematics, Vector Optimization, Methods for Solving Vector Problems; Theory of decision-making; Modeling of the production system; Modeling of the technical system.

1. Itoduction

Основной тенденцией развития методов управления общества (экономическими, техническими системами) является использование искусственного интеллекта. Искусственный интеллект (ИИ) представляет новое научное направление, которая исследует и разрабатывает теорию, методы и прикладные системы, используемые для моделирования и расширения человеческого интеллекта. Исследования в этой области включают в себя вычислительный интеллект, распознавание языков, изображений, обработку естественного языка и экспертные системы. Развитие современных систем искусственного интеллекта идет по пути интеграции вычислительного интеллекта и информационных систем.

При исследовании развития производственных и инженерных систем выясняется, что они (системы) зависят от некоторого числового множества функциональных характеристик, которые в совокупности определяют многомерность исследуемой системы. Эту многомерность необходимо учитывать на стадии проектирования и моделирования. Анализ и исследование множества инженерных, экономических систем показало, что улучшение по одной из характеристик системы приводит к ухудшению других характеристик.

А для улучшения функционирования системы:

во-первых, требуется решение проблемы, при которой в исследуемой системе одно подмножество характеристик (критериев) было направлено на увеличение числового значения (максимизацию), а второе подмножество характеристик (критериев) системы было направлено на уменьшение числового значения (минимизацию);

во-вторых, необходимо, чтобы все характеристики улучшались в совокупности.

В настоящее время известно решение однокритериальной оптимизации, которую можно трактовать как одномерную оптимизацию.

Исследования многокритериальных задач началось более ста лет тому назад в работе Pareto V [1]. В последние три десятилетие методам решения векторных (многокритериальных) задач посвящено большое количество монографий и отдельных статей. Это связано с широким использованием этих методов в решении практических задач. Анализ методов и алгоритмов решения многокритериальных задач в соответствии со своей классификацией представлен в ряде работ [6, 10, 22, 39, 45]: методы решения многокритериальных задач, основанные на свертывании критериев с весовыми коэффициентами [3, 5, 25, 27]. Исследование многокритериальной оптимизации проводилось как на теоретическом уровне зарубежными [3, 25-30] и русскими авторами [4-23], так и на решении практических задач сначала в области экономики [31-45], а за тем в области инженерных систем [6-21].

Множество критериев в многокритериальной задаче оптимизации можно представить в виде вектора, с которым можно проводить математические операции, отсюда появились векторные задачи оптимизации или векторные задачи математического программирования.

Решение проблемы векторной оптимизации обусловлено рядом трудностей, причем концептуального характера, и главная из них понять: «что значит решить задачу векторной оптимизации». Для решения проблемы с множеством критериев математически необходимо создание, во-первых, аксиоматики и принципов оптимальности, показывающих любому пользователю, в чем одно решение лучше другого решения, и, что такое оптимальное решение многокритериальной (т.е. со многими характеристиками) оптимизационной задачи. А на следующем этапе на базе аксиоматики и принципов оптимальности разработки конструктивных методов решения многокритериальных задач.

*Цель работы* представить теорию и методы многомерной математики, включающей аксиоматику, принципы оптимальности и методы для решения векторных задач оптимизации в моделировании промышленных процессов. Теория и методы векторной оптимизации могут являться математическим аппаратом вычислительного интеллекта в рамках искусственного интеллекта.

В работе в рамках теории векторной оптимизации сформулированы аксиомы и представлены принципы оптимальности решения векторных задач при равнозначных критериях и при заданном приоритете критерия, а также представлены конструктивные методы решения задач векторной оптимизации. В прикладной части представлены конструктивные методы принятия оптимальных решений, методы решения векторных задач для моделирования инженерных систем, которые описаны множеством функциональных характеристик.

В организационном плане в первых главах представлена векторная задача математического программирования, [6–22], для решения которой сформулирована аксиоматика и представлены принципы оптимальности. В рамках теории векторной оптимизации разработаны методы решения векторных задач при равнозначных критериях и при заданном приоритете критерия. Представленные конструктивные методы решения векторных задач математического программирования позволяют принимать решение, во-первых, при равнозначных критериях, во-вторых, при заданном приоритете критерия того или иного критерия.

В области инженерных систем, к которым относятся технические системы [11-14, 18, 19], технологические процессы [15, 21], материалы [17]. В работе сформированные конструктивные методы решения векторных задач математического (выпуклого) программирования, используя экспериментальные данные, представлены при проектировании технической системы.

Реализация методологии представлена на решении численной задачи принятия оптимального решения при выборе структуры материала и выбора оптимальных параметров в технической системе.

Решение проблемы принятия решений как при выборе структуры материала, так и выборе оптимальных параметров в технической системе включает: построение численной модели объекта в виде векторной задачи; решение задачи принятия решений при равнозначных критериях; решение векторной задачи принятия решений с приоритетом критерия.

Моделирование и принятие оптимального решения представлено при проектировании структуры материала. Реализация методологии направлена на решении численной задачи принятия решений по структуре материала с четырьмя параметрами (компонентами материала). Решение проблемы принятия решений включает: построение численной модели объекта в виде векторной задачи; решение задачи принятия решений при равнозначных критериях, решение векторной задачи принятия решений с приоритетом критерия.

Представлено моделирование и принятие оптимального решения при проектировании технической системы. Реализация методологии представлена на решении численной задачи принятия решений в технической системе с четырьмя параметрами и шестью критериями (многомерность шесть функций). Решение проблемы принятия решений включает: построение численной модели объекта в виде векторной задачи; решение задачи принятия решений при равнозначных критериях, решение векторной задачи принятия решений с приоритетом критерия.

Введение в многомерную математику. Векторная задача математического программирования.

## 2. Введение в многомерную математику. Векторная задача математического программирования.

### *2.1. Введение в многомерную математику.*

В качестве представителя многомерной математики мы сформулируем задачу математического программирования, представленную множеством функций, которые определяют многомерность исследуемого объекта. Каждая функция этого множества функций имеют различную целевую направленность: максимизации или минимизации, которые в совокупности изменяются на определенном (не пустом и замкнутом) множестве переменных (параметров). Не нарушая общности множество функций можно представить в виде вектора функций. В итоге получаем векторную задачу математического программирования (ВЗМП). На базе векторной задачи оптимизации представим теоретические проблемы необходимые для ее решения, которые включают аксиоматику (теоретические основы), принцип оптимальности и конструктивные методы решения векторных задач с равнозначными критериями и заданным приоритетом критерия, [6, 15, 29, 31, 33].

### *2.2. Векторная задача математического программирования*

*Векторная задача* математического программирования (ВЗМП) – это стандартная задача математического программирования, имеющая некоторое множество критериев, которые в совокупности представляют вектор критериев.

ВЗМП подразделяются на однородные и неоднородные ВЗМП.

*Однородные ВЗМП максимизации* – это векторная задача, у которой каждая компонента множества критериев направлена на максимизацию.

*Однородные ВЗМП минимизации* – это векторная задача, у которой каждая компонента множества критериев направлена на минимизацию.

*Неоднородные ВЗМП* – это векторная задача, у которой множество критериев разделено на два подмножества (вектора) критериев – максимизации и минимизации соответственно, т. е. неоднородные ВЗМП – это объединение двух видов однородных задач.

В соответствии с этими определениями представим выпуклую векторную задачу математического программирования с неоднородными критериями [6, 20, 22].

$$Opt\ F(X) = \{\max F_1(X) = \{\max f_k\ (X), k = \overline{1, K_1}\}, \tag{1}$$

$$\min F_2(X) = \{\min f_k\ (X), k = \overline{1, K_2}\}\}, \tag{2}$$

$$G\ (X) \leq B, \tag{3}$$

$$X \geq 0, \tag{4}$$

где $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ – вектор переменных, т.е. это вектор из $N$-мерного евклидова $\boldsymbol{R}^N$, (обозначение $j = \overline{1, N}$ эквивалентно $j = 1,...,N$);

$F(X)$ – вектор-функция (векторный критерий), имеющая $K$ – компонент-функций, ($K$ – мощность множества $\boldsymbol{K}$), $F(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K}\}$. Множество $\boldsymbol{K}$ состоит из подмножества $\boldsymbol{K}_1$ компонент максимизации и подмножества $\boldsymbol{K}_2$ минимизации; $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_1\cup\boldsymbol{K}_2$, для оценки совокупности критериев вводится обозначение операция «*opt*», которое включает в себя *max* и *min*;

$F_1(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K_1}\}$ – это векторный критерий, каждая компонента которого максимизируется, $K_1$ – число критериев, а $K_1 \equiv \overline{1, K_1}$- множество критериев максимизации (задача (1), (3), (4) представляют собой ВЗМП с однородными критериями максимизации). В дальнейшем будем предполагать, что $f_k(X), k = \overline{1, K_1}$ – непрерывные вогнутые функции (иногда будем их называть критериями максимизации);

$F_2(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K_2}\}$ – векторный критерий, каждая компонента которого минимизируется, $K_2 \equiv \overline{K_1 + 1, K} \equiv \overline{1, K_2}$ – множество критериев минимизации, $K_2$ – число, (задача (2) – (4) это ВЗМП с однородными критериями минимизации). Предполагаем, что $f_k(X), k = \overline{1, K_2}$- непрерывные выпуклые функции (будем иногда их называть критериями минимизации), т. е.:

$$\boldsymbol{K}_1 \cup \boldsymbol{K}_2 = \boldsymbol{K},\ \boldsymbol{K}_1 \subset \boldsymbol{K},\ \boldsymbol{K}_2 \subset \boldsymbol{K}. \tag{5}$$

$G(X) \leq B, X \geq 0$ – стандартные ограничения, $g_i(X) \leq b_i, i = 1, \ldots, M,$ где $b_i$ – набор вещественных чисел, а функции $g_i(X)$ предполагаются непрерывными и выпуклыми.

Обозначим: $\boldsymbol{S} = \{X \in \boldsymbol{R}^n | G(X) \leq 0, X^{min} \leq X \leq X^{max}\} \neq \emptyset$ – (6)

это допустимое множество точек (или более кратко – допустимое множество), задающиеся стандартными ограничениями (3)- (4) и тривиальными ограничениями $X \geq 0$. Предполагаем, что допустимое множество точек не пусто и представляет собой компакт.

Векторная функция (критерий) минимизации $F_2(X)$может быть преобразован в векторную функцию (критерий) максимизации умножением каждой компоненты $F_2(X)$ на минус единицу. Векторный критерий $F_2(X)$ введен в ВЗМП (1)- (4) для того, чтобы показать, что в задаче имеется два подмножества критериев $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ с принципиально различными направлениями оптимизации.

*Предполагаем*, что точки оптимума, полученные по каждому критерию, не совпадают хотя бы для двух критериев. Если все точки оптимума совпадают между собой для всех критериев, то считаем решение тривиально.

### *2.3. Теория векторной оптимизации*

*Теория векторной оптимизации* направлена на решение векторных (многокритериальных) задач математического программирования (1)- (4) с однородными и неоднородными критериями. Теория векторной оптимизации включает теоретические основы: аксиоматика, принципы оптимальности и методы решения векторных задач, во-первых, с равнозначными критериями и, во-вторых, с заданным приоритетом критерия. В совокупности теория векторной оптимизации представляет математический аппарат моделирования и принятия оптимального решения «объекта принятия решений».

В соответствии с этим определением «Теория векторной оптимизации" включает следующие разделы.

Основные теоретические понятия и определения, которые будут использованы при построении аксиоматики (аксиоматики Машунина Ю.К.), принципов оптимальности и методы решения задач векторной оптимизации. Аксиоматика Машунина Ю.К. подразделяется на аксиоматику, принципы оптимальности и методы решения векторных задач, во-первых, с равнозначными критериями и во-вторых, с заданным приоритетом критерия.

Концепция решения задач векторной оптимизации с равнозначными критериями. Концепция векторной оптимизации с приоритетом критерия. Симметрия в векторных задачах математического программирования: исследование, анализ.

«Объектом принятия решений» является: социальная система, экономическая и техническая система. Математический аппарат позволяет выбрать любую точку из множества точек, оптимальных по Парето, и показать ее оптимальность. Мы представили аксиоматику, принцип оптимальности и методы решения задач векторной оптимизации (1)- (4) с равнозначными критериями и заданным приоритетом критериев [6, 20]. Для простоты исследования критерии и ограничения ВЗМП (1)- (4) представлены полиномами второй степени, т.е. рассматриваются выпуклые векторные задачи, которые также включают векторные задачи линейного программирования. Выпуклые ВЗМП характеризуются свойством, что точка оптимума существует и такая точка только одна (Теорема Вейерштрасса).

### *2.4. Аксиомы и Аксиоматические методы: характеристика*

Аксиома – это утверждение, не требующее логического доказательства. На основе этих утверждений (исходных положений) строится та или иная теория.

Аксиоматический метод – это способ построения научной теории, при котором в основу теории кладутся некоторые исходные положения, называемые Аксиомами теории. В итоге все остальные положения теории получаются как логические следствия аксиом, [1, 2].

В математике Аксиоматический метод зародился в работах древнегреческих геометров. Образцом аксиоматического метода является древнегреческий ученый Евклид, аксиомы которого были заложены в его знаменитом сочинении «Начала».

Дальнейшее развитие аксиоматического метода получил в работах Д. Гильберта в виде так называемого метода формализма системы. Общая схема построения произвольной формальной системы («S») включает:

1. Язык системы («S»), в том числе алфавит – это перечень элементарных символов; правила образования (синтаксис), по которым строится формулы «S».

2. Аксиомы системы «S», которые представляют некоторое множество формул.

3. Правила вывода системы «S» [2].

В приложении к решению задачи векторной оптимизации (многомерной математики) аксиоматика подразделяется на два раздела:

1. Аксиоматика решения задачи векторной оптимизации с равнозначными критериями;

2. Аксиоматика решения задачи векторной оптимизации с заданным приоритетом критериев.

Только при построении первоначальной аксиоматики возможно в дальнейшем построение принципа оптимальности и вытекающих из него алгоритмов решения векторных задач математического программирования.

## 3. Аксиоматика, принцип оптимальности и конструктивные методы векторной оптимизации с равнозначными критериями

### *3.1. Аксиоматика решения векторной задачи оптимизации с равнозначными критериями*

В соответствии с вышеизложенной трактовкой Язык системы многомерной математики включает: во-первых, нормализацию критериев, во-вторых, относительную оценку критериев (функций), и, в-третьих, минимальный относительный уровень.

*Определение 1*. (***Нормализация критерия***).

*Нормализация критериев* (математическая операция: сдвиг плюс нормирование) представляет однозначное отображение функции $f_k(X)\ \forall k \in K$, в одномерное пространство $\boldsymbol{R}^1$ (сама функция $f_k(X)\ \forall k \in K$ представляет собой функцию преобразования из $N$-мерного евклидова пространства $\boldsymbol{R^N}$ в $\boldsymbol{R^1}$). Для нормализации критериев в векторных задачах будут использоваться линейные преобразования:

$$f_k(X) = a_k f_k^{'}(X) + c_k \forall k \in K,\ \text{или}\ f_k(X) = (f_k^{'}(X) + c_k)/a_k \forall k \in K, \qquad (7)$$

где $f_k^{'}(X), k = \overline{1,K}$ – старое (до нормализации) значение критерия; $f_k(X), k = \overline{1,K}$ – нормализованное значение, $a_k$, $c_k$- постоянные.

Нормализация критериев $f_k(X) = (f_k^{'}(X) + c_k)/a_k\ \forall k \in$К представляет простое (линейное) инвариантное преобразование полинома, в результате которого структура полинома остается неизменной. В оптимизационной задаче нормализация критериев $f_k(X) = (f_k'(X) + c_k)/a_k\ \forall k \in$К не влияет на результат решения.

Действительно, если решается выпуклая оптимизационная задача:

$$\boldsymbol{max}_{X \in S}\ f\ (X),\ \text{то в точке оптимума}\ X^* \in S{:}\ \frac{df(X^*)}{dX} = 0. \qquad (8)$$

В общем случае (в том числе с нормализацией критерия (1)) решается задача:

$$\boldsymbol{max}_{X \in S}\ (a_k f_k^{'}(X) + c_k), \qquad (9)$$

то в точке оптимума $X^* \in S$:

$$\frac{d\ (a_k f(X^*) + c_k)}{dX} = a_k \frac{d(f(X^*))}{dX} + \frac{d\ (c_k)}{dX} = 0. \qquad (10)$$

Результат идентичен, т.е. точка оптимума $X_k^*, k = \overline{1,K}$ является одной и той же для ненормализованных и нормализованных задач.

*Определение 2*. (***Относительная оценка функции (критерия***).

В векторной задаче (1)- (4) выполним нормализацию (7) вида:

$$\lambda_k(X) = \frac{f_k(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0},\ \forall k \in \boldsymbol{K} \qquad (11)$$

это относительная оценка $k$-го критерия в точке $X \in \boldsymbol{S}$, где $f_k^*$ наилучшая величина $k$-го критерия, полученная при решении ВЗМП (1)- (4) отдельно по $k$-му критерию;

$f_k^0$- наихудшая величина $k$-го критерия (антиоптимум) в точке $X_k^0$ (верхний индекс 0 – ноль) на допустимом множестве $\boldsymbol{S}$;

в задаче на *max* (1), (3), (4) величина $f_k^0$ является наименьшим значением $k$-го критерия: $f_k^0 = min_{X \in S} f_k(X)\ \forall k \in K_1$,

а в задаче на *min* (2), (3), (4) величина $f_k^0$ является наибольшим значением $k$-го критерия: $f_k^0 = max_{X \in S} f_k(X)\ \forall k \in K_2$.

Относительная оценка $\lambda_k(X)\ \forall k \in K$, во-первых, измеряется в относительных единицах; во-вторых, относительная оценка $\lambda_k(X)\ \forall k \in K$: на допустимом множестве меняется с нуля в точке $X_k^0$: $\forall k \in \boldsymbol{K}\ \lim_{X \to X_k^0} \lambda_k(X)\, \lambda_k(X) = 0$,

к единице в точке оптимума $X_k^*$:

$\forall k \in \boldsymbol{K}\ \lim_{X \to X_k^*} \lambda_k(X) = 1$:

$$\forall k \in \boldsymbol{K}\ 0 \le \lambda_k(X) \le 1, \mathrm{X} \in \boldsymbol{S}, \tag{12}$$

В результате такой нормализации все критерии ВЗМП (1)- (4) соизмеримы в относительных единицах, что позволяет, сравнимая их друг с другом, использовать критерии при совместной оптимизации.

*Определение 3*. ***Операция сравнения относительных оценок функции (критерия) между собой***.

Так как, любая функция (критерий) представлен в относительных оценках функций $\lambda_k(X)\ \forall k \in K$, которые лежат пределах (2.8), то возможно сравнение относительных оценок по числовой величине. Для сравнения используется операция «вычитания». Если сравнивается две функции (критерия), измеренные в относительных оценках $\lambda_{k=1}(X)$ и $\lambda_{k=2}(X)\ \forall k \in K$, то возможны три ситуации:

первая, когда $\lambda_{k=1}(X) > \lambda_{k=2}(X)$;

вторая, когда $\lambda_{k=1}(X) = \lambda_{k=2}(X)$;

третья, когда $\lambda_{k=1}(X) < \lambda_{k=2}(X)$.

Первая и третья ситуация исследуется в разделе 2.3.

В этом разделе исследуется вторая ситуация.

***3.2. Аксиоматика векторной оптимизации с равнозначными критериями***

*Аксиома 1*. **(*О равнозначности критериев в допустимой точке векторной задачи математического программирования*)**

В векторной задаче два критерия с индексами $k \in \boldsymbol{K}, q \in \boldsymbol{K}$ будем считать равнозначными в точке $X \in \boldsymbol{S}$, если относительные оценки по $k$-му и $q$-му критерию равны между собой в этой точке, т. е. $\lambda_k(X) = \lambda_q(X), k, q \in \boldsymbol{K}$.

*Пояснение*. Если в точке $X \in \boldsymbol{S}$ функции (критерии) будут равны:

$\lambda_l(X) = 0{,}45\ l \in \boldsymbol{K}$ и $\lambda_q(X) = 0{,}45, q \in \boldsymbol{K}$ (т.е. 45% от своей оптимальной величины, которая в относительных единицах равна 1), то такие критерии не «равны» друг другу, а равнозначны по своему числовому значению. И каждый из них несет свой функциональный смысл, который может быть получен, используя нормализацию критериев (11).

*Определение 4*. (***Определение минимального уровня среди всех относительных оценок критериев***). *Относительный уровень* λ в векторной задаче представляет нижнюю оценку точки $X \in S$ среди всех относительных оценок $\lambda_k(X), k = \overline{1, K}$::

$$\forall X \in \boldsymbol{S}\ \lambda \le \lambda_k(X), k = \overline{1, K}, \tag{13}$$

нижний уровень для выполнения условия (13) в точке $X \in \boldsymbol{S}$ определяется формулой

$$\forall X \in S\ \lambda = \boldsymbol{min}_{k \in K} \lambda_k(X). \tag{14}$$

Соотношения (13) и (14) являются взаимосвязанными. Они служат переходом от операции (14) определения min к ограничениям (13) и наоборот. Уровень λ позволяет объединить все критерии в векторной задаче одной числовой характеристикой λ и производить над ней определенные операции, тем самым, выполняя эти операции над всеми критериями, измеренными в относительных единицах. Уровень λ функционально зависит от переменной $X \in \boldsymbol{S}$, изменяя $X$, можем изменять нижний уровень – λ.

***3.3. Принцип оптимальности векторной оптимизации с равнозначными критериями***

*Определение 5*. (***Принцип оптимальности 1 с равнозначными критериями***).

Векторная задача математического программирования при равнозначных критериях решена, если найдена точка $X^o \in \boldsymbol{S}$ и максимальный уровень $\lambda^o$ (верхний индекс *o* – оптимум) среди всех относительных оценок такой, что

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{X\in\boldsymbol{S}}\boldsymbol{min}_{k\in\boldsymbol{K}}\lambda_k(X) \tag{15}$$

Используя взаимосвязь выражений (13) и (14), преобразуем максиминную задачу (15) в экстремальную задачу:

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{X\in\boldsymbol{S}}\lambda \tag{16}$$

$$\text{при ограничениях } \lambda \leq \lambda_k(X), k = \overline{1,K}. \tag{17}$$

Полученную задачу (16)- (17) назовем λ-задачей. λ-задача (16)- (17) имеет ($N$+1) размерность, как следствие результат решения λ-задачи (16)- (17) представляет собой оптимальный вектор $X^o \in R^{N+1}$, ($N$+1)-я компонента которого суть величина $\lambda^o$, т. е. $\boldsymbol{X^o} = \{x_1^o,\ x_2^o, \dots, x_N^o, x_{N+1}^o\}$, при этом $x_{N+1}^o = \lambda^o$, ($N$+1) компонента вектора $\boldsymbol{X^o}$ выделена в $\lambda^o$.

Полученная пара $\{\lambda^o, X^o\} = \boldsymbol{X^o}$ характеризует оптимальное решение λ-задачи (16)- (17) и соответственно векторной задачи математического программирования (1)- (4) с равнозначными критериями, решенную на основе нормализации критериев и принципе гарантированного результата. Назовем в оптимальном решении $\boldsymbol{X^o} = \{\lambda^o, X^o\}$, $X^o$ – оптимальной точкой, а $\lambda^o$ – максимальным уровнем.

Важным результатом алгоритма решения векторной задачи с равнозначными критериями (1)- (4) является следующая теорема.

*Теорема 1.* (***Теорема о двух наиболее противоречивых критериях в векторной задаче математического программирования с равнозначными критериями***).

В выпуклой векторной задаче математического программирования (1)- (4) при эквивалентных критериях, решенной на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата, в оптимальной точке $\boldsymbol{X^o} = \{\lambda^o, X^o\}$ всегда имеется два критерия – обозначим их индексами $q\in\boldsymbol{K}, p\in\boldsymbol{K}$ (которые являются самыми противоречивыми из множества критериев $k = \overline{1,K}$), и для которых выполняется равенство:

$$\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_p(X^o), q, p \in \boldsymbol{K}, X \in \boldsymbol{S}, \tag{18}$$

и другие критерии определяются неравенством:

$$\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), \forall k \in \boldsymbol{K}, q \neq p \neq k. \tag{19}$$

Впервые доказательство теоремы 1 представлено в [6, стр.22], в дальнейшем повторено в работе [10, стр.234].

Вместе с тем, что точка $X^o$ является оптимальным решением ВЗМП.

***3.4. Математический алгоритм решения задачи векторной оптимизации с равнозначными критериями***

Для решения векторной задачи математического программирования (1)- (4) разработан метод, основанный на нормализации критериев (7), аксиоматике и принципе максимина (гарантированного результата) (11). Конструктивный метод решения векторной задачи оптимизации с равнозначными критериями включает два блока: *1-й блок* «Системный анализ» – разделен на три шага; *2-й блок* «Принятие оптимального решения», включающий два шага: построения λ-задачи и ее решения.

***Блок 1. Системный анализ.***

*Шаг 1*. Решается задача (1)- (4) по каждому критерию отдельно, т.е. для $\forall k \in \boldsymbol{K}_1$ решается на максимум, а для $\forall k \in \boldsymbol{K}_2$ решается на минимум.

В результате получим:

$X_k^*$- точка оптимума по соответствующему критерию, $k=\overline{1, K}$;

$f_k^*=f_k\left(X_k^*\right)$ – величина $k$-го критерия в этой точке, $k=\overline{1, K}$.

*Шаг 2*. Определяем наихудшую величину каждого критерия (антиоптимум): $f_k^0, k=\overline{1, K}$. Для чего решается задача (1)- (4) для каждого критерия $k=\overline{1, \boldsymbol{K}_1}$ на минимум:

$$f_k^0=\min f_k(X), G(X) \leq B, X \geq 0, k=\overline{1, \boldsymbol{K}_1}$$

для каждого критерия $k=\overline{1, \boldsymbol{K}_2}$ на максимум:

$$f_k^0=\max f_k(X), G(X) \leq B, X \geq 0, k=\overline{1, \boldsymbol{K}_2}. \tag{20}$$

В результате решения получим: $X_k^0=\{x_j, j=\overline{1, N}\}$ – точка оптимума по соответствующему критерию, $k=\overline{1, K}$;

$f_k^0=f_k\left(X_k^0\right)$ – величина $k$-го критерия в точке, $X_k^0, k=\overline{1, K}$.

*Шаг 3*. Выполняется системный анализ множества точек, оптимальных по Парето. В точках $X^*=\{X_k^*, k=\overline{1, K}\}$ определяются величины целевых функций $F(X^*)$ и относительных оценок λ $(X^*)$: $\lambda_k(X)=\frac{f_k(X)-f_k^0}{f_k^*-f_k^0}, \forall k \in \boldsymbol{K}$.

$$F(X^*)=\{f_k(X_k^*), q=\overline{1, K}, k=\overline{1, K}\}=\left|\begin{array}{c} f_1(X_1^*), \ldots, f_K(X_1^*) \\ \ldots \\ f_1(X_K^*), \ldots, f_K(X_K^*) \end{array}\right|, \tag{21}$$

$$\lambda(X^*)=\{\lambda_q(X_k^*), q=\overline{1, K}, k=\overline{1, K}\}=\left|\begin{array}{c} \lambda_1(X_1^*), \ldots, \lambda_K(X_1^*) \\ \ldots \\ \lambda_1(X_K^*), \ldots, \lambda_K(X_K^*) \end{array}\right|. \tag{22}$$

В целом по задаче относительная оценка (22) $\lambda_k(X), k=\overline{1, K}$ лежит в пределах:

$0 \leq \lambda_k(X) \leq 1, k=\overline{1, K}$.

***Блок 2. Принятие оптимального решения в ВЗМП.***

Включает два шага – 4, 5.

*Шаг 4*. Построение λ-задачи. Создание λ-задачи осуществляется в два этапа: первоначально строится максиминная задача оптимизации с эквивалентными критериями, которые на втором этапе преобразуются в стандартную задачу математического программирования, названной λ-задачей. Для построения максиминная задача используем определение 2:

$\forall X \in \boldsymbol{S}\ \lambda=\boldsymbol{min}_{k \in \boldsymbol{K}} \lambda_k(X)$.

Нижний уровень λ максимизируем по $X \in S$. В результате сформулируем максиминную задачу оптимизации с нормализованными критериями:

$$\lambda^o=\boldsymbol{max}_{X \in \boldsymbol{S}} \boldsymbol{min}_{k \in \boldsymbol{K}} \lambda_k(X). \tag{23}$$

На втором этапе задача (23) преобразуется в стандартную задачу математического программирования, названную λ-задача:

$$\lambda^o=\boldsymbol{max}_{X \in \boldsymbol{S}} \lambda,\ \lambda^o=\boldsymbol{max}_{X \in \boldsymbol{S}} \lambda, \tag{24}$$

$$\lambda-\lambda_k(X) \leq 0, k=\overline{1, K}, \rightarrow \lambda-\frac{f_k(X)-f_k^0}{f_k^*-f_k^0} \leq 0, k=\overline{1, K}, \tag{25}$$

$$G(X) \leq B, X \geq 0,\ G(X) \leq B, X \geq 0, \tag{26}$$

где вектор неизвестных $\boldsymbol{X}$ имеет размерность $N+1$: $X=\{\lambda, x_1, \ldots, x_N\}$.

*Шаг 5*. Решение λ-задачи. λ-задача (24)- (26) – стандартная задача выпуклого программирования и для ее решения используются стандартные методы, в результате решения λ-задачи получим:

$$\boldsymbol{X^o} = \{\lambda^o, X^o\} \text{ – точку оптимума;} \tag{27}$$

$$f_k(X^o), k = \overline{1,K} \text{- величины критериев в этой точке;} \tag{28}$$

$$\lambda_k(X^o) = \frac{f_k(X^o) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1,K} \text{- величины относительных оценок;} \tag{29}$$

$\lambda^o$ – максимальная относительная оценка, которая является максимальным нижним уровнем для всех относительных оценок $\lambda_k(X^o)$ , гарантированным результатом в относительных единицах. $\lambda^o$ гарантирует, что в точке $X^o$ относительные оценки $\lambda_k(X^o)$ больше или равны $\lambda^o$:

$$\lambda_k(X^o) \geq \lambda^o, k = \overline{1,K} \text{ or } \boldsymbol{\lambda^o} \leq \lambda_k(X^o), k = \overline{1,K}, X^o \in \boldsymbol{S}, \tag{30}$$

и в соответствии с теоремой 1 точка оптимума $X^o = \{\boldsymbol{\lambda^o}, x_1, \dots, x_N\}$ является оптимальной по Парето.

**4. Аксиоматика и принцип оптимальности векторной оптимизации с заданным приоритетом критерия**

В определении 3 указано, что если сравнивать две функции (критерия), измеренных в относительных оценках $\lambda_{k=1}(X)$ и $\lambda_{k=2}(X)\ \forall k \in K$, то возможны три ситуации. Вторая ситуация, когда $\lambda_{k=1}(X) = \lambda_{k=2}(X)$ исследована в разделе 3.2 (равнозначные критерии). Ситуации: первая, когда $\lambda_{k=1}(X) > \lambda_{k=2}(X)$, и третья, когда $\lambda_{k=1}(X) < \lambda_{k=2}(X)$, исследуются в этом разделе. Такие ситуации определяются, как задачи с приоритетом критерия.

Для построения методов решения проблемы векторной оптимизации с приоритетом критерия мы введем следующие определения: О приоритете одного критерия над другим; О числовом выражении приоритета критерия над другим; О заданном числовом выражении приоритета одного критерия над другим; О нижнем уровне среди всех относительных оценок с приоритетом критерия; О подмножестве точек, приоритетных по критерию; Принцип оптимальности 2 – Решение векторной задачи с заданным приоритетом критерия, [20, 22].

***4.1. Аксиоматика решения векторной задачи оптимизации с заданным приоритетом критерия***

***Язык системы*** аксиоматики решения векторной задачи с заданным приоритетом критерия включает определения: 1) Приоритет одного критерия над другим; 2) Числовое значение приоритета критерия; 3) Нижний уровень критерия среди всех относительных оценок с приоритетом критерия.

*Определение* 6. (***О приоритете одного критерия над другим*).**

*Критерий* $q \in \boldsymbol{K}$ *в* векторной задаче *в точке* $X \in \boldsymbol{S}$ *имеет приоритет* над другими критериями $k = \overline{1,K}$, если относительная оценка $\lambda_q(X)$ по этому критерию больше или равна относительных оценок $\lambda_k(X)$ других критериев, т. е.:

$$\lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), k = \overline{1,K}, \tag{31}$$

и строгий приоритет, если хотя бы для одного критерия $t \in \boldsymbol{K}$: $\lambda_q(X) > \lambda_k(X), t \neq q$, а для остальных критериев $\lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), k = \overline{1,K}, k \neq t \neq q$.

Введением определения приоритета критерия $q \in \boldsymbol{K}$ в ВЗМП (1)- (4) выполнено переопределение раннего понятия приоритета. Если раньше в него вкладывалось интуитивное понятие о важности этого критерия, то сейчас эта “важность” определяется математически: чем больше относительная оценка $q$-го критерия над другими, тем он важнее (приоритетнее), и наиболее высокий приоритет в точке оптимума $X_k^*, \forall q \in \boldsymbol{K}$.

Из определения выражения приоритета критерия $q \in \boldsymbol{K}$ в векторной задаче в уравнениях (1)-(4) следует, что возможная область соответствующая множеству точек $\boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}$, которое характеризуется как $\lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), \forall k \neq q, \forall X \in \boldsymbol{S}_q$. Однако, вопрос на сколько критерий $q \in \boldsymbol{K}$ в точке множества $\boldsymbol{S}_q$ имеет больший приоритет относительно другого критерия остается открытым. Для ответа на этот вопрос, мы вводим коэффициент связи между парой относительных оценок $q$ и $k$, что, в целом, представляет вектор:

$$P^q(X) = \{p_k^q\,(X) \mid k = \overline{1,K}\}, q \in \boldsymbol{K}\ \forall X \in \boldsymbol{S}_q.$$

*Определение 7*. (***О числовом выражении приоритета критерия над другим***).

В векторной задаче с приоритетом критерия $q$-го над другими критериями $k = \overline{1,K}$, для $\forall X \in \boldsymbol{S}_q$, вектор $P^q(X)$ показывает во сколько раз относительная оценка $\lambda_q(X), q \in \boldsymbol{K}$, больше остальных относительных оценок $\lambda_k(X), k = \overline{1,K}$:

$$P^q(X) = \{p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}, k = \overline{1,K}\}, p_k^q(X) \geq 1, \forall X \in \boldsymbol{S}_q \subset S, k = \overline{1,K}, \forall q \in \boldsymbol{K}. \quad (32)$$

Такое отношение $p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}$ назовем *числовым выражением приоритета $q$-го критерия над остальными критериями* $k = \overline{1,K}$.

*Определение 7а*. (***О заданном числовом выражении приоритета одного критерия над другими***). В векторной задаче (1)- (4) с приоритетом критерия $q \in \boldsymbol{K}$ для $\forall X \in \boldsymbol{S}$ вектор $P^q = \{p_k^q, k = \overline{1,K}\}$, считается заданным лицом, принимающим решения, (ЛПР), если задана каждая компонента этого вектора. Заданная ЛПР компонента $p_k^q$, с точки зрения ЛПР, показывает во сколько раз относительная оценка $\lambda_q(X), q \in \boldsymbol{K}$ больше остальных относительных оценок $\lambda_k(X), k = \overline{1,K}$. Вектор $p_k^q, k = \overline{1,K}$ является заданным числовым выражением приоритета $q$-го критерия над остальными критериями $k = \overline{1,K}$:

$$P^q(X) = \{p_k^q(X), k = \overline{1,K}\}, p_k^q(X) \geq 1, \forall X \in \boldsymbol{S}_q \subset S, k = \overline{1,K}, \forall q \in \boldsymbol{K}. \quad (33)$$

Векторная задача (1)– (4), в которой задан приоритет какого-либо из критериев, называют векторной задачей с заданным приоритетом критерия. Проблема задачи вектора приоритетов возникает тогда, когда необходимо определить точку $X^o \in \boldsymbol{S}$ по заданному вектору приоритетов.

При операции сравнения относительных оценок с приоритетом критерия $q \in \boldsymbol{K}$, аналогично, как и в задаче с эквивалентными критериями, введем дополнительную числовую характеристику $\lambda$, которую назовем *уровнем*.

*Определение 8*. (***О нижнем уровне среди всех относительных оценок с приоритетом критерия***).

Уровень $\lambda$ является нижним среди всех относительных оценок с приоритетом критерия $q \in \boldsymbol{K}$, таким, что

$$\lambda \leq p_k^q \lambda_k(X), k = \overline{1,K}, q \in \boldsymbol{K}, \forall X \in \boldsymbol{S}_q \subset S; \quad (34)$$

нижний уровень для выполнения условия (54) определяется

$$\lambda = min_{k \in K} p_k^q \lambda_k(X), q \in \boldsymbol{K}, \forall X \in \boldsymbol{S}_q \subset S. \quad (35)$$

Соотношения (34) и (35) являются взаимосвязанными и служат в дальнейшем переходом от операции определения min к ограничениям и наоборот. В разделе 4 мы дали определение точки $X^o \in \boldsymbol{S}$, оптимальной по Парето, с эквивалентными критериями. Рассматривая данное определение как исходное, мы построим ряд аксиом деления допустимого множества точек $\boldsymbol{S}$, во-первых, как подмножество точек, оптимальных по Парето $S^o$, и, во-вторых, на подмножество точек $\boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}, q \in \boldsymbol{K}$, приоритетным на $q$ -му критерию.

***4.2. Аксиома векторной оптимизации с приоритетными критериями***

**Аксиома 2.** *(О подмножестве точек, приоритетных по критерию)***.**

В векторной задаче (1)- (4) подмножество точек $\boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}$ называется областью приоритета критерия $q \in \boldsymbol{K}$ над другими критериями, если

$\forall X \in \boldsymbol{S}_q \; \forall k \in \boldsymbol{K} \; \lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), q \neq k.$

Это определение распространяется и на множество точек $\boldsymbol{S}^o$, оптимальных по Парето, что дается следующим определением.

**Аксиома 2а.** (*О подмножестве точек, приоритетных по критерию, на множестве точек оптимальных по Парето*).

В векторной задаче (1)- (4) подмножество точек $\boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}^o \subset \mathrm{S}$ называется областью приоритета критерия $q \in \boldsymbol{K}$ над другими критериями, если $\forall \mathrm{X} \in S_q^o \; \forall k \in K \; \lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), q \neq k.$

Дадим некоторые пояснения.

Аксиома 2 и 2а позволила представить в векторной проблеме (1)– (4) допустимое множество точек $\boldsymbol{S}$, включая подмножество точек, оптимальных по Парето, $\boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S}$, в подмножества:

одно подмножество точек $\boldsymbol{S}' \subset \boldsymbol{S}$, где критерии эквивалентны, и подмножество точек $\boldsymbol{S}'$, пересекаясь с подмножеством точек $\boldsymbol{S}^o$, выделяет подмножество точек, оптимальных по Парето, в подмножество с эквивалентными критериями $\boldsymbol{S}^{oo} = \boldsymbol{S}' \cap \boldsymbol{S}^o$, которое, как это показано далее, состоит из одной точки $X^o \in \boldsymbol{S}$, т.е. $X^o = \boldsymbol{S}^{oo} = \boldsymbol{S}' \cap \boldsymbol{S}^o, \boldsymbol{S}' \in \boldsymbol{S}, \boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S}$;

«$\boldsymbol{K}$» подмножеств точек, где у каждого критерия $q = \overline{1, K}$ имеется приоритет над другими критериями $k = \overline{1, K}, q \neq k$. Таким образом, выполнено разделение, во-первых, множества всех допустимых точек $\boldsymbol{S}$, на подмножества $\boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}, q = \overline{1, K}$, и, во-вторых, разделение подмножества точек, оптимальных по Парето, $\boldsymbol{S}^o$, на подмножества $\boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}, q = \overline{1, K}$.

Отсюда верны следующие соотношения:

$$\boldsymbol{S}' \cup \left(\cup_{q \in K} \boldsymbol{S}_q^o\right) \equiv \boldsymbol{S}^\circ, \boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}^\circ \subset \boldsymbol{S}, q = \overline{1, K}.$$

Мы заметим, что подмножество точек $\boldsymbol{S}_q^o$, с одной стороны, включено в область (подмножество точек) имеющих приоритет критерия $q \in \boldsymbol{K}$ над другими критериями: $\boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}$,

и с другой стороны, на подмножество точек, оптимальны поз Парето: $\boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}^\circ \subset \boldsymbol{S}$.

Аксиома 2 и числовое выражение приоритета критерия (Определение 5) позволяет определять каждую допустимую точку $X \in \boldsymbol{S}$ (посредством вектора:

$P^q(X) = \{p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}, k = \overline{1, K}\}$, формироваться и выбирать:

• подмножество точек по приоритетному критерию $\boldsymbol{S}_q$, который включен в множество точек $\boldsymbol{S}$, $\forall q \in \boldsymbol{K} \; X \in \boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}$, (такое подмножество точек может использоваться в проблемах кластеризации, но это вне статьи);

• подмножество точек по приоритетному критерию $\boldsymbol{S}_q^o$, который включен в ряд точек $\boldsymbol{S}^o$, оптимальных по Парето, $\forall q \in K, X \in \boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}^\circ$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Множество допустимых точек $X \in \boldsymbol{S} \rightarrow$ | Подмножества точек оптимума по Парето, $X \in \boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S}$ $\rightarrow$ | Подмножество точек, оптимума по Pareto $X \in \boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S} \rightarrow$ | Отдельная точка, $\forall X \in \boldsymbol{S}$ $X \in \boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S}$ |

Это самый важный результат, который позволит вывести принцип оптимальности и построить методы выбора любой точки из множества точек, оптимальных по Парето.

***4.3. Принцип оптимальности решения векторной задачи с заданным приоритетом критерия***

Определение 8**.** (*Принцип оптимальности 2. Решение векторной задачи с заданным приоритетом критерия*). Векторная задача (1)– (4) с заданным приоритетом $q$-го критерия $p_k^q\lambda_k(X), k=\overline{1,K}$ считается решенной, если найдена точка $X^o$ и максимальный уровень $\lambda^o$ среди всех относительных оценок такой, что

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{X\in S}\boldsymbol{min}_{k\in K}p_k^q\lambda_k\,(X), q\in \boldsymbol{K}. \tag{36}$$

Используя взаимосвязь (34) и (35), преобразуем максиминную задачу (36) в задачу:

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{X\in S}\lambda, \tag{37}$$

$$\text{at restriction } \lambda \le p_k^q\lambda_k\,(X), k=\overline{1,K}. \tag{38}$$

Задачу (37)- (38) назовем λ-задачей с приоритетом $q$-го критерия.

Результатом решения λ-задачи будет точка $\boldsymbol{X^o}$={$X^o$, $\lambda^o$} – она же является и результатом решения ВЗМП (1)- (4) с заданным приоритетом критерия, решенной на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата.

В оптимальном решении $\boldsymbol{X^o}=\{X^o,\lambda^o\}$, $\boldsymbol{X^o}$ – оптимальная точка, а $\lambda^o$ – максимальный нижний уровень. Точка $X^o$ и уровень $\lambda^o$ соответствуют ограничениям (4), которые можно записать как: $\lambda^o\le p_k^q\lambda_k(X^o), k=\overline{1,K}$.

Эти ограничения являются основой оценки правильности результатов решения в практических векторных задачах оптимизации.

Определение 1 и 2 «Принципы оптимальности» дают возможность сформулировать понятие операции «opt».

**Определение 9**. (*Математическая операция «opt»*).

В векторной задаче (1)- (4), которая представлена критериями «max» и «min», математическая операция «opt» состоит в определении точки $X^o$ и максимального нижнего уровня $\lambda^o$, в котором все критерии измеряются в относительных единицах:

$$\lambda^\circ \le \lambda_k\,(X^\circ) = \frac{f_k\,(X)-f_k^0}{f_k^*-f_k^0}, k = \overline{1,K}, \tag{39}$$

т.е. все критерии $\lambda_k(X^o), k=\overline{1,K}$ равны или больше максимального уровня $\lambda^o$, (поэтому $\lambda^o$ также называется гарантированным результатом).

*Теорема 2.* (***Теорема о наиболее противоречивых критериях в векторной задаче с заданным приоритетом***).

Если в выпуклой векторной задаче математического программирования максимизации (1)-(4) задан приоритет $q$-го критерия $p_k^q, k=\overline{1,K}, \forall q\in \boldsymbol{K}$ над другими критериями, в точке оптимума $X^o\in \boldsymbol{S}$, полученной на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата, всегда найдется два критерия с индексами $r\in\boldsymbol{K}, t\in\boldsymbol{K}$, для которых выполняется строгое равенство из:

$$\lambda^\circ = p_k^r\lambda_r\,(X^\circ) = p_k^t\,\lambda_t\,(X^\circ), r,t,\in \boldsymbol{K}, \tag{40}$$

и другие критерии определяются неравенствами:

$$\lambda^\circ \le p_k^q\,(X^\circ), k=\overline{1,K}, \forall q\in\boldsymbol{K}, q\ne r\ne t. \tag{41}$$

Критерии с индексами $r\in\boldsymbol{K}, t\in\boldsymbol{K}$, для которых выполняется равенство (41), называются наиболее противоречивыми.

Доказательство. Аналогично теореме 2 [20].

Заметим, что в (40) и (41) индексы критериев $r \in \boldsymbol{K}, t \in \boldsymbol{K}$ могут совпадать с индексом $q \in \boldsymbol{K}$.

*Следствие теоремы 1*. О равенстве оптимального уровня и относительных оценок в векторной задаче с двумя критериями с приоритетом одного из них.

В выпуклой векторной задаче математического программирования с двумя эквивалентными критериями, решаемой на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата, в оптимальной точке $X^o$ всегда выполняется равенство: при приоритете первого критерия над второй:

$$\lambda^o = \lambda_1(X^o) = p_2^1\,(X^\circ)\lambda_2(X^o), X^o \in \boldsymbol{S}, \tag{42}$$

где $p_2^1\,(X^\circ) = \lambda_1(X^o)/\lambda_2(X^o)$,

при приоритете второго критерия над первым:

$$\lambda^o = \lambda_2(X^o) = p_1^2\,(X^\circ)\lambda_1(X^o), X^o \in \boldsymbol{S},$$

$$\text{где } p_1^2\,(X^\circ) = \lambda_2(X^o)/\lambda_1(X^o).$$

***4.4. Метод решения задачи векторной оптимизации с заданным приоритетом критерия***

**Шаг 1**. Мы решаем векторную задачу с равнозначными критериями. Алгоритм решения представлен в разделе 4.4.

В результате решения получаем:

оптимальные точки по каждому критерию отдельно $X_k^*, k = \overline{1,K}$ и размеры критериальных функций в этих точках $f_k^* = f_k\,(X_k^*), k = \overline{1,K}$, которые представляют граница множества точек, оптимальных по Парето;

точки антиоптимума по каждому критерию $X_k^0 = \{x_j, j = \overline{1,N}$ и наихудшей неизменной части каждого критерия $f_k^0 = f_k\,(X_k^0), k = \overline{1,K}$;

$\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\}$ оптимальная точка, как результат решения VPMP с эквивалентными критериями, т. Е. Результата решения максимальной задачи и λ-задачи, построенной на ее основе;

$\lambda^\circ$ – максимальная относительная оценка, которая является максимальным нижним уровнем для всех относительных оценок $\lambda_k$ $(X^\circ)$, или гарантированный результат в относительных единицах, $\lambda^\circ$ гарантирует, что все относительные оценки $\lambda_k$ $(X^\circ)$ равны или больше $\lambda^\circ$:

$$\lambda^o \le \lambda_k(X^o), k = \overline{1,K}, X^\circ \in S \tag{43}$$

Лицо, принимающее решение, проводит анализ результатов решения векторной задачи с эквивалентными критериями.

Если полученные результаты удовлетворяют лицо, принимающее решение, то конец, иначе выполняются последующие расчеты.

Дополнительно вычислим:

в каждой точке $X_k^*, k = \overline{1,K}$ определим величины всех критериев $f_k^* = f_k\,(X_k^*), k = \overline{1,K}$, которые представляют границу множества Парето, и относительных оценок: $\lambda\,(X^*) = \{\lambda_q\,(X_k^*), q = \overline{1,K}, k = \overline{1,K}\}$, $\lambda_k\,(X) = \frac{f_k\,(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, \forall k \in \boldsymbol{K}$:

$$F\,(X^*) = \begin{vmatrix} f_1(X_1^*) \dots f_K(X_1^*) \\ \dots \\ f_1(X_K^*) \dots f_K(X_K^*) \end{vmatrix}, \ \lambda\,(X^*) = \begin{vmatrix} \lambda_1(X_1^*) \dots \lambda_K(X_1^*) \\ \dots \\ \lambda_1(X_K^*) \dots \lambda_K(X_K^*) \end{vmatrix}. \tag{44}$$

Матрицы критериев $F$ $(X^*)$ и относительных оценок $\lambda$ $(X^*)$ показывают величины каждого критерия $k = \overline{1,K}$ при переходе от точки оптимума $X_k^*, k \in \boldsymbol{K}$ к другой $X_q^*, q \in \boldsymbol{K}$;

в точке оптимума при равнозначных критериях $X^o$ вычислим величины критериев и относительных оценок:

$$f_k(X^o), k=\overline{1,K};\ \lambda_k(X^o), k=\overline{1,K}, \tag{45}$$

которые удовлетворяют неравенству (43). В других точках $X \in \boldsymbol{S^o}$ меньший из критериев в относительных единицах $\lambda = \boldsymbol{min_{k \in K}} \lambda_k\ (X)$ всегда меньше $\lambda^o$. Запоминаются данные λ-задачи (24)- (26). Эта информация и является основой для дальнейшего изучения множества Парето.

**Шаг 2**. *Выбор приоритетного критерия* $q \in \boldsymbol{K}$.

Из теории (см. теорему 1) известно, что в оптимальной точке $X^o$ всегда имеется два наиболее противоречивых критерия $q \in \boldsymbol{K}$ и $v \in \boldsymbol{K}$, для которых в относительных единицах выполняется точное равенство:

$\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_v(X^o), q, v \in \boldsymbol{K}, X \in \boldsymbol{S}$, а для остальных выполняется неравенства:

$$\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), \forall k \in \boldsymbol{K}, q \neq v \neq k.$$

Как правило, из этой пары выбирается критерий, который ЛПР хотел бы улучшить, такой критерий называется «приоритетным критерием», обозначим его $q \in \boldsymbol{K}$.

**Шаг 3**. *Определяются числовые пределы изменения величины приоритета критерия* $q \in \boldsymbol{K}$. Для приоритетного критерия $q \in \boldsymbol{K}$ из матрицы (40) определим числовые пределы изменения величины критерия: в натуральных единицах $f_q\ (X)$ и в относительных единицах $\lambda_q\ (X)$, которые лежат в следующих пределах:

$$f_k(X^o) \leq f_q\ (X) \leq f_q\ (X_q^*), k \in \boldsymbol{K} \tag{46}$$

где $f_q\ (X_q^*)$ выводится из матрицы уравнения $F\ (X^*)$ (44), все критерии показывают размеры, измеренные в физических единицах, $f_k(X^o), k=\overline{1,K}$ из уравнения (45), и, в относительных единицах:

$$\lambda_k(X^o) \leq \lambda_q\ (X) \leq \lambda_q\ (X_q^*), k \in \boldsymbol{K}, \tag{47}$$

где $\lambda_q\ (X_q^*)$ выводится из матрицы $\lambda\ (X^*)$, все критерии показывают размеры, измеренные в относительных единицах (отметим, что $\lambda_q\ (X_q^*) = 1), \lambda_q\ (X^o)$ из уравнения (64).

Как правило, Выражения (46) и (47) выдаются на дисплей для анализа.

**Шаг 4**. *Выбор величины приоритетного критерия* (Принятие решения).

Лицо, принимающее решение, проводит анализ результатов расчетов (44) и из неравенства в натуральных единицах (46) выбирает числовую величину $f_q$, $q \in \boldsymbol{K}$:

$$f_q(X^o) \leq f_q \leq f_q\left(X_q^*\right), q \in \boldsymbol{K}. \tag{48}$$

Для выбранной величины критерия $f_q$ необходимо определить вектор неизвестных $X^{oo}$, для этого проводим последующие вычисления.

Шаг 5. *Расчет относительной оценки.*

Для выбранной величины приоритетного критерия $f_q$ вычисляется относительная оценка:

$$\lambda_q = \frac{f_q - f_q^0}{f_q^* - f_q^0},$$

которая при переходе от точки $X^o$ к $X_q^*$, в соответствии с (43) лежит в пределах: $\lambda_q\ (X^o)\ \leq \lambda_q \leq \lambda_q\ (X_q^*)\ = 1$.

Шаг 6. *Вычисление коэффициента линейной аппроксимации.*

Предполагая линейный характер изменения критерия $f_q\ (X)$ в (48) и соответственно относительной оценки $\lambda_q\ (X)$, используя стандартные приемы линейной аппроксимации, вычислим коэффициент пропорциональности ρ между $\lambda_q(X^o), \lambda_q$:

$$\rho = \frac{\lambda_q - \lambda_q(X^o)}{\lambda_q^* - \lambda_q^0}, q \in \boldsymbol{K},$$

Шаг 7. *Вычисление координат приоритетного критерия с величиной* $f_q$.

В соответствии с (44) координаты точки приоритетного критерия $X_q$ лежат в следующих пределах: $X^o \leq X_q \leq X_q^*, q \in \boldsymbol{K}$

Предполагая линейный характер изменения вектора $X_q = \{x_1^q, \ldots, x_N^q\}$ определим координаты точки приоритетного критерия с величиной $f_q$ с относительной оценкой (45):

$$X_q = \{x_1^q = x_1^o + \rho\,(x_q^*(1) - x_1^o), \ldots, \\ x_N^q = x_N^o + \rho\,(x_q^*(N) - x_N^o)\}, \quad (49)$$

где $X^o = \{x_1^o, \ldots, x_N^o\}$, $X_q^* = \{x_q^*(1), \ldots, x_q^*(N)\}$..

Шаг 8. *Вычисление основных показателей точки* $x^q$.

Для полученной точки $x^q$ (49), вычислим:

все критерии в натуральных единицах: $F^q = \{f_k(x^q), k = \overline{1,K}\}$;

все относительные оценки критериев:

$$\lambda^q = \{\lambda_k^q, k = \overline{1,K}\}, \lambda_k(x^q) = \frac{f_k(x^q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1,K}; \quad (50)$$

вектор приоритетов: $P^q = \{p_k^q = \frac{\lambda_q(x^q)}{\lambda_k(x^q)}, k = \overline{1,K}\}$;

максимальную относительную оценку:

$\lambda^{oq} = \min\,(p_k^q\,\lambda_k(x^q), k = \overline{1,K})$.

Аналогично (50) может быть рассчитана любая точка из множества Парето:

$\boldsymbol{X_t^o} = \{\boldsymbol{\lambda_t^o}, \boldsymbol{X_t^o}\} \in \boldsymbol{S^o}$.

***Анализ результатов***. Рассчитанная величина критерия $f_q(X_t^o), q \in \boldsymbol{K}$ обычно не равна заданной $\Delta f_q$ . Ошибка выбора $\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q|$ определяется ошибкой линейной аппроксимации. Результаты исследования симметрии в ВЗМП с заданным приоритетом аналогичны, как и для ВЗМП с равнозначными критериями, но центр симметрии смещен в сторону приоритетного критерия.

## 5. Прикладная многомерная математика: Векторная задача линейного программирования – модель развития экономических систем.

В этом разделе мы рассматриваем отдельную задачу многомерной математики: векторную задачу линейного программирования. Математическое и программное обеспечение решения векторной задачи линейного программирования, алгоритмы решения которой при равнозначных критериях представлен в разделе 3 и при заданном приоритете критерия в разделе 4, [13, 39, 45].

### *5.1. Векторная задача линейного программирования (ВЗЛП)*

Векторная задача линейного программирования – это стандартная задача математического программирования, имеющая некоторое множество критериев, которые в совокупности представляют вектор критериев.

ВЗЛП подразделяются на однородные и неоднородные ВЗЛП.

*Однородная ВЗЛП максимизации* – это векторная задача, у которой каждая компонента множества критериев направлена на максимизацию.

*Однородные ВЗЛП минимизации* – это векторная задача, у которой каждая компонента множества критериев направлена на минимизацию. Неоднородные ВЗЛП – это векторная задача, у которой множество критериев разделено на два подмножества (вектора) критериев – максимизации и минимизации соответственно, т. е. неоднородные ВЗМП – это объединение двух видов однородных задач. В соответствии с этими определениями представим векторную задачу линейного программирования с неоднородными критериями.

$$opt\ F\big(X(t)\big) = \{max\ F_1\big(X(t)\big) = \{max\ f_k\big(X(t)\big) = \sum_{j=1}^{N} c_j^k x_j(t)\,, k = \overline{1, K_1}, \tag{51}$$

$$min\ F_2\big(X(t)\big) = \{min\ f_k\big(X(t)\big) = \sum_{j=1}^{N} c_j^k x_j(t)\,, k = \overline{1, K_2}\}\}, \tag{52}$$

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\ (t) x_j\ (t) \leq b_i\ (t), i = \overline{1, M}, \tag{53}$$

$$\sum_{j=1}^{N} c_j^k x_j\ (t) \geq b_k(t), k{\in}K,\ 0{\leq}x_j\ (t){\leq}\ x_j\ (t), j = \overline{1, N}, \tag{54}$$

где $X = \{x_j\ (t), j = \overline{1, N}\}$ – вектор переменных, т.е. это вектор из $N$-мерного евклидова пространства $R^N$, (обозначение $j = \overline{1, N}$ эквивалентно $j =\ (1, \dots, N)$);

$F(X)$ - вектор-функция (векторный критерий), имеющая $K$ – компонент-функций, ($K$ – мощность множества $K$). Множество $K$ состоит из подмножества $K_1$ компонент максимизации и подмножества $K_2$ минимизации: $K = K_1{\cup}K_2$ , для оценки совокупности критериев вводится обозначение операция «*opt*», которое включает в себя max и min;

$F_1\big(X(t)\big) = \{max\ f_k\big(X(t)\big), k = \overline{1, K_1}$ – это векторный критерий, каждая компонента которого максимизирует, $K_1$ – число критериев, а $K_1{\equiv}\overline{1, K_1}$- множество критериев максимизации (задача (51), (53)- (54) представляют собой ВЗЛП с однородными критериями максимизации);

$F_2\big(X(t)\big) = \{min\ f_k\big(X(t)\big), k = \overline{1, K_2}$- векторный критерий, каждая компонента которого минимизируется, $K_2{\equiv}\overline{K_1 + 1, K}{\equiv}\overline{1, K_2}$ – множество критериев минимизации, $K_2$ – число, (задача (52)- (55) это ВЗЛП с однородными критериями минимизации).

$K_1{\cup}K_2 = K,\ K_1{\subset}K,\ K_2{\subset}K.$

ВЗЛП (51)- (54) может рассматриваться как $K$-мерная задача оптимизации, где $K = K_1{\cup}K_2$.

(53)- (54) – стандартные ограничения.

$S = \{X{\in}R^n | G(X) \leq 0, X^{min} \leq X \leq X^{max}\} \neq \emptyset$ – это допустимое множество точек, задающиеся стандартными ограничениями (53)- (54) и тривиальными ограничениями $0{\leq}x_j\ (t){\leq}\ u_j\ (t), j = \overline{1, N}$. Предполагаем, что допустимое множество точек не пусто и представляет собой компакт.

***5.2. Структура программного обеспечения решения векторной задачи линейного программирования***

Программное обеспечение решения ВЗЛП (51)- (54) разработано на базе алгоритма, основанного на нормализации критериев и принципа гарантированного результата, который представлен в [33]. Программное обеспечение решения ВЗЛП (51)- (54) в системе MATLAB включает два блока:

1 блок (подпрограмма): Подготовка исходной информации для решения ВЗЛП: VPLP_DATA_N;

2 блок (подпрограмма): представляет функцию VPLP_Solution – «Решение векторной задачи линейного программирования», которая загружена MATLAB заранее.

Полностью текст программного обеспечения представлен в [33].

***5.3. Практика решения векторных задач линейного программирования.***

Представим решение векторных задач линейного программирования (ВЗЛП).

***Пример 5.1***.

***Дано***. Векторная задача линейного программирования с двумя критериями максимизации и одним критерием минимизации:

$$Opt\ F(X) = \{max\ F_1\ (X) = \{max\ f_1(X) \equiv 43.2x_1 + 36x_2, \tag{55}$$

$$max\ f_2(X) \equiv 7.2x_1 + 14.4x_2\}, \tag{56}$$

$$min\ F_2\ (X) = \{min\ f_3(X) \equiv 7.2x_1 + 8.64x_2\}\}, \tag{57}$$

$$7.2x_1 + 8.64x_2 \leq 5184, \tag{58}$$

$$2.64x_1 + 2.4x_2 \geq 528, \tag{59}$$

$$x_1 \leq 56, x_2 \leq 40, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \tag{60}$$

***Требуется***. Найти неотрицательное решение $x_1, x_2$ в системе неравенств (58)- (60) такое, при котором функции $f_1(X), f_2(X)$ принимают, возможно, максимальное значение $f_3(X)$ минимальное значение.

***Решение***. Мы представим геометрическую интерпретацию допустимого множества решений ***S***, определяемых ограничениями (58)- (60), на рис. 1.

Решение векторной задачи линейного программирования (55)- (60) в соответствии с алгоритмом решения ВЗЛП на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата представим в системе MATLAB. Для решения задачи линейного программирования на каждом шаге используется функция linprog (…), [24].

*Алгоритм* представим в системе MATLAB как последовательность шагов.

*Шаг 0*. Формируются *исходные данные*:

cvec = [-43.2 -36;

-7.2 -14.4;

7.2 8.64]; % Векторная целевая функция в виде матрицы.

a = [7.2 8.64;

-2.64 -2.4]; % Матрица линейных ограничений

b= [5184. -528.]; % Вектор, содержащий ограничения ($b_i$)

Aeq= []; Beq= []; % Ограничения равенства

Lb= [0. 0.]; % Lower bound of variables

Ub= [600. 540.]; %Upper bound of variables.

*Шаг 1*. Решается ВЗЛП (55)- (60) по каждому критерию.

1. Решение по первому критерию представляет обращение к функции linprog (…):

[X1, f1]=linprog (cvec (1,:),a,b,Aeq,Beq,Lb,Ub),

где (…) – исходные данные, представленные на нулевом шаге;

[X1, f1] – выходные данные: X1 – вектор неизвестных переменных; f1 – величина целевой функции.

В результате решения получим:

$X1 = X_1^* = \{x_1 = 600, x_2 = 100\}$ – оптимальные значения переменных;

$f1 = f_1^* = -29520$ – оптимальное значение целевой функции

2. Решение по второму критерию:

[X2,f2]=linprog (cvec (2,:),a,b,Aeq,Lb,Ub)

В результате решения по второму критерию получили:

$\mathrm{X2} = X_2^* = \{x_1 = 72, x_2 = 540\};\ \mathrm{f2} = f_2^* = -8294.4$

3. Решение по третьему критерию:

[X3,f3]=linprog (cvec (2,:),a,b,Aeq,Lb,Ub)

В результате решения по третьему критерию получили:

$\mathrm{X3} = X_3^* = \{x_1 = 200, x_2 = 0\};\ \mathrm{f3} = f_3^* = 1440$

Полученные точки оптимума показаны на рис. 1.

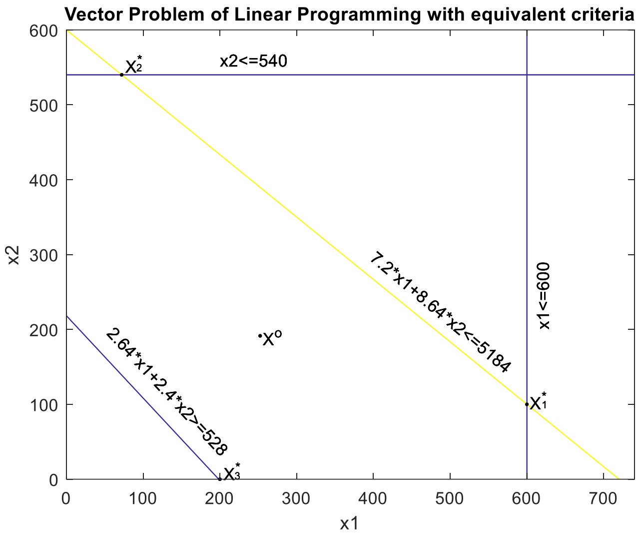


Рис. 1. Допустимое множество решений ВЗЛП (55)- (60)

*Шаг 2*. Решается ВЗЛП (55)- (60) по каждому критерию.

1. Решение по первому критерию представляет обращение к функции linprog (…):

[X1min, f1min]=linprog (-1*cvec (1,:),a,b,Aeq,Beq,Lb,Ub),

где (…) – исходные данные, представленные на нулевом шаге;

[X1min, f1min] – выходные данные: X1min – вектор неизвестных переменных; f1min – величина целевой функции.

В результате решения получим:

$X1min = X_1^0 = \{x_1 = 0, x_2 = 220\}$ – оптимальные значения переменных;

$f1min = f_1^0 = 7920$ – оптимальное значение целевой функции

2. Решение по второму критерию:

[X2min,f2min]=linprog (-1*cvec (2,:),a,b,Aeq,Lb,Ub)

В результате решения по второму критерию получили:

$\mathrm{X2min} = X_2^0 = \{x_1 = 200, x_2 = 0\};\ \mathrm{f2min} = f_2^0 = 1440$

3. Решение по третьему критерию:

[X3max,f3max]=linprog (-1*cvec (3,:),a,b,Aeq,Lb,Ub)

В результате решения по третьему критерию получили:

$\mathrm{X3max} = X_3^0 = \{x_1 = 600, x_2 = 100\};\ \mathrm{f3} = f_3^0 = -5184.$

*Шаг 3*. Выполняется системный анализ критериев в ВЗЛП (55)- (60). Для этого в оптимальных точках: $X_1^*, X_2^*$ и $X_3^*$ определяются величины целевых функций $F\,(X^*)$ и относительных оценок:

$\lambda\,(X^*),\ \lambda_k(X) = \frac{f_k\,(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, \forall k \in \boldsymbol{K}$:

$$F\ (X^*) = \{f_k\ (X_k^*), q = \overline{1,K}, k = \overline{1,K}, K = 3\} = \begin{vmatrix} -29520\ -5760\ 5184 \\ -22550\ -8294\ 5184 \\ -8640\ -1440\ 1440 \end{vmatrix},$$

$$\lambda\ (X^*) = \{\lambda_q\ (X_k^*), q = \overline{1,K}, k = \overline{1,K}, K = 3\} = \begin{vmatrix} 1.0000\ 0.6303\ 0 \\ 0.6773\ 1.0000\ 0 \\ 0.0333\ 0\ 1.0000 \end{vmatrix}.$$

*Шаг 4*. Строится λ-задача: $\lambda^o = \boldsymbol{max_{X \in S}}\, \lambda$,

при ограничениях: $\lambda - \frac{f_1\ (X) - f_1^0}{f_1^* - f_1^0} \leq 0$, $\lambda - \frac{f_2\ (X) - f_2^0}{f_2^* - f_2^0} \leq 0$, $\lambda - \frac{f_3\ (X) - f_3^0}{f_3^* - f_3^0} \leq 0$,

$7.2x_1 + 8.64x_2 \leq 5184$, $2.64x_1 + 2.4x_2 \geq 528$, $x_1 \leq 56, x_2 \leq 40, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

*Шаг 5*. Решение λ-задачи. Для решения λ-задачи в системе Matlab аналогично шагу 0 задаются исходные параметры.

Обращение к функции linprog () для решения λ-задачи представлено в виде:

[Xo, Lo]=linprog (Lo,Ao,bo,Aeq,Beq,Lbo,Ubo).

Результаты решения λ-задачи: $\boldsymbol{X^o} = \{\ x_1 = 0.4573, x_2 = 252.4, x_3 = 191.4\}$**.**

где $\boldsymbol{X^o}$ определяет оптимальные значения переменных; координата $x_1$ соответствует $\lambda^o$– максимальному относительному уровню: $x_1 = \lambda^o$; а $x_2, x_3$ соответствует $x_1, x_2$задачи (55)- (60).

Lo $= \lambda^o = 0.4573$ представляет оптимальное значение целевой функции.

$\lambda^o$ является максимальным уровнем среди всех минимальных относительных уровней на допустимом множестве $X \in S$: $\lambda^o = \boldsymbol{max_{X \in S} min_{k \in K}} \lambda_k\ (X)$.

Функции $\lambda_1(X), \lambda_2(X)\ and\ \lambda_3\ (X)$ а также точки оптимума $X^o$ и $\lambda^o$, которые получены на их пересечении, показаны на рис. 2.

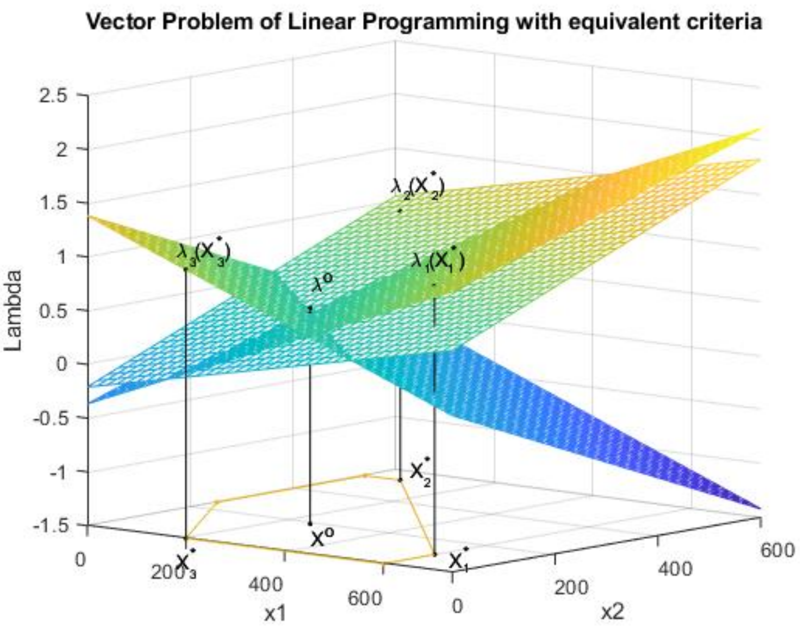


Рис. 2. Результаты решения ВЗЛП: функции: $\lambda_1(X), \lambda_2(X)$ и $\lambda_3\ (X)$ точки оптимума $X^o$,$\lambda^o$

Выполним проверку: $f_1(X^o) = -17798, \lambda_1(X^o) = 0.4573$;

$f_2(X^o) = -4575, \lambda_2(X^o) = 0.4573$; $f_3(X^o) = 3472, \lambda_3(X^o) = 0.4573$;

т. е. $\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), k = 1, 2, 3$.

Эти результаты показывают, что в точке оптимума $X^o$ три критерия $\lambda_1(X^o), \lambda_2(X^o), \lambda_3(X^o)$, измеренные в относительных единицах, достигли уровня: $\lambda^o = 0.4573$ от своих оптимальных величин $f_1^*, f_2^*, f_3^*$. Любое увеличение одного из критериев выше этого уровня приводит к уменьшению другого критерия, т.е. точка $X^o$ оптимальна по Парето.

**6. Прикладная многомерная математика: Векторная задача нелинейного программирования – модель развития инженерных систем.**

В этом разделе мы рассматриваем отдельную задачу многомерной математики: векторную задачу нелинейного программирования. Математическое и программное обеспечение решения векторной задачи нелинейного программирования, алгоритмы решения которой при равнозначных критериях представлен в разделе 3 и при заданном приоритете критерия в разделе 4, [20, 22, 43, 45].

***6.1. Векторная задача нелинейного программирования (ВЗНП)***

Векторная задача нелинейного программирования (ВЗНП) – это стандартная задача математического программирования, имеющая некоторое множество критериев, которые в совокупности представляют вектор критериев. ВЗНП подразделяются на однородные и неоднородные ВЗЛП. В соответствии с этими определениями представим векторную задачу нелинейного программирования с неоднородными критериями.

$Opt\, F(X) = \{\max F_1(X) = \{\max f_k(X) = c_{0k} + c_{1k}x_1 + \cdots + c_{N+1,k}x_1x_2 + \cdots + c_{n1,k}x_1^2 + \cdots + c_{nnk}x_n^2, k = \overline{1, K_1},$ (61)

$min\, F_2(X) = \{min\, f_k(X) = c_{0k} + c_{1k}x_1 + \cdots + c_{N+1,k}x_1x_2 + \cdots + c_{n1,k}x_1^2 + \cdots + c_{nnk}x_n^2, k = \overline{1, K_2}\}\},$ (62)

$$a_{0k} + a_{1i}x_1 + \cdots + a_{N+1,i}x_1x_2 + \cdots + a_{n1,i}x_1^2 + \cdots + a_{nni}x_n^2 \leq b_i, i = \overline{1, M}, \quad (63)$$

$$\sum_{j=1}^N c_j^k x_j\ (t) \geq b_k(t), k \in K,\ 0 \leq x_j\ (t) \leq u_j, j = \overline{1, N}, \quad (64)$$

где $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ – вектор переменных, т.е. это вектор из $N$-мерного евклидова пространства $R^N$, (обозначение $j = \overline{1, N}$ эквивалентно $j = (1, \ldots, N)$;

$F(X)$- вектор-функция (векторный критерий), имеющая $K$ – компонент-функций. Функция представляет квадратичный полином.

Множество критериев (полиномов) $K$ состоит из подмножества $K_1$ компонент максимизации и подмножества $K_2$ минимизации: $K = K_1 \cup K_2$ , для оценки совокупности критериев вводится обозначение операция «*opt*», которое включает в себя max и min;

$F_1(X) = \{max\, f_k(X), k = \overline{1, K_1}$ – это векторный критерий (61), каждая компонента которого максимизирует, $K_1$ – число критериев, а $K_1 \equiv \overline{1, K_1}$- множество критериев максимизации (задача (61), (63)- (64) представляют собой ВЗНП с однородными критериями максимизации);

$F_2(X) = \{min\, f_k(X), k = \overline{1, K_2}$ – векторный критерий, каждая компонента которого минимизируется, $K_2 \equiv \overline{K_1 + 1, K} \equiv \overline{1, K_2}$ – множество критериев минимизации, $K_2$ – число критериев, (задача (62), (63)- (64) это ВЗНП с однородными критериями минимизации):

$$K_1 \cup K_2 = K,\ K_1 \subset K,\ K_2 \subset K.$$

(63) – стандартные нелинейные ограничения (в виде полиномов).

(64) – ограничения, накладываемые на критерии.

$S = \{X \in R^n | G(X) \leq 0, X^{min} \leq X \leq X^{max}\} \neq \emptyset$ – *это допустимое множество* точек, задающиеся стандартными ограничениями (63)- (64) и тривиальными ограничениями $0 \leq x_j\ (t) \leq u_j, j = \overline{1, N}$. Предполагаем, что допустимое множество точек не пусто и представляет собой компакт. Векторная функция (критерий) минимизации $F_2(X)$ может быть преобразован в векторную функцию (критерий) максимизации умножением каждой компоненты $F_2(X)$ на минус единицу. Векторный критерий $F_2\ (X)$ введен в ВЗНП (61)- (64) для того, чтобы показать, что в задаче имеется два подмножества критериев $K_1, K_2$ с принципиально различными направлениями оптимизации.

Векторная задача нелинейного программирования (61)- (64) может рассматриваться как $K$-мерная задача оптимизации, где размерность критериев $K = K_1 \cup K_2$, с множеством параметров $N$.

***6.2. Структура программного обеспечения решения векторной задачи нелинейного программирования***

Для решения векторной задачи нелинейного программирования (61)- (64) при равнозначных критериях разработана программа в системе MATLAB с четырьмя критериями (66) и двумя параметрами, которая по существу представляет программу – шаблон для написания и решения других векторных задач нелинейного программирования (61)- (64) – математических моделей инженерных систем [20, 21, 22].

Программное обеспечение решения векторной задачи нелинейного программирования (61)- (64) при равнозначных критериях реализовано на основе алгоритма решения ВЗНП, изложенного в разделе 3 и использования программы FMINCON (…), представленной в системе MATLAB.

При использовании программы FMINCON (…) необходимо разработать две подпрограммы – функции:

Первая функция включает два блока: первый блок предназначен для оценки в точке $X$ критерия $f_k(X)\ \forall k \in K$; второй блок для расчета первой производной в этой точке $\frac{df_k(X)}{\mathrm{d}X}\ \forall k \in K$;

Вторая функция включает те же два блока только для ограничений: для оценки в точке X ограничения $g_i(X)\ \forall i \in M$; второй блок для расчета первой производной в этой точке $\frac{dg_i(X)}{\mathrm{d}X}\ \forall i \in M$.

Программа FMINCON (…) используется на первом шаге алгоритма решения ВЗНП раздела 2.2.3 (максимизации критериев) и на втором шаге этого алгоритма (минимизации критериев). В дальнейшем Программа FMINCON (…) используется в соответствии с алгоритмом раздела 2.2.3 на 4 и 5 шаге, где решается □-задача.

В целом при нелинейных ограничениях программное обеспечение решения ВЗНП включает: К*2 (1 шаг) + К*2 (2 шага)+2 (□-задача) обращений к функции FMINCON (…). Так как критерии и ограничения ВЗНП индивидуальны, то для каждой ВЗНП пишется индивидуальное программное обеспечение, но по структуре аналогично представленному программному обеспечению.

Для решения ВЗНП (4.1)- (4.4) разработанная программа в [33] представляет программу – шаблон для написания и решения других ВЗНП – математических моделей инженерных систем.

***6.3. Математическая подготовка для решения векторной задачи нелинейного программирования***

***Пример* 4.2.**

***Дано***. Рассматривается *векторная задача нелинейного (выпуклого) программирования* с четырьмя однородными критериями. В качестве критериев используем окружность, а на переменные наложены линейные ограничения, поэтому задача решается устно.

$$opt\ F\ (X) = \{min\ F_2(X) = min\ f_1(X) \equiv (x_1 - 80)^2 + (x_2 - 80)^2, \quad (65)$$

$$min\ f_2(X) \equiv (x_1 - 80)^2 + (x_2 - 20)^2, \quad (66)$$

$$min\ f_3(X) \equiv (x_1 - 20)^2 + (x_2 - 20)^2, \quad (67)$$

$$min\ f_4(X) \equiv (x_1 - 20)^2 + (x_2 - 80)^2, \quad (68)$$

при ограничениях $0 \le x_1 \le 100,\ 0 \le x_2 \le 100,$ (69)

***Требуется***. Найти неотрицательное решение $x_1, x_2$ в системе неравенств (69) такое, при котором функции $f_1(X), f_2(X)\ f_3(X), f_4(X)$ принимают, возможно минимальное значение.

***Решение векторной задачи нелинейного программирования.***

Для решения задачи (65)- (69) по каждому критерию, а в дальнейшем и λ-задачи, используется система MATLAB (функция fmincon (…) – решение нелинейной задачи оптимизации) [23].. Решение представлено, как последовательность шагов.

*Шаг 1*. Решается векторная задача (65)- (69) на max по каждому критерию отдельно. Результаты решения ВЗМП (65)- (69) по каждому критерию:

1 критерий $X_1^* = \{x_1 = 0, x_2 = 0\}, f_1^* = f_1(X_1^*) = -12800;$

2 критерий $X_2^* = \{x_1 = 0, x_2 = 100\}, f_2^* = f_2(X_2^*) = -12800;$

3 критерий $X_3^* = \{x_1 = 100, x_2 = 100\}, f_3^* = f_3(X_3^*) = -12800;$

4 критерий $X_4^* = \{x_1 = 100, x_2 = 0\}, f_4^* = f_4(X_4^*) = -12800;$

*Шаг 2*. Решается векторная задача (65)- (69) на min по каждому критерию отдельно. Результаты решения ВЗМП (65)- (69) по каждому критерию:

1 критерий $X_1^0 = \{x_1 = 80, x_2 = 80\}, f_1^0 = f_1(X_1^0) = 0$:

2 критерий $X_2^0 = \{x_1 = 80, x_2 = 20\}, f_2^0 = f_2(X_2^0) = 0$:

3 критерий $X_3^0 = \{x_1 = 20, x_2 = 20\}, f_3^0 = f_3(X_3^0) = 0$:

4 критерий $X_4^0 = \{x_1 = 20, x_2 = 80\}, f_4^0 = f_4(X_4^0) = 0$:

Представим геометрическую интерпретацию ограничений ВЗНП (65)- (69) и результатов решения на рис. 3.

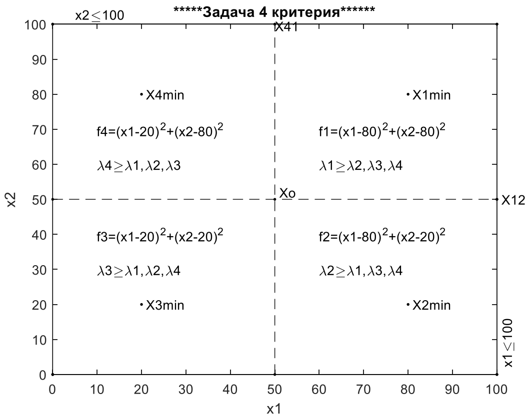


Рис. 3. Ограничения ВЗМП (65)- (69), точки оптимума $X_1^0 = X1min, X_2^0 = X2min, X_3^0 = X3min, X_4^0 = 4min$ и относительные оценки.

*Шаг 3*. Выполняется системный анализ множества точек Парето.

В точках оптимума $X^* = \{X_k^*, k = \overline{1, K}\}$, определяются величины целевых функций $F\ (X^*)$ и относительных оценок $\lambda\ (X^*)$:

$$F(X^*) = \{\{f_q(X_k^*), q = \overline{1,K}\}, k = \overline{1,K}\},\ \lambda(X^*) = \{\{\lambda_q(X_k^*), q = \overline{1,K}\}, k = \overline{1,K}\},$$

В системе MATLAB в точках оптимума: X1min, X2min, X3min, X4min вычисление этих функций будет следующим (Результат системного анализа):

$$F\ (X^*) = \begin{vmatrix} f_1(X_1^*)\ f_2(X_1^*)\ f_3(X_1^*)\ f_4(X_1^*) \\ f_1(X_2^*)\ f_2(X_2^*)\ f_3(X_2^*)\ f_4(X_2^*) \\ f_1(X_3^*)\ f_2(X_3^*)\ f_3(X_3^*)\ f_4(X_3^*) \\ f_1(X_4^*)\ f_2(X_4^*)\ f_3(X_4^*)\ f_4(X_4^*) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0\ 3600\ 7200\ 3600 \\ 3600\ 0\ 3600\ 7200 \\ 7200\ 3600\ 0\ 3600 \\ 3600\ 7200\ 3600\ 0 \end{vmatrix},$$

$$\lambda\left(X^{*}\right)=\begin{vmatrix}\lambda_1(X_1^*)\ \lambda_2(X_1^*)\ \lambda_3(X_1^*)\ \lambda_4(X_1^*)\\ \lambda_1(X_2^*)\ \lambda_2(X_2^*)\ \lambda_3(X_2^*)\ \lambda_4(X_2^*)\\ \lambda_1(X_3^*)\ \lambda_2(X_3^*)\ \lambda_3(X_3^*)\ \lambda_4(X_3^*)\\ \lambda_1(X_4^*)\ \lambda_2(X_4^*)\ \lambda_3(X_4^*)\ \lambda_4(X_4^*)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1.0\ 0.7188\ 0.4375\ 0.7188\\ 0.7188\ 1.0\ 0.7188\ 0.4375\\ 0.4375\ 0.7188\ 1.0\ 0.7188\\ 0.7188\ 0.4375\ 0.7188\ 1.0\end{vmatrix}.$$

В точках оптимума $X_k^*, k=\overline{1,K}$ все относительные оценки (нормализованные критерии) равны единице: $\lambda_k(X_k^*)=\frac{f_k\,(X_k^*)-f_k^0}{f_k^*-f_k^0}=1, k=\overline{1,K}, K=4$.

В точках оптимума $X_k^0, k=\overline{1,K}$ все относительные оценки равны нулю:

$\lambda_k(X_k^0)=\frac{f_k\,(X_k^0)-f_k^0}{f_k^*-f_k^0}=0, k=\overline{1,K}, K=4$.

Отсюда $\forall k\in\boldsymbol{K}, \forall X\in\boldsymbol{S}, 0\le\lambda_k\,(X)\le1$.

*Шаг 4*. Строится λ-задача.

$$\lambda^o=\boldsymbol{max}_{\boldsymbol{X\in S}}\,\lambda, \tag{70}$$

При ограничениях: $\lambda-\frac{f_1\,(X)-f_1^0}{f_1^*-f_1^0}\le0,\ \lambda-\frac{f_2\,(X)-f_2^0}{f_2^*-f_2^0}\le0,\ \lambda-\frac{f_3\,(X)-f_3^0}{f_3^*-f_3^0}\le0, \lambda-\frac{f_4\,(X)-f_4^0}{f_4^*-f_4^0}\le0$,

$0\le x_1\le100,\ 0\le x_2\le100$.

*Шаг 5*. Решение λ-задачи. Результаты решения λ-задачи:

$\boldsymbol{X^o}=\{x_1=50.0, x_2=50.0, x_3=0.8594\}$**.**

Xo= {$x_1$=50.0, $x_2$= 50.0, $x_3$=0.8594} – точка оптимума, где

$x_3=\lambda^o$; а $x_1, x_2$ соответствует $x_1$, $x_2$ задачи (41)- (45);

Lo = $\lambda^o$= 0.8594 представляет оптимальное значение целевой функции.

Функции $\lambda_1\,(X), \lambda_2\,(X), \lambda_3\,(X), \lambda_4\,(X)$, а также точки оптимума $X^o$ и $\lambda^o$, которые получены на пересечении, в трех мерной системе координат $x_1, x_2, \lambda$ показаны на рис. 4.

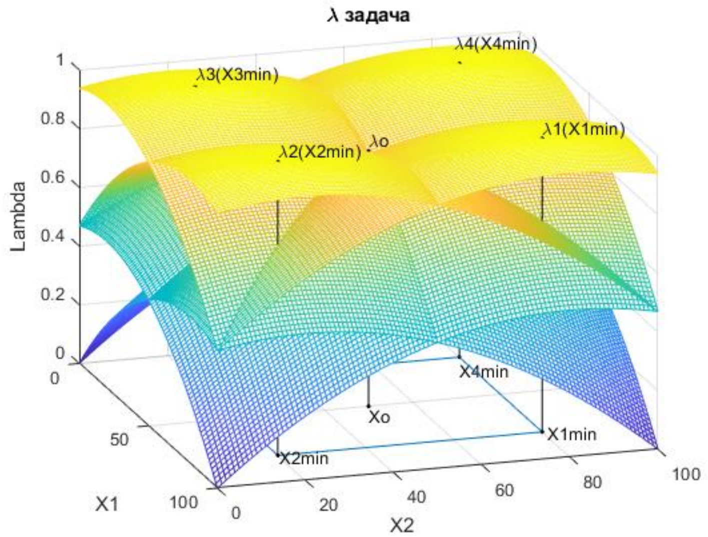


Рис. 4. Результаты решения ВЗМП (65)- (69) и (70): Функции $\lambda_1\,(X), \lambda_2\,(X), \lambda_3\,(X), \lambda_4\,(X)$, точки оптимума $X^o$ и $\lambda^o$.

На рис. 3, 4 видно, что область (множество точек) ограниченная функцией f1$f1=(x_1-80)^2+\ (x_2-80)^2$ – характеризуется тем, что $\lambda_1(X)\ge\lambda_k(X), k=\overline{2,4}$, $X\in\boldsymbol{S_1}$, (на рис. 3 показано, как λ1>λ2, λ3, λ4), т. е. область $\boldsymbol{S_1}$ приоритетна по первому критерию. В этой области приоритет первого критерия относительно остальных всегда больше или равен единице:

$$p_k^1(X)=\lambda_1\,(X)/\lambda_k\,(X)\ge1, \forall X\in\boldsymbol{S_1}.$$

Аналогично показаны области (множества точек) приоритетные по соответствующему критерию, в совокупности они дают множество точек, оптимальных по Парето, $\boldsymbol{S^o}$, а оно (для данного примера) равно множеству допустимых точек: $\boldsymbol{S^o} = \boldsymbol{S_1^o} \cup \boldsymbol{S_2^o} \cup \boldsymbol{S_3^o} \cup \boldsymbol{S_4^o} \cup X^o = \boldsymbol{S}$.

Таким образом, векторная оптимизация является математическим аппаратом исследования аксиом в различных системах.

7. Исследования и методы принятия управленческого решения при переходе из условий неопределенности в условия определенности в векторной оптимизации

Условия определенности характеризуются тем, что известна функциональная зависимость каждого критерия и ограничений от параметров исследуемой системы. Условия неопределенности характеризуются тем, что отсутствует достаточная информация о функциональной зависимости каждой характеристики и ограничений от параметров системы. Как правило, условия неопределенности наиболее частая ситуация в задачах проектирования инженерных систем. Для решения задач многомерной оптимизации необходимо знание функциональной зависимости критериев от параметров. На решение этих проблем и разработки методов принятия управленческого решения при переходе из условий неопределенности в условия определенности в векторной оптимизации направлен данный раздел.

***7.1. «Объект для принятия решения» в условиях определенности и неопределенности***

Объектом для принятия решения может быть: политическая, экономическая или техническая система. Каждый Объект для принятия решения имеет некоторый набор параметров $\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{x_j}, \boldsymbol{j} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{N}}\right\}$, где системы $\boldsymbol{N}$ множество параметров. Функционирование Объекта характеризуется некоторым набором показателей, которые функционально зависят от параметров: $\boldsymbol{f_k}(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{k} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{K}}$, где системы $K$ множество показателей. Параметры $\boldsymbol{X}$ и показатели $\boldsymbol{f_k}(\boldsymbol{X})$ могут быть определены (например, в числовом виде) или неопределенны (например, в виде словесного выражения). Отсюда принятие решений может осуществляться в условиях определенности и условиях неопределенности, (что чаще всего и бывает).

*Условия определенности* характеризуются тем, что известна функциональная зависимость каждого критерия $\boldsymbol{f_k}(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{k} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{K}}$ и ограничений $\boldsymbol{G}\,(\boldsymbol{X})$ от параметров системы $\boldsymbol{x_j}, \boldsymbol{j} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{N}}$, [20], т. е. бесконечному множеству параметров $\boldsymbol{X}$ соответствует бесконечное множество оценок функции (критерия) $\boldsymbol{f_k}(\boldsymbol{X})$;

*в условиях неопределенности* известна лишь конечное множество параметров $\boldsymbol{X}$ и соответствующее множество оценок функции (критерия) $\boldsymbol{f_k}(\boldsymbol{X})$, т.е. чем меньше множество параметров, тем выше неопределенность.

*Первый аспект* определяется тем, что отсутствует достаточная информация о функциональной зависимости характеристики $\boldsymbol{f_k}(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{k} \in \boldsymbol{K}$, ограничений $\boldsymbol{g_i}(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{M}$ от параметров $\boldsymbol{X}$ исследуемого объекта. В этом случае исходные данные, характеризующий объект, представлены:

а) случайными данными;

б) нечеткими данными;

в) не полными данными, которые, как правило, получены из экспериментальных данных. Для вариантов, а) и б) исходные данные должны быть преобразованы к варианту в) и представлены в виде таблицы: 1 графа – величина параметра, 2 графа – величина характеристики.

Начальный этап – это преобразование случайных и нечетких данных в четные данные. (*Заметем*, что если проводить исследование с нечеткими данными, то и результат решения будет нечеткий, вряд ли пригодный к использованию).

Методология преобразования случайных и нечетких данных в табличную форму достаточно широко представлена в журнале: "Fuzzy Decision Making and Soft Computing Applications". Табличные (экспериментальные) данные, используя регрессионный анализ, преобразуются в функцию $\boldsymbol{f(X)}$, т.е. в условия определенности.

В дальнейшем в работе рассматривается только вариант в) и его преобразования регрессионными методами в условия определенности – в функцию $\boldsymbol{f(X)}$.

*Второй аспект* неопределенности принятия решений связан тем, что объект характеризуется множеством характеристик: $\boldsymbol{f_1(X), \ldots, f_K(X)}$ или $\boldsymbol{f_k(X), k = \overline{1, K}}$. Множество характеристик *K* подразделяется на два подмножества $\boldsymbol{K_1}$ и $\boldsymbol{K_2}$. Подмножество характеристик $\boldsymbol{K_1}$ по своей числовой величине желательно получить как можно выше (max), а подмножество характеристик $\boldsymbol{K_2}$ желательно получить как можно ниже (min).

***7.2. Концептуальная современная постановка задачи принятия решений в условиях неопределенности***

Первоначально в общем виде концептуальная постановка задачи принятия решений выполнена в работе R. L. Keeney and H. Raiffa [24, стр. 79], в соответствии с которой введем обозначения:

$\boldsymbol{a_i, i = \overline{1, M}}$ – допустимые альтернативы принятия решений;

$\boldsymbol{A = (a_1\, a_2, \ldots, a_M)^T}$ – вектор множества допустимых альтернатив.

Каждой альтернативе $\boldsymbol{a \in A}$ поставим в соответствие $\boldsymbol{K}$ числовых показателей (критериев): $\boldsymbol{f_1(a), \ldots, f_K(a)}$, характеризующих систему. Можем считать, что это множество показателей отображают каждую альтернативу в точку *К*-мерного пространства исходов (последствий) принимаемых действий: $\boldsymbol{F(a) = \{f_1(a), f_2(a), \ldots, f_K(a)\}^T}$. Будем использовать один и тот же символ $\boldsymbol{f_k(a)}$, как для критерия, так и для функции оценки по этому критерию.

Заметим, что в любой точке $\boldsymbol{f_k(a)}$ *К* – мерного пространства последствий мы не можем непосредственно сравнивать величины $\boldsymbol{f_v(a)}$ и $\boldsymbol{f_k(a), v \neq k}$, ибо в большинстве случаев это было бы просто бессмысленно, т.к. эти критерии как правило измеряются в различных единицах.

Используя эти данные, можно сформулировать задачу принятия решений.

*Задача лица, принимающего решение*, состоит в выборе такой альтернативы $\boldsymbol{a \in A}$, которая позволила бы получить в наибольшей мере устраивающий его результат, т. е. $\boldsymbol{F(a) \to min}$.

Из этого определения вытекает, что нам нужна такая функция оценки, которая бы сводила вектор $\boldsymbol{F(a)}$ в скалярный критерий предпочтительности или «ценности». В другой формулировке это равносильно заданию скалярной функции $\boldsymbol{V}$, определенной в пространства последствий и обладающей следующим свойством:

$$\boldsymbol{V\,(F(a)) \geq V\,(F(a')) \Leftrightarrow F(a) \gg F\,(a')},$$

где символ ≫ означает «не менее предпочтителен, чем» [20]. Назовем функцию $\boldsymbol{V\,(F(a))}$ *функцией ценности*. В литературе эта функция носит много других названий – порядковая функция полезности, функция предпочтения или функция полезности. Тогда задача лица, принимающего решение, сводится к выбору такого $\boldsymbol{a \in A}$, которое максимизирует $\boldsymbol{V\,(F(a))}$. Функция ценности служит для косвенного сопоставления важности тех или иных значений различных критериев системы.

С учетом сказанного матрица $\boldsymbol{F(a)}$ допустимых исходов альтернатив примет вид:

$$\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1}\, \boldsymbol{f_1^1}, \dots, \boldsymbol{f_1^K} \\ \dots \\ \boldsymbol{a_M}\, \boldsymbol{f_M^1}, \dots, \boldsymbol{f_M^K} \end{vmatrix}, \qquad (71)$$

где $\boldsymbol{f_i^k} = \boldsymbol{f_k}\,(\boldsymbol{a_i}), \boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{M}}, \boldsymbol{k} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{K}}$, в ней все альтернативы представлены вектором показателей $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})$. Для определённости без ограничения общности примем, что первый критерий (а им может быть любой) отсортирован по возрастанию (по убыванию) и после этого альтернативы пронумерованы $\boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{M}}$.

*Задача 1 вида* лица, принимающего решение, состоит в выборе такой альтернативы $\boldsymbol{a^o} \in \boldsymbol{A}$ (71), которая позволила бы получить «в наибольшей мере устраивающий его (оптимальный) результат» [21].

Для технической системы каждая альтернатива $\boldsymbol{a_i}$ может быть представлена $N$-мерным вектором $\boldsymbol{X_i} = \{\{\boldsymbol{x_{ij}}, \boldsymbol{j} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{N}}\}, \boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{M}}\}$ параметров, а её исходы – $K$-мерным векторным критерием $\{\boldsymbol{f_1}\,(\boldsymbol{X_i}), \dots, \boldsymbol{f_K}\,(\boldsymbol{X_i})\}, \boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{M}}$. С учетом этого матрица исходов (2.1) принимает вид:

$$\boldsymbol{I} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{X_1}\, \boldsymbol{f_1}\,(\boldsymbol{X_1}), \dots, \boldsymbol{f_K}\,(\boldsymbol{X_1}) \\ \dots \\ \boldsymbol{X_M}\, \boldsymbol{f_1}\,(\boldsymbol{X_M}), \dots, \boldsymbol{f_K}\,(\boldsymbol{X_M}) \end{vmatrix}. \qquad (72)$$

По сравнению с ней в матрице (71) количество параметров $N$ =1, т. е. значениями единственного параметра являются сами альтернативы.

*Задача 2* (72) лица, принимающего решение, состоит в выборе такого набора конструктивных параметров системы $\boldsymbol{X^o} = \{\{\boldsymbol{x_{ij}}, \boldsymbol{j} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{N}}\}, \boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{M}}\}$, который позволил бы получить оптимальный_результат [20].

***7.3. Анализ современных методов принятия решений по экспериментальным данным***

В настоящее время для решения задач (71) и (72) используется ряд «простых» методов, базирующихся на формировании специальных критериев, к которым относятся критерии Вальда, Сэвиджа, Гурвица, Байеса-Лапласа – они являются основой для принятия решений.

*Критерий Вальда* максимизации минимальной компоненты направлен на выбор оптимального решения, гарантирующего максимальный выигрыш среди минимальных:

$max_{\,k=\overline{1,K}} min_{\,i=\overline{1,M}}\, f_i^k$.

*Критерий Сэвиджа* минимального риска в качестве оптимальной выбирает такую стратегию, при которой величина риска $r_i^k$ принимает наименьшее значение среди максимальных значений рисков по столбцам:

$min_{\,i=\overline{1,M}} max_{\,k=\overline{1,K}}\, r_i^k$.

Сама величина риска $r_i^k$ выбирается из минимальной разности между решением, приносящим максимальный доход: $max_{\,i=\overline{1,M}}\, f_i^k, k = \overline{1,K}$, и текущим значением $f_i^k$, $r_i^k = (max_{\,i=\overline{1,M}}\, f_i^k - f_i^k)$, а их набор представляет матрицу рисков $R = \|r_i^k\|_{i=\overline{1,M}}^{k=\overline{1,K}}$.

*Критерий Гурвица* позволяет выбрать стратегию, занимающую некоторое промежуточное положение между крайним пессимизмом и оптимизмом (т. е. наиболее значительным риском):

$max_{\,k=\overline{1,K}}\, (\alpha\, min_{\,i=\overline{1,M}}\, f_i^k - (1-\alpha) max_{\,i=\overline{1,M}}\, f_i^k)$,

где $\alpha$ – коэффициент пессимизма, выбираемый в интервале $0 \le \alpha \le 1$.

*Критерий Байеса-Лапласа* учитывает каждое из возможных следствий всех вариантов решений с учетом их вероятностей $p_i$:

$$max_{i=\overline{1,M}} \sum_{k-1}^{K} f_i^k p_i,$$

Все эти методы и другие достаточно широко представлены в литературе по принятию решений [7, 13, 20]. Всем им присущи определенные недостатки.

Например, при анализе критерия максимина Вальда выясняется, что по условию задачи все критерии выполнены в различных единицах. Отсюда первый шаг – выбор минимальной компоненты $f_k^{min}\, min_{i=\overline{1,M}} f_i^k$ вполне разумен, при этом все $f_k^{min}, k = \overline{1,K}$ измерены в различных единицах, поэтому второй шаг – максимизации минимальной компоненты $max_{k=\overline{1,K}} f_k^{min}$ не имеет смысла. Несколько приближает к решению проблемы использование шкалы измерения критериев, но в целом её не решает, так как выбранные шкалы критериев субъективны.

По нашему мнению, для решения проблемы (69) и (70) необходимо создание меры, позволяющей дать оценку любого принимаемого решения, в том числе и оптимального. Другими словами, необходимо построение *аксиоматики*, показывающей, исходя из набора $K$ критериев, в чем одна альтернатива лучше другой. Из аксиоматики в свою очередь можно вывести принцип, определяющий оптимальность выбранной альтернативы. А принцип оптимальности должен лечь в основу конструктивных методов выбора оптимальных решений. Такой подход предложен для решения векторной задачи математического программирования, которая по своей сути близка к задаче принятия решений в (69) и (70).

***7.4. Преобразование задачи принятия решения в векторную задачу***

Для этого сравним задачи принятия решения (ЗПР) (71) и (72) с векторной задачей математического программирования (ВЗМП). Заметим, что задача (71) является частным случаем задачи (72).

Результаты сравнения изложены в табл. 1.

Таблица 1.

Сравнение ВЗМП с задачами принятия решений (ЗПР)

| ВЗМП – (1)– (4) | ЗПР – (72) |
|---|---|
| 2. Общая цель: Принятие наилучшего решения | |
| 3. Определить вектор $X$ из допустимого множества (3)- (4), в которой векторный критерий $F$ ($X$) (1) оптимален. | 3. Цель: определить векторную альтернативу $\boldsymbol{X_i} = \{\boldsymbol{x_{ij}}, \boldsymbol{j} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{N}}\}$ из множества альтернатив $\boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{M}}$, в которой векторный критерий $\boldsymbol{f_k}\ (\boldsymbol{X_i}), \boldsymbol{k} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{K}}$ оптимален. |
| 4. Полностью определены вектор параметров $X$ и функциональная зависимость от него критериев $F$ ($X$), множество допустимых точек бесконечно, задано неравенствами $\boldsymbol{G}\ (\boldsymbol{X}) \leq \boldsymbol{B}, \boldsymbol{X} \geq \boldsymbol{0}$, (3)-(4) | 4. Параметры определены, а критерии представлены в виде отдельных значений, так что функциональная взаимосвязь между ними не определена, множество допустимых точек конечно и равно: $\boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{M}}$.. |

| | |
|---|---|
| $Opt\ F(X) =$ $\{\max F_1(X) = \{\max f_k\,(X), k = \overline{1, K_1}\}$, (1a) $\min F_2(X) = \{\min f_k\,(X), k = \overline{1, K_2}\}\}$, (2a) $G\,(X) \leq B$, (3a) $X \geq 0$, (4a) | 5. Преобразование задачи принятия решений в ВЗМП. Каждый $k$-й $\boldsymbol{k = \overline{1, K}}$ набор значений критериев $\boldsymbol{f_i^k, i = \overline{1, M}, \forall k \in K}$, используя множественную регрессию, преобразуем в критериальную функцию $\boldsymbol{f_k(X), \forall k \in K}$. |
| 6. ↑ Задачи (1a)- (4a) и (1b)- (3b) Эквивалентны → | 6. $Opt\ F(X) = \{f_1(X), \dots, f_K(X)\}^T$ (1b) $f_k^{min} \leq f_k\,(X) \leq f_k^{max}, k = \overline{1, K}$, (2b) $\boldsymbol{X^{min} \leq X \leq X^{max}}$. (3b) |

Из первой и второй графы видно, что для всех задач цель «Принятие наилучшего (оптимального) решения» – общая. Для задачи принятия решений обоих видов (строка 4) имеется некоторая неопределенность – не известны функциональные зависимости критериев и ограничений от параметров задачи. В настоящее время разработано множество математических методов регрессионного анализа, которые доведены до программного обеспечения (например, система MATLAB) и позволяют по некоторому набору исходных данных (70) построить функциональные зависимости $\boldsymbol{f_k\,(X), k = \overline{1, K}}$. Поэтому для построения критериев и ограничений в задачах принятия решений обоих видов (строка 5) используем регрессионные методы, в т.ч. множественной регрессии [13]. Объединяя критерии и ограничения, представим задачи принятия решений обоих видов в виде векторной задачи математического программирования (строка 6).

Выполним эти преобразования. Каждый $k$-й столбец матрицы $\boldsymbol{I}$, используя методы регрессионного анализа для задачи (69) и множественную регрессию для задачи (70), преобразуем в критериальную функцию $\boldsymbol{f_k\,(X)}$. Всех их соберём в вектор-функцию $F\,(X)$:

$\boldsymbol{\max F_1(X) = \{\max f_k\,(X), k = \overline{1, K_1}\}}$ в (1b);

$\boldsymbol{\min F_2(X) = \{\min f_k\,(X), k = \overline{1, K_2}}$ в (1b).

Функциональными ограничениями $\boldsymbol{f_k^{min} \leq f_k\,(X) \leq f_k^{max}, k = \overline{1, K}}$, (2b)

где $\boldsymbol{f_k^{min} = \min_{i=\overline{1,M}} f_i^k\,(X_i)}$, $\boldsymbol{f_k^{max} = \max_{i=\overline{1,M}} f_i^k\,(X_i)}$ – минимальные и максимальные значения каждой функции, а параметры ограничены минимальными и максимальными величинами каждого них (1b).

В результате получим ВЗМП (1b)- (3b) аналогичную задачи (1a)- (4a), для решения которой при равнозначных критериях используем та же аксиоматика, тот же принцип оптимальности и те же методы, основанные на нормализации критериев и принципе максимина, как и для модели технической системы в условиях полной определенности.

***7.5. Векторная задача математического программирования с условиями определенности и неопределенности***

Представим задачу векторной оптимизации с условиями определенности и неопределенности.

*Условия определенности* характеризуются тем, что известна функциональная зависимость каждой характеристики и ограничений от параметров исследуемого объекта, [7-19].

*Условия неопределенности* характеризуются тем, что исходные данные, характеризующие исследуемого объекта, представлены: а) случайными, б) нечеткими, или, в) не полными данными.

Поэтому у нас отсутствует достаточная информация о функциональной зависимости каждой характеристики и ограничений от параметров [8-20].

В реальной жизни условия определенности и неопределенности совмещаются. Модель технологического процесса так же должна отражать эти условия. Мы представим модель технологического процесса в условиях определенности и неопределенности в совокупности:

$$Opt\ F\ (X)\ =\ \{\max F_1(X) = \{\max f_k\ (X), k = \overline{1, K_1^{def}}\},\tag{73}$$

$$\max I_1(X) \equiv \{\max f_k\ \ (X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\},$$

$$\min F_2(X) = \{\min f_k\ (X), k = \overline{1, K_2^{def}},$$

$$\min I_2(X) \equiv \{\min f_k\ \ (X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}\},\tag{74}$$

$$\text{at restriction}\ \ f_k^{min}\ \le\ f_k(X) \le f_k^{max}, k = \overline{1, K},\tag{75}$$

$$x_j^{min} \le x_j \le\ x_j^{max}, j = \overline{1, N},\tag{76}$$

где $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ – вектор управляемых переменных (входных параметров исследуемого объекта);

$F(X) = \{F_1(X)\ F_2(X)\ I_1(X)\ I_2(X)\}$ – векторный критерий, каждая компонента которого представляет вектор критериев (выходных характеристик исследуемого объекта). Величина характеристики (функции) зависит от дискретных значений вектора переменных $X$. $F_1(X)\ F_2(X)$ – множество функций *max* и *min* соответственно; $I_1(X)\ I_2(X)$ множество дискретных значений характеристик *max* и *min* соответственно; $\overline{1, K_1^{def}}, \overline{1, K_2^{def}}$ (*definiteness*), $\overline{1, K_1^{unc}}, \overline{1, K_2^{unc}}$ (*uncertainty*) множество критериев *max* и *min* сформированные в условиях определенности и неопределенности; в (73)- (74), $f_k^{min}\ \le\ f_k(X) \le f_k^{max}, k = \overline{1, K}$ – вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование исследуемого объекта, $x_j^{min} \le x_j \le x_j^{max}, j = \overline{1, N}$ – параметрические ограничения накладываемые на исследуемый объект.

***7.6. Преобразование задачи принятия решения в условиях неопределенности в задачу векторной оптимизации в условиях определенности***

Устранение неопределенности состоит в использовании качественных и количественных описаний исследуемого объекта, которые могут быть получены, например, по принципу "вход-выход". Преобразования такой информации – исходных данных в функциональную зависимость осуществляется путем использования математических методов (регрессионного анализа), [9-19].

Преобразование вектор – функции (критериев) осуществляется по методу наименьших квадратов: $\min \sum_{i=1}^{M}\ (y_i - \overline{y}_i)^2$,

где $y_i, i = \overline{1, M}$ – реально наблюдаемые величины; $\overline{y}_i, i = \overline{1, M}$ их оценки, полученные для однофакторной модели с помощью функции $\overline{y}_i = f(X_i, A), X_i = \{x_i\}$ . Функцию $f(X_i, A)$ представили в виде полинома. В прикладной части работы используется полином второй степени.

В результате такого преобразования исходные данные в (73) и (74):

$\{f_k\ (X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}$, $\{f_k\ (X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_2^{unc}}$

в задачах принятия решения в условиях неопределенности преобразованы функции:

$f_k\ (X), k = \overline{1, K_1^{unc}}$, $\{f_k\ (X), k = \overline{1, K_2^{unc}}$

В итоге векторная задача с условиями определенности и неопределенности (73)- (76) преобразуется в векторную задачу в условиях определенности:

$$Opt\ F(X) = \{\max F_1(X) = \{\max f_k\ (X). k = \overline{1, K_1}\},\tag{77}$$

$$\min F_2(X) = \{\min f_k\ (X). k = \overline{1, K_2}\}\},\tag{78}$$

$$\text{at restriction } f_k^{min} \le f_k(X) \le f_k^{max}, k = \overline{1,K}, \quad (79)$$

$$x_j^{min} \le x_j \le x_j^{max}, j = \overline{1,N}, \quad (80)$$

где $F(X) = \{f_k, k = \overline{1,K}$ – векторный критерий, каждая компонента которого представляет характеристику объекта, функционально зависящую от вектора переменных $X$; подмножество критериев в условиях определенности $K_1 = K_1^{def} \cup K_1^{unc}$, и неопределенности $K_2 = K_2^{def} \cup K_2^{unc}$.

Векторная задача математического программирования (77)- (80) является аналогом ВЗМП (1)- (4).

***7.7. Методология выбора оптимальных параметров инженерных систем в условиях определенности и неопределенности на основе векторной оптимизации***

В качестве объекта исследования нами рассматриваются «Инженерные системы», к которым относятся «технические системы», «технологические процессы», «материалы», [17, 18, 19]. Исследование инженерной системы выполнено, во-первых, в условиях определенности, когда известны данные о функциональных характеристиках инженерной системы; во-вторых, в условиях неопределенности, когда известны дискретные значения отдельных характеристик; также известны данные об ограничениях, которые накладываются на функционирование системы. Математический аппарат моделирования инженерной системы базируется на теории и методах векторной оптимизации, которые представлены в третьем разделе. В организационном плане процесс моделирования и симулирования технической системы представлен в виде методологии: «Методология выбора оптимальных параметров инженерных систем в условиях определенности и неопределенности».

Методология включает ряд этапов.

1. Формирование технического задания (исходных данных) на численное моделирование и выбора оптимальных параметров системы. Исходные данные формирует конструктор, который проектирует техническую систему**.**

2. Построение математической и численной модели технической системы в условиях определенности и неопределенности.

3. Решение векторной задачи математического программирования (ВЗМП) – модели инженерной системы при равнозначных критериях.

4. Построение геометрической интерпретации результатов решения в трех мерной системе координат в относительных единицах.

5. Решение векторной задачи математического программирования – модели инженерной системы при заданном приоритете критерия.

6. Геометрическая интерпретация результатов решения в трехмерной системе координат в физических единицах.

**8. Моделирование структуры материала с четырьмя параметрами и принятие оптимального решения по численному множеству критериев**

***8.1. Моделирование и принятие оптимального решения по числовому множеству критериев структуры материала с четырьмя параметрами***

В качестве объекта исследования нами рассматриваются «Инженерные системы», к которым относятся «структура материала», [18, 20-26]. Структура материала рассматривается с четырьмя параметрами и четырьмя характеристиками. Экспериментальные данные структуры материала представим в виде задачи принятия решений второго вида (70):

$$F = \left| \begin{matrix} x_{1,1}\ x_{2,1}\ x_{3,1}\ x_{4,1}\ f_1^1, \dots, f_1^K \\ \dots \\ x_{1,M}\ \ x_{2,M}\ \ x_{3,M}\ x_{4,M}\ f_M^1, \dots, f_M^K \end{matrix} \right| \text{– problem of 2-type, } K = 4.$$

Исследование инженерной системы (структура материала) выполнено:

во-первых, в условиях определенности, когда известны данные о функциональных характеристиках инженерной системы;

во-вторых, в условиях неопределенности, когда известны дискретные значения отдельных характеристик; также известны данные об ограничениях, которые накладываются на функционирование системы (структура материала).

Используя регрессионный анализ экспериментальные данные $F$ преобразуются в векторную задачу математического программирования:

$max\ f_k(X,A) = a_{0k} + a_{1k}x_1 + a_{2k}x_2 + a_{3k}x_3 + a_{4k}x_4 + a_{5k}x_1x_2 + a_{6k}x_1x_3 + a_{7k}x_1x_4 + a_{8k}x_2x_3 + a_{9k}x_2x_4 + a_{10k}x_3x_4 + a_{11k}x_1^2 + a_{12k}x_2^2 + a_{13k}x_2^2 + a_{14k}x_2^2, k = \overline{1,\ K_1}.$

$min\ f_k(X,A) = a_{0k} + a_{1k}x_1 + a_{2k}x_2 + a_{3k}x_3 + a_{4k}x_4 + a_{5k}x_1x_2 + a_{6k}x_1x_3 + a_{7k}x_1x_4 + a_{8k}x_2x_3 + a_{9k}x_2x_4 + a_{10k}x_3x_4 + a_{11k}x_1^2 + a_{12k}x_2^2 + a_{13k}x_2^2 + a_{14k}x_2^2, k = \overline{1,\ K_2}.$

При ограничениях $x_1^0 \le x_1 \le x_1^*, x_2^0 \le x_2 \le x_2^*, x_3^0 \le x_3 \le x_3^*, x_4^0 \le x_4 \le x_4^*.$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100.$

Математический аппарат моделирования инженерной системы базируется на теории и методах векторной оптимизации, которые представлены в предыдущих главах.

В организационном плане процесс моделирования и симулирования инженерной системы представлен в виде методологии: «Методология выбора оптимальных параметров инженерных систем (структура материала) в условиях определенности и неопределенности», представленной в разделе 7.7.

**8.2. Этап 1. Разработка технического задания (исходных данных) для исследования и выбора структуры материала**

***Дано***. Мы исследуем структуру материала. Состав структуры материала определяется четырьмя компонентами:

$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, которые представляют вектор управляемых переменных.

Параметры структуры материала заданы в следующих пределах:

$$21 \le y_1 \le 79;\ 5 \le y_2 \le 59;\ 2.1 \le y_3 \le 9.0;\ 2.2 \le y_4 \le 7.0. \qquad (81)$$

Качество состава структуры материала определяются четырьмя характеристиками:

$H(Y) = \{h_1(Y), h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)\}$, величина оценки которых зависит от вектора параметров $Y = \{y_j, j = \overline{1, N}, N = 4\}$.

*Условия определенности*. Они характеризуются тем, что для первой характеристики $h_1(Y)$ известна функциональная зависимость от параметров $Y = \{y_j, j = \overline{1, N}, N = 4\}$.

$h_1(Y) = 323.84 - 2.249y_1 - 3.49y_2 + 10.7267y_3 + 13.124y_4 + 0.0968y_1y_2 - 0.062y_1y_3 - 0.169y_1y_4 + 0.0743y_2y_3 - 0.1042y_2y_4 - 0.0036y_3y_4 + 0.0143y_1^2 + 0.0118y_2^2 - 0.2434y_3^2 - 0.5026x_4^2,$ (82)

*Условия неопределенности*. Они характеризуются тем, что для второй, третьей и четвертой характеристики: $h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)$ известны результаты экспериментальных данных: величины параметров и соответствующих характеристик.

Числовые значения параметров $Y$ и характеристик $h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)$ представлены в таблице 2.

**Таблица 2.**

Числовые значения параметров и характеристик материала

| $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $h_2$ (Y) | $h_3$ (Y) | $h_4$ (Y) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 0 | 2 | 2 | 1149.6 | 115.1 | 24.24 |
| 20 | 0 | 2 | 5 | 1164.0 | 114.5 | 27.60 |
| 20 | 0 | 2 | 8 | 1176.0 | 114.4 | 28.80 |
| 20 | 0 | 5 | 2 | 1212.0 | 118.8 | 30.00 |
| 20 | 0 | 5 | 5 | 1260.0 | 113.8 | 31.20 |
| 20 | 0 | 5 | 8 | 1257.6 | 113.3 | 32.40 |
| 20 | 0 | 8 | 2 | 1256.4 | 110.7 | 33.60 |
| 20 | 0 | 8 | 5 | 1252.8 | 109.2 | 34.80 |
| 20 | 0 | 8 | 8 | 1251.6 | 108.5 | 34.80 |
| 20 | 30 | 2 | 2 | 2143.2 | 128.3 | 19.92 |
| 20 | 30 | 2 | 5 | 2154.0 | 127.4 | 21.60 |
| 20 | 30 | 2 | 8 | 2163.6 | 126.8 | 25.20 |
| 20 | 30 | 5 | 2 | 2176.8 | 126.1 | 29.76 |
| 20 | 30 | 5 | 5 | 2185.2 | 124.3 | 33.48 |
| 20 | 30 | 5 | 8 | 2198.4 | 124.1 | 37.20 |
| 20 | 30 | 8 | 2 | 2211.6 | 123.9 | 39.48 |
| 20 | 30 | 8 | 5 | 2232.0 | 121.4 | 42.00 |
| 20 | 30 | 8 | 8 | 2245.2 | 121.7 | 49.20 |
| 20 | 60 | 2 | 2 | 2954.4 | 150.4 | 15.60 |
| 20 | 60 | 2 | 5 | 2820.0 | 144.9 | 18.00 |
| 20 | 60 | 2 | 8 | 2772.0 | 140.8 | 21.60 |
| 20 | 60 | 5 | 2 | 2748.0 | 138.6 | 24.24 |
| 20 | 60 | 5 | 5 | 2832.0 | 140.8 | 28.80 |
| 20 | 60 | 5 | 8 | 2904.0 | 143.5 | 32.40 |
| 20 | 60 | 8 | 2 | 3022.8 | 146.0 | 35.16 |
| 20 | 60 | 8 | 5 | 3036.0 | 144.9 | 39.60 |
| 20 | 60 | 8 | 8 | 3056.4 | 143.8 | 44.88 |
| 50 | 0 | 2 | 2 | 3583.2 | 181.3 | 11.28 |
| 50 | 0 | 2 | 5 | 3601.2 | 180.8 | 14.40 |
| 50 | 0 | 2 | 8 | 3608.4 | 179.4 | 16.80 |
| 50 | 0 | 5 | 2 | 3616.8 | 179.1 | 21.12 |
| 50 | 0 | 5 | 5 | 3622.8 | 178.0 | 22.80 |
| 50 | 0 | 5 | 8 | 3637.2 | 177.6 | 27.60 |
| 50 | 0 | 8 | 2 | 3651.6 | 176.9 | 30.84 |
| 50 | 0 | 8 | 5 | 3672.0 | 175.3 | 36.00 |
| 50 | 0 | 8 | 8 | 36852 | 174.7 | 40.56 |
| 50 | 30 | 2 | 2 | 1195.2 | 123.6 | 52.80 |
| 50 | 30 | 2 | 5 | 1212.0 | 118.7 | 60.00 |
| 50 | 30 | 2 | 8 | 1236.0 | 115.9 | 64.80 |
| 50 | 30 | 5 | 2 | 1251.6 | 115.1 | 68.64 |
| 50 | 30 | 5 | 5 | 1272.0 | 113.2 | 75.60 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 50 | 30 | 5 | 8 | 1296.0 | 111.8 | 82.80 |
| 50 | 30 | 8 | 2 | 1318.8 | 110.7 | 88.08 |
| 50 | 30 | 8 | 5 | 1344.0 | 108.2 | 97.20 |
| 50 | 30 | 8 | 8 | 1388.4 | 106.3 | 107.64 |
| 50 | 60 | 2 | 2 | 2176.8 | 132.8 | 40.56 |
| 50 | 60 | 2 | 5 | 2196.0 | 131.1 | 45.60 |
| 50 | 60 | 2 | 8 | 2220.0 | 129.7 | 52.80 |
| 50 | 60 | 5 | 2 | 2245.2 | 128.3 | 60.00 |
| 50 | 60 | 5 | 5 | 2286.0 | 127.0 | 67.20 |
| 50 | 60 | 5 | 8 | 2294.4 | 125.6 | 73.20 |
| 50 | 60 | 8 | 2 | 2313.6 | 123.9 | 79.44 |
| 50 | 60 | 8 | 5 | 2340.0 | 114.5 | 85.20 |
| 50 | 60 | 8 | 8 | 2382.0 | 119.5 | 99.00 |
| 80 | 0 | 2 | 2 | 2988.0 | 154.8 | 31.92 |
| 80 | 0 | 2 | 5 | 3012.0 | 153.2 | 36.00 |
| 80 | 0 | 2 | 8 | 3036.0 | 151.8 | 43.20 |
| 80 | 0 | 5 | 2 | 3056.4 | 150.4 | 51.36 |
| 80 | 0 | 5 | 5 | 3108.0 | 150.7 | 61.20 |
| 80 | 0 | 5 | 8 | 3156.0 | 151.2 | 72.00 |
| 80 | 0 | 8 | 2 | 3244.8 | 151.5 | 82.80 |
| 80 | 0 | 8 | 5 | 3228.0 | 144.9 | 86.40 |
| 80 | 0 | 8 | 8 | 3193.2 | 140.8 | 90.36 |
| 80 | 30 | 2 | 2 | 3616.8 | 185.7 | 23.28 |
| 80 | 30 | 2 | 5 | 3639.6 | 183.5 | 30.00 |
| 80 | 30 | 2 | 8 | 3660.0 | 182.2 | 36.00 |
| 80 | 30 | 5 | 2 | 3685.2 | 181.3 | 42.72 |
| 80 | 30 | 5 | 5 | 3708.0 | 179.4 | 48.00 |
| 80 | 30 | 5 | 8 | 3732.0 | 178.0 | 54.00 |
| 80 | 30 | 8 | 2 | 3753.6 | 176.9 | 62.16 |
| 80 | 30 | 8 | 5 | 3672.0 | 175.3 | 73.20 |
| 80 | 30 | 8 | 8 | 3822.0 | 172.5 | 81.72 |
| 80 | 60 | 2 | 2 | 1218.0 | 128.3 | 87.00 |
| 80 | 60 | 2 | 5 | 1248.0 | 125.6 | 94.80 |
| 80 | 60 | 2 | 8 | 1272.0 | 124.2 | 103.20 |
| 80 | 60 | 5 | 2 | 1318.8 | 121.7 | 116.16 |
| 80 | 60 | 5 | 5 | 1344.0 | 118.7 | 126.00 |
| 80 | 60 | 5 | 8 | 1392.0 | 115.9 | 136.80 |
| 80 | 60 | 8 | 2 | 1422.0 | 115.1 | 145.44 |
| 80 | 60 | 8 | 5 | 1464.0 | 110.4 | 156.00 |
| 80 | 60 | 8 | 8 | 1524.0 | 108.5 | 174.72 |
| min $y_i$ $(X)$, $i$=1,…, 81 | | | | 1149.6 | 92.4 | 11.3 |
| max $y_i$ $(X)$, $i$=1,…, 81 | | | | 3822.0 | 161.5 | 174.7 |

На числовые значения параметров $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ наложены ограничения:

$$y_1 + y_2 + \ y_3, +y_4 = 100.$$

Величину оценки по первой и третьей характеристики (по критерию) желательно, получить как можно выше: $h_1(Y) \to max, h_3(Y) \to max$; второй и четвертой как можно ниже: $h_2(Y) \to min, h_4(Y) \to min$. Параметры (состав) материала:

$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ изменяются в следующих пределах:

$y_1 \in [20.0\ 50.0\ 80.0], y_2 \in [0.0\ 30.0\ 60.0], y_3 \in [2.0\ 5.0\ 8.0], y_4 \in\ [2.2\ 5.5\ 8.8]$. (83)

***Требуется.*** 1) Разработать математическую модель структуры исследуемого материала в виде векторной задачи математического программирования. 2) На основе разработанных методов решения ВЗНП построить программное обеспечение в системе MATLAB.

3) Решить векторную задачу с равнозначными критериями: выбрать оптимальную структуру материала. 4) Выбрать приоритетный критерий (третий). Установить численное значение приоритетного критерия: $h_3\ (X^q) = 80$. Принять наилучшее (оптимальное) решение с заданным приоритетом критерия.

*Примечание.* Автором разработано программное обеспечение в системе MATLAB для решения векторных задач математического программирования. Векторная задача включает четыре переменных (параметров технической системы): $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ и четырьмя критерия (характеристики)

$F(X) = \{f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)\}$. Но для каждых новых данных (новая система) программа настраивается индивидуально. В программном обеспечении критерии $F(X) = \{f_1(X), f_2(X), \dots, f_6(X)\}$ с условиями неопределенности (в таблице 1 они представлены как часть $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$) могут изменяться от нуля (т.е. все критерии построены в условиях определенности) до шести (т.е. все критерии построены в условиях неопределенности).

### 8.3. 2 этап. Построение математической и числовой модели материала в условиях определенности и неопределенности

#### *8.3.1. Формирование математической модели структуры материала*

Создание числовой модели материала включает следующие разделы: Выбор математической модели материала; Построение модели в условиях определенности; Построение в условиях неопределенности; Построение числовой модели материала в условиях определенности и неопределенности.

#### *8.3.2. Математическая модель структуры материала в условиях определенности*

Построение математической модели для принятия оптимального управленческого решения структуры материала показано в разделе 7.5. В соответствии с (73)- (78) представим математическую модель материала в условиях определенности и неопределенности в совокупности в виде векторной задачи:

$$Opt\ H\ (Y)\ =\ \{\max H_1(Y) = \{\max h_k\ (Y), k = \overline{1, K_1^{def}}\}, \tag{84}$$

$$\max I_1(Y) \equiv \{\max h_k\ \ (Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}, \tag{85}$$

$$\min H_2(Y) = \{\min h_k\ (X), k = 1, \overline{K_2^{def}}, \tag{86}$$

$$\min I_2(Y) \equiv \{\min h_k\ \ (Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}\}, \tag{87}$$

при ограничениях: $h_k^{min}\ \le h_k(Y) \le h_k^{max}, k = \overline{1, K},$

$$y_j^{min} \le y_j \le\ y_j^{max}, j = \overline{1, N},\ y_1 + y_2 +\ y_3, +y_4 = 100, \tag{88}$$

где $Y = \{y_j, j = \overline{1, N}\}$ – вектор управляемых переменных (конструктивных параметров материала);

$H\ (Y) = \{H_1(Y)\ H_2(Y)\ I_1\ (Y), I_2\ (\mathrm{Y})\}$ представляет векторный критерий, каждая компонента которого является вектором критериев (характеристик) материала, которые функционально зависят от дискретных значений вектора переменных;

$H_1\ (\mathrm{Y}) = \{h_k\ (Y), k = \overline{1, K_1^{def}}\}$, $H_2\ (Y)\ = \{h_k\ (Y), k = \overline{1, K_2^{def}}\}$ – это множество функций *max* и *min* соответственно;

$I_1\ (Y) = \{\{h_k\ (Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}$,

$I_2\ (Y) = \{\{h_k\ (Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_2^{unc}}\}$ – это множество матриц *max* и *min* соответственно; ( *definiteness*), $K_1^{unc}. K_2^{unc}$ (*uncertainty*) множество критериев *max* и *min* сформированные в условиях определенности и неопределенности;

в (88) $h_k^{min} \leq h_k\ (Y) \leq h_k^{max}, k = \overline{1, K}$ представлена вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование материала;

в (88) $y_j^{min} \leq y_j \leq y_j^{max}, j = \overline{1, N}$ – параметрические ограничения.

Примем, что функции $h_k\ (X), k = \overline{1, K}$ дифференцируемы и выпуклы, $g_i\ (X), i = \overline{1, M}$ непрерывны, а заданное ограничениями (88) множество допустимых точек $\boldsymbol{S}$ не пусто:

$\boldsymbol{S} = \{Y \in R^n | G(Y) \leq 0, Y^{min} \leq Y \leq Y^{max}\} \neq \emptyset$**,**

и представляет собой компакт.

***8.3.3. Построение численной модели структуры материала в условиях определенности***

*Условия определенности* характеризуются функциональной зависимостью каждой характеристики и ограничений от параметров материала. В примере известны характеристика (82) и ограничения (81). Используя информационные данные (81), (82) построим однокритериальную задачу нелинейного программирования в условиях определенности:

$$max\ h_1(Y) = 323.84 - 2.249y_1 - 3.49y_2 + 10.7267y_3 + 13.124y_4 + 0.0968y_1y_2 - 0.062y_1y_3 - 0.169y_1y_4 + 0.0743y_2y_3 - 0.1042y_2y_4 - 0.0036y_3y_4 + 0.0143y_1^2 + 0.0118y_2^2 - 0.2434y_3^2 - 0.5026y_4^2, \quad (89)$$

при ограничениях: $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 100$,

$$21 \leq y_1 \leq 79, 5 \leq y_2 \leq 59, 2.1 \leq y_3 \leq 9.0, 2.2 \leq y_4 \leq 7.0. \quad (90)$$

Эти данные в дальнейшем используются при построении математической модели материала.

***8.3.4. Формирование математической модели структуры материала в условиях неопределенности***

Формирование в условиях неопределенности состоит в использовании качественных, количественных описаний материала, полученных по принципу “вход-выход” в таблице 2.

Преобразование исходные данные (информации):

$h_2(Y_i, i = \overline{1, M}),\ h_3(Y_i, i = \overline{1, M}),\ h_4(Y_i, i = \overline{1, M})$

в функциональный вид:

$h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)$ осуществляется путем использования математических методов регрессионного анализа.

Исходные данные сформированы в таблице 2 в системе MATLAB в виде матрицы:

$$I = |Y, H|\ = \{y_{i1}, y_{i2}, y_{i3}, y_{i4}, h_{i2}, h_{i3}, h_{i4}, i = \overline{1, M}\}. \quad (91)$$

Для каждого набора экспериментального данных таблицы 2 $h_k, k = 2, 3, 4$ строится функция регрессии методом наименьших квадратов $\mathbf{min} \sum_{i=1}^{M} (y_i - \overline{y}_i)^2$ в системе MATLAB.

Формируется полином $A_k$, определяющий взаимосвязь параметров $Y_i = \{y_{i1}, y_{i2}, y_{i3}, y_{i4}\}$ и функции $\overline{y_{ki}} = h(Y_i, A_k), k = 2, 3, 4$ . Результатом формирования является система коэффициентов:

$$A_k = \{A_{0k}, A_{1k}, \dots, A_{14k}\},$$

которые определяют коэффициенты квадратичного полинома:

$$h_k(Y, A) = A_{0k} + A_{1k}y_1 + A_{2k}y_2 + A_{3k}y_3 + A_{4k}y_4 + A_{5k}y_1y_2 + A_{6k}y_1y_3 + A_{7k}y_1y_4 + A_{8k}y_2y_3 + A_{9k}y_2y_4 + A_{10k}y_3y_4 + A_{11k}y_1^2 + A_{12k}y_2^2 + A_{13k}y_3^2 + A_{14k}y_4^2, k = 2, 3, 4. \quad (92)$$

Программное обеспечение полиномиальной аппроксимации с четырьмя переменными и четырнадцатью факторами разработано. В итоге экспериментальные данные таблицы 2 преобразуются систему коэффициентов трех функции (92) в виде таблицы (Программа: Z_Material_MMTT32_os13_4k):

Ao= [323.8408 954.8634 110.02 21.0051
-2.2495 28.6719 0.9106 -0.0101
-3.4938 37.0392 0.6206 -0.8403
10.7267 -31.0303 -0.4287 -0.4314
13.1239 -54.0031 -2.5176 1.1718
0.0969 -0.9219 -0.0151 0.0166
-0.0621 0.5644 -0.0094 0.0850
-0.1696 0.8966 0.0222 -0.0001
0.0743 -0.1540 -0.0198 0.0522
-0.1042 0.3919 0.0184 0.0003
0.0036 -0.0135 -0.0006 0.0006
0.0142 0.0477 -0.0004 -0.0021
0.0117 0.0437 -0.0003 0.0035
-0.2433 3.8489 0.0390 0.0061
-0.5026 3.1748 0.1414 -0.0310];
Rj = [0.6115 0.7149 0.6551 0.9017];
RRj= [0.3740 0.5111 0.4292 0.8130];

На основе Ao (2) Ao (3) Ao (4) строятся функции $h_2(Y)$, $h_3(Y)$ и $h_4(Y)$, которые с учетом полученных коэффициентов примут вид:

$$max\ h_3(Y) \equiv 110.22 + 0.7918y_1 + 1.73y_2 - 0.3713y_3 - 2.20y_4 - 0.0132y_1y_2 - 0.008y_1y_3 + 0.0193y_1y_4 - 0.0172y_2y_3 + 0.0161y_2y_4 - 0.0006y_3y_4 - 0.0004y_1^2 - 0.0002y_2^2 + 0.0335y_3^2 + 0.124y_4^2, \quad (93)$$

$$min\ h_2(Y) \equiv 954.86 + 28.67y_1 + 37.03y_2 - 31.03y_3 + 54y_4 - 0.922y_1y_2 - 2y_1y_3 + 0.896y_1y_4 - 0.154y_2y_3 + 0.3919y_2y_4 - 0.0134y_3y_4 + 0.0478y_1^2 + 0.0438y_2^2 + 3.8489y_3^2 + 3.1748y_4^2, \quad (94)$$

$$min\ h_4(Y) \equiv 21.004 - 0.0097y_1 - 0.841y_2 - 0.4326y_3 + 1.1723y_4 + 0166y_1y_2 + 0.085y_1y_3 - 0.0001y_1y_4 + 0.0523y_2y_3 + 0.0002y_2y_4 + 0.0006y_3y_4 - 0.0022y_1^2 + 0.0035y_2^2 + 0.006y_3^2 - 0.0311y_4^2, \quad (95)$$

при ограничениях: $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 100,$

$$21 \le y_1 \le 79, 5 \le y_2 \le 59, 2.1 \le y_3 \le 9.0, 2.2 \le y_4 \le 7.0. \quad (96)$$

Минимальные и максимальные значения экспериментальных данных $y_1, \dots, y_4$ представлены в нижней части таблицы 2. Минимальные и максимальные значения функций $h_1(Y), h_3(Y), h_2(Y), h_4(Y)$ незначительно отличаются от экспериментальных данных. Индекс корреляции и коэффициенты детерминации представлены в нижних строках таблицы 2. Результаты регрессионного анализа (93), (95) в дальнейшем используются при построении математической модели материала.

***8.3.5. Формирование математической модели структуры материала в условиях определенности и неопределенности***

Для формирования математической модели структуры материала в виде векторной задачей математического программирования (ВЗМП) используем: функции, полученные условиях определенности (89)- (90) и неопределенности (93)- (95), параметрические ограничения (96).

Функции (92), (93), (94), (95) рассматриваем как критерии, определяющие целенаправленность функционирования системы. Множество критериев $K$=4 включают два критерия $h_1(Y), h_3(Y) \to \max$ и два $h_2(Y), h_4(Y) \to \min$. В итоге модель функционирования структуры материала представим векторной задачей математического программирования:

$opt\ F\ (X) = \{\max F_1\ (X) = \{\max h_1(X) \equiv 323.840 - 2.249y_1 - 3.4901y_2 + 10.7267y_3 + 13.124y_4 + 0.0968y_1y_2 - 0.062y_1y_3 - 0.169y_1y_4 + 0.0743y_2y_3 - 0.1042y_2y_4 - 0.0036y_3y_4 + 0.0143y_1^2 + 0.0118y_2^2 - 0.2434y_3^2 - 0.5026y_4^2,$ (97)

$max\ h_3(Y) \equiv 110.220 + 0.7918y_1 + 1.73y_2 - 0.3713y_3 - 2.201y_4 - 0.0132y_1y_2 - 0.008y_1y_3 + 0.0193y_1y_4 - 0.0172y_2y_3 + 0.0161y_2y_4 - 0.0006y_3y_4 - 0.0004y_1^2 - 0.0002y_2^2 + 0.0335y_3^2 + 0.124y_4^2\},$ (98)

$\min F_1\ (X) = \{min\ h_2(Y) \equiv 954.860 + 28.67y_1 + 37.03y_2 - 31.03y_3 + 54y_4 - 0.922y_1y_2 - 2y_1y_3 + 0.896y_1y_4 - 0.154y_2y_3 + 0.3919y_2y_4 - 0.0134y_3y_4 + 0.0478y_1^2 + 0.0438y_2^2 + 3.8489y_3^2 + 3.1748y_4^2,$ (99)

$max\ h_4(Y) \equiv 21.0040 - 0.0097y_1 - 0.8410y_2 - 0.4326y_3 + 1.1723y_4 + 0166y_1y_2 + 0.085y_1y_3 - 0.0001y_1y_4 + 0.0523y_2y_3 + 0.0002y_2y_4 + 0.0006y_3y_4 - 0.0022y_1^2 + 0.0035y_2^2 + 0.006y_3^2 - 0.0311y_4^2\}\},$ (100)

ограничения: $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 100,$

$$21 \le y_1 \le 79, 5 \le y_2 \le 59, 2.1 \le y_3 \le 9.0, 2.2 \le y_4 \le 7.0. \quad (101)$$

Векторная задача математического программирования (97)- (101) представляет модель принятия оптимального решения структуры материала в условиях определенности и неопределенности в совокупности.

**8.4. 3 этап. Моделирование и формирование структуры материала на базе векторной задачи с равнозначными критериями**

Для формирования структуры материала на базе векторной задачи математического программирования с равнозначными критериями (97)- (101) представлены методы, основанные на аксиоматике нормализации критериев и принципе гарантированного результата, вытекающие из аксиомы 1 и принципа оптимальности 1.

Методика решения представлена в виде ряда шагов.

*Шаг 1.* Решение ВЗМП (97)- (101) по каждому критерию отдельно. Для решения используется функция *fmincon* (…) системы MATLAB, обращение к функции *fmincon* (…) рассмотрено в [18, 19].

Как результат расчета, по каждому критерию получаем точки оптимума: $Y_k^*$ и $h_k^* = h_k\ (Y_k^*), k = \overline{1, K}$, $\boldsymbol{K}$=4– величины критериев в этой точке, т. е. наилучшее решение по каждому критерию:

Критерий 1: $Y_1^* = \{y_1 = 46.56, y_2 = 43.23, y_3 = 8.0, y_4 = 2.2\},$

$h_1^* = h_1\ (Y_1^*)\ = -387.99;$

Критерий 2: $Y_2^* = \{y_1 = 55.60, y_2 = 34.19, y_3 = 8.0, y_4 = 2.2\}$,
$h_2^* = h_2\ (Y_2^*)\ =\ 1361.41$;
Критерий 3: $Y_3^* = \{y_1 = 31.90, y_2 = 59.00, y_3 = 2.1, y_4 = 7.0\}$,
$h_3^* =\ h_3\ (Y_3^*)\ =\ -210.35$;
Критерий 4: $Y_4^* = \{y_1 = 36.70, y_2 = 59.00, y_3 = 2.1, y_4 = 2.2\}$,
$h_4^* = h_4\ (Y_4^*)\ =\ 30.714$.

Результат решения ВЗМП (97)- (101), ограничения (101) и точки оптимума $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$ в координатах $x_1$, $x_3$ представлены на рис. 5.

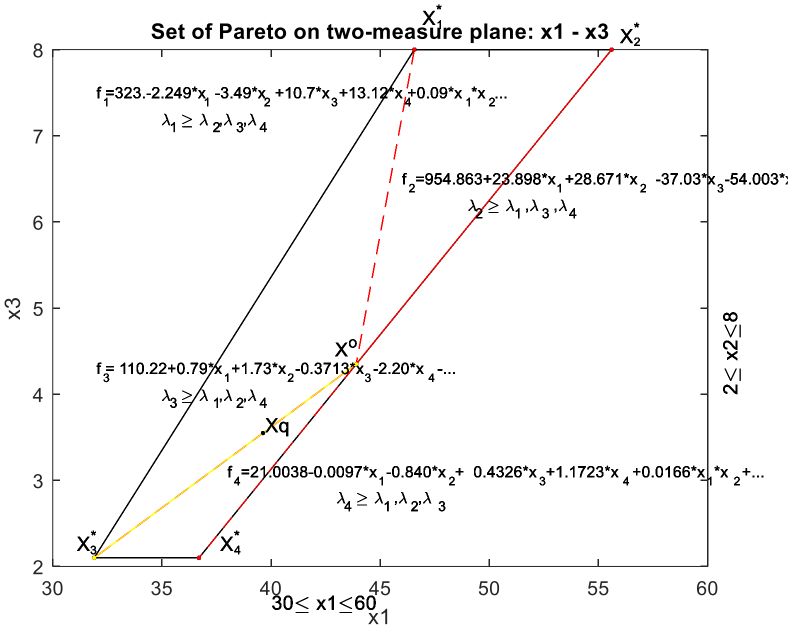


Рис. 5. Множество Парето, $\boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S}, X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$ в двухмерной системе координат $\{x_1, x_3\}$.

*Шаг 2*. Вычисляем наихудшую величину каждого критерия (антиоптимум): $Y_k^0$ и $h_k^0 = h_k\ (Y_k^0), k = \overline{1,K}, \boldsymbol{K}$=4. Для этого решается задача (97)- (101) для каждого критерия $k = \overline{1,K_1}$ на минимум, для каждого критерия $k = \overline{1,K_2}$ на максимум. В результате получим: $X_k^0 = \{x_j, j = \overline{1,N}\}$ – точка оптимума по соответствующему критерию, $k = \overline{1,K}$; $f_k^0 = f_k\ (X_k^0)$ – величина $k$-го критерия в точке, $X_k^0, k = \overline{1,K}$, (верхний индекс ноль):

$Y_1^0 = \{y_1 = 31.9, y_2 = 59.0, y_3 = 2.1, y_4 = 7.00\}, h_1^0 = h_1\ (Y_1^0) =\ 296.6$;
$Y_2^0 = \{y_1 = 31.9, y_2 = 59.0, y_3 = 2.1, y_4 = 7.\}, h_2^0 =\ h_2\ (Y_2^0) =\ -2458.5$;
$Y_3^0 = \{y_1 = 78.16, y_2 = 9.02, y_3 = 8, y_4 = 4.81\}, h_3^0 = h_3\ (Y_3^0) = 169.26$;
$Y_4^0 = \{y_1 = 62.71, y_2 = 22.9, y_3 = 8, y_4 = 6.39\}, h_4^0 =\ h_4\ (Y_4^0) = -73.62$.

The obtained points of the anti-optimum $X_1^0, X_2^0, X_3^0, X_4^0$ are shown in Figures 16, 17, 18, 19 respectively.

*Шаг 3*. Системный анализ множества точек, оптимальных по Парето, (т.е. анализ по каждому критерию) реализуется. Для этого в точках оптимума $Y^* = \{Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, Y_4^*\}$ определяются величины целевых функций $H\ (Y^*) = \left\| h_q\ (Y_k^*) \right\|_{q=\overline{1,K}}^{k=\overline{1,K}}$, $D =\ (d_1\ d_2\ d_3\ d_4)^T$- вектор отклонений по каждому критерию на допустимом множестве $\boldsymbol{S}$: $d_k\ = h_k^* - h_k^0, k = \overline{1,4}$, и матрица относительных оценок:

$$\lambda\ (Y^*) = \left\| \lambda_q\ (Y_k^*) \right\|_{q=\overline{1,K}}^{k=\overline{1,K}},\ \text{где}\ \lambda_k\ (X) =\ (h_k^* - h_k^0)/d_k$$

$$H\ (Y^*) = \begin{Vmatrix} 388\ 1444.2\ 183.9\ 68.5 \\ 382\ 1361.4\ 177.3\ 72.1 \\ 296\ 2458.5\ 210.4\ 30.2 \\ 330\ 2210.9\ 208.0\ 30.7 \end{Vmatrix},\ d_k = \begin{Vmatrix} 91.4 \\ -1097 \\ 41.09 \\ -42.9 \end{Vmatrix},\ \lambda\ (Y^*) = \begin{Vmatrix} 1.00\ 0.9245\ 0.356\ 0.1197 \\ 0.9367\ 1.00\ 0.1968\ 0.036 \\ 0.0\ 0.0\ 1.00\ 1.011 \\ 0.3669\ 0.2257\ 0.942\ 1.00 \end{Vmatrix}. \quad (102)$$

Системный анализ величин критериев в относительных оценках в ВЗМП (97)- (101) показывает, что в точках оптимума $Y^* = \{ Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, Y_4^*\}$ (по диагонали) относительная оценка равна единице. Остальные критерии (102) $\lambda\ (X^*) = \|\lambda_q\ (X_k^*)\|_{q=\overline{1,K}}^{k=\overline{1,K}}$ значительно меньше единицы. Требуется найти такую точку (параметры), при которых относительные оценки наиболее близки к единице. На решение этой проблемы направлено решение λ-задачи – шаг 4, 5.

*Шаг 4*. Формирование λ-задачи реализуется в два этапа:

На первом этапе строится максиминная задача оптимизации с нормализованными критериями:

$$\lambda^o = \boldsymbol{max_{Y\in S} min_{k\in K}} \lambda_k\ (Y), G\ (Y) \le 0, Y \ge 0; \quad (103)$$

на втором этапе максиминная задача (103) преобразуется в стандартную задачу математического программирования (λ-задача):

$$\lambda^o = max\,\lambda, \quad (104)$$

$$\text{с ограничениями } \lambda - \frac{h_1\ (Y) - h_1^0}{h_1^* - h_1^0} \le 0, \quad (105)$$

$$\lambda - \frac{h_3\ (Y) - h_3^0}{h_3^* - h_3^0} \le 0, \quad (106)$$

$$\lambda - \frac{h_2\ (Y) - h_2^0}{h_2^* - h_2^0} \le 0, \quad (107)$$

$$\lambda - \frac{h_4\ (Y) - h_4^0}{h_4^* - h_4^0} \le 0, \quad (108)$$

$$0 \le \lambda \le 1, 21 \le y_1 \le 79, 5 \le y_2 \le 59, 2.1 \le y_3 \le 9.0, 2.2 \le y_4 \le 7.0.$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 100, \quad (109)$$

Вектор неизвестных имеет размерность $N$+1: $\boldsymbol{Y} = \{y_1, \dots, y_N, \lambda\}$ ; функции $h_1(Y), h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)$ соответствуют (104)- (109) соответственно. Подставив числовые значения функций $h_1(Y), h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)$, мы получим λ-задачу следующего вида:

$$\lambda^o = max\,\lambda, \quad (110)$$

Ограничения

$$\lambda - \frac{323.84 - 2.249y_1 - 3.49 * x2\ \dots - 0.2434y_3^2 - 0.5026y_4^2 - h_1^0}{h_1^* - h_1^0} \le 0, \quad (111)$$

$$\lambda - \frac{110.22 + 0.7918y_1 + 1.73y_2 - \dots + 0.0335y_3^2 + 0.124y_4^2 - h_3^0}{f_3^* - f_3^0} \le 0, \quad (112)$$

$$\lambda - \frac{954.8 + 28.67y_1 + 37y_2 - \dots + 3.8489y_3^2 + 3.1748y_4^2 - h_2^0}{h_2^* - h_2^0} \le 0, \quad (113)$$

$$\lambda - \frac{21 - 0.0097y_1 - 0.841y_2 - \dots + 0.006y_3^2 - 0.0311y_4^2 - h_4^0}{h_4^* - h_4^0} \le 0, \quad (114)$$

$$0 \le \lambda \le 1, 21 \le y_1 \le 79, 5 \le y_2 \le 59, 2.1 \le y_3 \le 9.0, 2.2 \le y_4 \le 7.0.$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 100, \quad (115)$$

*Шаг 4*. Решение λ-задачи (110)- (115).

Обращение к функции *fmincon* (…), [16]:

$[Xo, Lo] = fmincon\ ('Z\_TehnSist\_4Krit\_L', X0, Ao, bo, Aeq, beq, lbo, ubo,$ $'Z\_TehnSist\_LConst', options)$.

В результате решения векторной задачи (97)- (101) при равнозначных критериях и соответствующей ей λ-задачи (110)- (115) получили:

$$\boldsymbol{X^o} = \{Y^o, \lambda^o\} = \{Y^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2, \lambda^o = 0.6087\}, \quad (116)$$

точку оптимума $\boldsymbol{X^o}$ – конструктивные параметры материала, которая представлена на рис. 12; $h_k(Y^o), k = \overline{1, K}$- величины критериев (характеристик структуры материала):

$$\{h_1(Y^o) = 364.0, h_2\ (Y^o) = 1790.7, h_3\ (Y^o) = \ 194.3, h_4\ (Y^o) = \ 47.5\}; \quad (117)$$

$\lambda_k(Y^o), k = \overline{1, K}$- величины относительных оценок

$$\{\lambda_1(Y^o) = \ 0.7372, \lambda_2(Y^o) = \ 0.6087, \lambda_3(Y^o) = 0.6087, \lambda_4(Y^o) = 0.6087\}; \quad (118)$$

$\lambda^o$=0.60870 – это максимальный нижний уровень среди всех относительных оценок, измеренный в относительных единицах: $\lambda^o = min\ (\lambda_1(Y^o), \lambda_2(Y^o), \lambda_3(Y^o), \lambda_4(Y^o)) = \ 0.6087$,

$\lambda^o$ называют также гарантированным результатом в относительных единицах. $\lambda_k(Y^o)$ и соответственно характеристики структуры материала $f_k(Y^o)$ нельзя улучшить, не ухудшая при этом другие характеристики.

В соответствии с теоремой с 1, в точке $\boldsymbol{X^o}$ критерии 1, 3 и 4 противоречивы. Это противоречие определяется равенством: $\lambda_2(Y^o) = \lambda_3(Y^o) = \lambda_4(Y^o) = \lambda^o = 0.6087$, а остальные критерии неравенством $\{\lambda_2(X^o) = \ 0.7372\} > \lambda^o$. Теорема 1 служит основой для определения правильности решения векторной задачи. В ВЗМП, как правило, для двух критериев выполняется равенство: $\lambda^o = \lambda_q(Y^o) = \lambda_p(Y^o), q, p \in \boldsymbol{K}, X \in S$, (в нашем примере такие критерии 2, 3, 4), для других критериев определяется как неравенство.

**8.5. Этап 4. Построение геометрической интерпретация результатов решения в трехмерной системе координат**

В множестве точек $\boldsymbol{S}$, образованных ограничениями (115), точки оптимума $Y_1^*, Y_2^*, Y, Y_4^*$, объединенных в контур, представляют множество точек, оптимальных по Парето, $\boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$, который представлен на рис 5. Характеристики материала в относительных единицах $\lambda_1\ (Y), \lambda_2\ (Y), \lambda_3\ (Y), \lambda_4\ (Y)$ показаны на рис. 6 в трех мерном пространстве $x_1\ x_2$ и λ, где третья ось λ – относительная оценка.

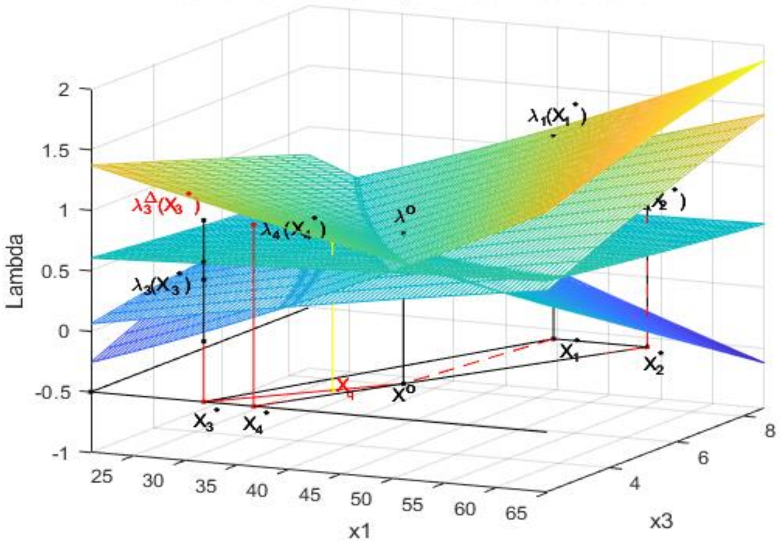


Рис. 6. Геометрическая интерпретация результатов решение λ-задачи в трехмерной системе координат $x_1\ x_2$ и λ

**Discussion**. Анализируя рисунок 6, мы можем представить изменения всех функций $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3(X), \lambda_4(X)$ в четырех мерном пространстве (На рисунках 6, …, 11 вектор $\boldsymbol{Y}=\{y_1,\ldots,y_N,\lambda\}$ и функции $h_1(Y), h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)$ заменены на $\boldsymbol{X}=\{x_1,\ldots,x_N,\lambda\}$; функции $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$).

Рассмотрим, например, оптимальную точку $X_3^*$. Функция $\lambda_3(X)$ сформирована из функции $f_3(X)$ с переменными координатами $\{x_1\ x_3\}$ и с постоянными координатами $\{x_2=49.54, x_4=2.2\}$, взятые из оптимальной точки $X^o$ (116).

В точке $X_3^*$ относительная оценка $\lambda_3(X_3^*)=0.83$ – показана на рис. 6 черной точкой. Но мы знаем, что относительная оценка $\lambda_3(X_3^*)$ полученная из функции $f_3(X_3^*)$ на третьем шаге равна единице, обозначим ее как $\lambda_3^{\Delta}(X_3^*)=1$ – показана на рис. 6 красной точкой.

Разность между $\lambda_3^{\Delta}(X_3^*)=1$ и $\lambda_3(X_3^*)=0.83$ является ошибкой $\Delta$=0.17 перехода от четырех мерной (а в общем случае $N$-мерной) к двухмерной области. Аналогично показана точка $X_1^*$ и соответствующие относительные оценки $\lambda_1(X_1^*)$ и $\lambda_1^{\Delta}(X_1^*)$.

*Таким образом*, впервые в отечественной и зарубежной практике показан переход и его геометрическая иллюстрация от $N$-мерного к двухмерному измерению функции в векторных задачах математического программирования с соответствующими ошибками аппроксимации.

**8.6. Этап 5. Решение векторной задачи оптимизации с заданным приоритетом критерия**

Как правило, лицом, принимающим решения, является конструктор системы**.**

***Шаг*** 1. Решается векторная задачи при равнозначных критериях. Решения векторной задачи представлено на стадии 8.4 3 этап. Численные результаты решения векторной задачи представлены выше. Точки, оптимальные по Парето $\boldsymbol{S^o}\subset\boldsymbol{S}$ находится между оптимальными точками $X_1^*\ X^o\ X_3^*\ X^o\ X_4^*\ X^o\ X_2^*\ X^o\ X_1^*$. Проведем анализ множества точек Парето $\boldsymbol{S^o}\subset\boldsymbol{S}$. Для этой цели мы соединим вспомогательные точки: $X_1^*\ X_3^*\ X_4^*\ X_2^*\ X_1^*$ с точкой $X^o$, которая условно представляет центр множества Парето.

Как результат решения получили четыре подмножеств точек $X\in\boldsymbol{S_q^o}\subset\boldsymbol{S^o}\subset\boldsymbol{S}, q=\overline{1,4}$. Подмножество точек $\boldsymbol{S_1^o}\subset\boldsymbol{S^o}\subset\boldsymbol{S}$ характеризуется тем, что относительная оценка $\lambda_1\geq\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$, $\lambda_4$, то есть в поле первого критерия $\boldsymbol{S_1^o}$ имеет приоритет над остальными. Аналогично $\boldsymbol{S_2^o},\boldsymbol{S_3^o},\boldsymbol{S_4^o}$- подмножества точек, характеризуется тем, что второй, третий и четвертый критерий имеет приоритет над другими соответственно. Множество точек, оптимальных по Парето, обозначим: $\boldsymbol{S^o}=\boldsymbol{S_1^o}\cup\boldsymbol{S_2^o}\cup\boldsymbol{S_3^o}\cup\boldsymbol{S_4^o}$. Геометрическая интерпретация координат всех полученных точек и относительные оценки представлены в двумерном пространстве $\{x_1\ x_2\}$ на рис. 5. Эти координаты показаны в трех измеренных пространствах $\{x_1\ x_2\ \lambda\}$ на рис. 6, где третья ось $\lambda$- относительная оценка.

Ограничения на рис. 6 снижены до -0,5 (чтобы были видимы ограничения). Полученная информация является основой для дальнейшего исследования структуры множества Парето.

Анализируем, если результаты решения векторной задачи с равнозначными критериями не удовлетворяют лицо, принимающее решение, то выбор оптимального решения осуществляется из какого-либо подмножества точек $\boldsymbol{S_1^o},\boldsymbol{S_2^o},\boldsymbol{S_3^o},\boldsymbol{S_4^o}$. Эти подмножества точек Парето показаны на рис.16.1 в виде функций $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$.

***Шаг*** 2. Выбор приоритетного критерия $q\in\boldsymbol{K}$.

Из теоремы 1 известно, что в оптимальной точке $X^o$ всегда имеется два наиболее противоречивых критерия, $q\in\boldsymbol{K}$ и $p\in\boldsymbol{K}$, для которых в относительных единицах выполняется точное равенство: $\lambda^o=\lambda_q(X^o)=\lambda_p(X^o), q,p\in\boldsymbol{K}, X\in\boldsymbol{S}$, а для остальных выполняется неравенства: $\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), \forall k \in \boldsymbol{K}, q \neq p \neq k.$

В модели структуры материала (97)- (101) и соответствующей λ-задачи (110)- (115) такими критериями являются второй и третий: $\lambda^o = \lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o)$= 0.6087, т.е. выполняется числовая симметрия. Эту симметрию покажем на рис. 7, где представлены функции $\lambda_1(X)$ и $\lambda_3(X)$ отдельно со стороны оптимальной точки $\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\}$.

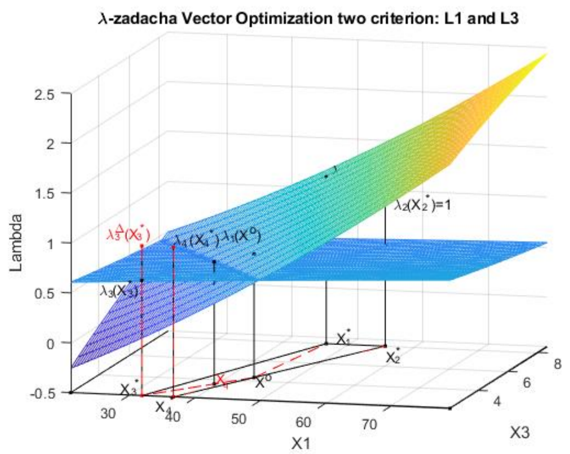


Рис. 7 (**a**). Решение λ-задачи- относительные оценки ($\lambda_1(X)$ и $\lambda_3(X)$) в трехмерной системе координат $x_1$ $x_2$ λ.

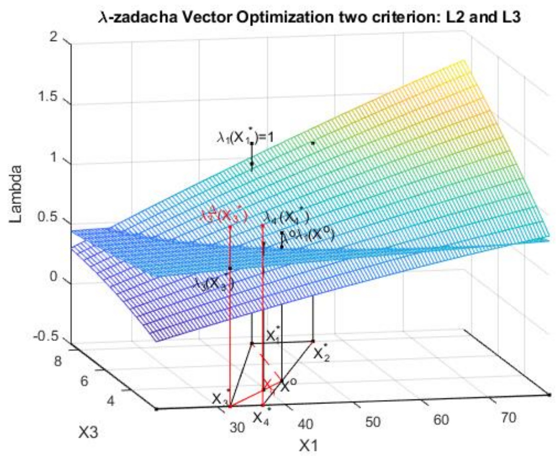


Рис. 7 (**b**). Решение λ-задачи – относительные оценки ($\lambda_2(X)$ и $\lambda_3(X)$) в трехмерной системе координат $x_1$ $x_2$ λ

Для сравнения аналогично представим функции наиболее противоречивые критерии $\lambda_2(X)$ и $\lambda_3(X)$ отдельно со стороны оптимальной точки $\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\}$. А рисунках 7 (a) и 7 (b) показаны все точки и данные, о которых говорилось на рис. 6.

Из этой пары $\lambda^o = \lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o)$ =0.6087 противоречивых критериев выбирается критерий, который ЛПР хотел бы улучшить. Такой критерий называется «приоритетным критерием», обозначим его $q = 3 \in \boldsymbol{K}$. Этот критерий исследуется во взаимодействии с первым критерием $q = 1 \in \boldsymbol{K}$. Мы исследуем эти два критерия из всего множества критериев $\boldsymbol{K} = 4$, показанных на рис. 7. Выдается сообщение на дисплей:

q=input ('Введите приоритетный критерий (номер) *q*= ') – Ввели критерий *q*=3.

***Шаг** 3*. Формируются числовые пределы изменения величины приоритета критерия $q = 3 \in \boldsymbol{K}$. Для приоритетного критерия $q = 3 \in \boldsymbol{K}$ определяются изменения числовых пределов в натуральных единицах при переходе из точки оптимума $X^o$ (116) в точку $X_q^*$, полученную на первом шаге. Информационные данные о критерии *q*=3 выдаются на дисплей:

$$f_q(X^o) = 194.27 \leq f_q(X) \leq 210.35 = f_q(X_q^*), q \in \boldsymbol{K}. \quad (119)$$

Аналогично, в относительных единицах критерий *q=3* изменяется в следующих пределах: $\lambda_q(X^o) = 0.6087 \leq \lambda_q(X) \leq 1 = \lambda_q(X_q^*), q = 3 \in \boldsymbol{K}.$

Эти данные анализируется.

***Шаг*** 4. Определяется величина приоритетного критерия $q \in \boldsymbol{K}$. (Decision-making).

На сообщение: «Введите величину приоритетного критерия *fq*=» – вводим, например, $f_q$=200.

***Шаг*** 5. Для $f_q$=200 *вычисляется относительная оценка*.

Для приоритетного критерия $f_q = 200$ вычисляется относительная оценка:

$$\lambda_q = \frac{f_q - f_q^0}{f_q^* - f_q^0} = \frac{200 - 194.27}{210.35 - 194.27} = 0.7479, \quad (120)$$

которая при переходе от точки $X^o$ к точке $X_q^*$ лежит в пределах:

$\lambda_3(X^o) = 0.6087 \leq \lambda_3 = 0.7489 \leq \lambda_3\ (X_3^*) = 1, q \in \boldsymbol{K}$.

***Шаг** 6*. Вычислим коэффициент линейной аппроксимации

Предполагая линейный характер изменения критерия $f_q\ (X)$ в (119) и соответственно относительной оценки $\lambda_q$ в (120), используя стандартные приемы линейной аппроксимации, вычислим коэффициент пропорциональности между $\lambda_q\ (X^o)$, $\lambda_q$, который назовем ρ:

$$\rho = \frac{\lambda_q - \lambda_q\ (X^o)}{\lambda_q\ (X_q^*) - \lambda_q\ (X^o)} = \frac{0.7489 - 0.6087}{1 - 0.6087} = 0.3558, q = 3 \in \boldsymbol{K}.$$

***Шаг** 7*. Определяются координаты приоритета критериев с размерностью $f_q$.

Предполагаем линейный характер изменения вектора $X^q = \{x_1\ x_2\ x_3\ x_4\}, q = 3$ определим координаты для точки с размерностью $f_q = 200$ с относительной оценкой (120):

$$x_{\lambda=0.74}^{q=3} = \{x_1 = X^o\ (1) + \rho\ (X_q^*\ (1) - X^o\ (1)),$$

$$x_2 = X^o(2) + \rho\left(X_q^*(2) - X^o(2)\right),$$

$$x_3 = X^o(3) + \rho\left(X_q^*(3) - X^o(3)\right),$$

$$x_2 = X^o(4) + \rho\left(X_q^*(4) - X^o(4)\right)\},$$

где $X^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2\}$,

$X_3^* = \{x_1 = 31.9, x_2 = 59.00, x_3 = 2.1, x_4 = 7.0\}$.

Как результат решения мы получим точку с координатами:

$X^q = \{x_1 = 39.63, x_2 = 52.91, x_3 = 3.54, x_4 = 3.907\}$.

***Шаг** 8*. Формирование главных показателей точки $X^q$.

В полученной точке $X^q$, вычислим:

все критерии в натуральных единицах $f_k\ (X^q) = \{f_k\ (X^q), k = \overline{1,K}\}$:

$f\ (X^q) = \{f_1\ (X^q) = 344.3, f_2\ (X^q) = 2000, f_3\ (X^q) = 199, f_4\ (X^q) = 41.7\}$;

все относительные оценки критериев: $\lambda^q = \{\lambda_k^q, k = \overline{1,K}, \lambda_k\ (X^q) = \frac{f_k\ (X^q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1,K}$:

$\lambda_k\ (X^q) = \{\lambda_1\ (X^q) = 0.5224, \lambda_2\ (X^q) = 0.418, \lambda_3\ (X^q) = 0.7244, \lambda_4\ (X^q) = 0.7446\}$;

минимальная относительная оценка: $\min\lambda\ (X^q) = \min\limits_{k \in K}\ (\lambda_k\ (X^q)) = 0.418$.

$P^q = [p_1^3 = 1.3868, p_2^3 = 1.7333, p_3^3 = 1.0, p_4^3 = 0.973]$;

вектор приоритетов $P^q(X) = \{p_k^q = \frac{\lambda_q\ (X^q)}{\lambda_k\ (X^q)}, k = \overline{1,K}\}$:

$$\lambda_k\ (X^q) * P^q = \{p_1^3 * \lambda_1(X^q) = 0.7244, p_2^3 * \lambda_2(X^q) = 0.7244,$$
$$p_3^3 * \lambda_3(X^q) = 0.7244, p_4^3 * \lambda_4\ (X^q) = 0.7244\}$$

минимальная относительная оценка:

$$\lambda^{oo} = \min\ (p_1^3\lambda_1(X^q), p_2^3\lambda_2\ (X^q), p_3^3\lambda_3\ (X^q), p_4^3\lambda_4\ (X^q)) = 0.7244$$

Аналогично получены другие точки из области Парето $\boldsymbol{X_t^o} = \{\lambda_t^o, X_t^o\} \in \boldsymbol{S}^o$.

***Анализ результатов***. Сформированная величина $f_q\ (X_t^o) = 199, q = 3 \in \boldsymbol{K}, q \in \boldsymbol{K}$ обычно не равна заданной $f_q = 200$. Ошибка выбора $\Delta f_q = |f_q\ (X_t^o) - f_q| = |199 - 200| = 1.0$ определяется ошибкой линейной аппроксимации: $\Delta f_{q\%} = 0.5\%$.

Если ошибка $\Delta f_q = |f_q\ (X_t^o) - f_q| = |199 - 200| = 1.0$, которая измерена в натуральных единицах или в процентах $\Delta f_{q\%} = \frac{\Delta f_q}{f_q} * 100 = 0.5\%$, больше заданной $\Delta f, \Delta f_q > \Delta f$, то переходим к шагу 2, если $\Delta f_q \le \Delta f$, то вычисления завершаются. ***Конец***.

При моделировании могут быть изменены параметрические ограничения (101) и функции (100), т. е. получено некоторое множество оптимальных решений. Из этого множества оптимальных решений выбираем окончательный вариант (процесс принятия решений).

В примере окончательный вариант включает параметры:

$X^o = \{X^o, \lambda^o\} = \{X^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2\}, \lambda^o = 0.6087\}$;

параметры структуры материала при заданном приоритете критерия:

$q$=3: $X^q = \{x_1 = 39.63, x_2 = 52.91, x_3 = 3.54, x_4 = 3.907\}$.

**8.7. Этап 6. Исследование симметрии и геометрическая интерпретация результатов решение по структуре материала в физических единицах**

***Этап 6а. С****имметрия в результатах решения по структуре материала, представленной векторной задачей нелинейного программирования*.

В исследуемой векторной задаче нелинейного программирования (97)- (101) с четырьмя неоднородными критериями – модель структуры материала и описанная в числовом варианте (97)-(101) и построенной на её базе λ-задаче (110)- (115) мы получили точку оптимума $X^O$ м максимальную относительную оценку $\lambda^o$:

$$\boldsymbol{X^o} = \{Y^o, \lambda^o\} = \{Y^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2, \lambda^o = 0.6087\},$$

В оптимальной точке $X^o$ критерии в численном значении представлены:

$$F(X^o) = \{\{h_1(Y^o) = 364.0, h_2\ (Y^o) = 1790.7, h_3\ (Y^o) = 194.3, h_4\ (Y^o) = 47.5\}\}$$

И в относительных единицах:

$\lambda(X^o) = \{\lambda_1(Y^o) = 0.7372, \lambda_2(Y^o) = 0.6087, \lambda_3(Y^o) = 0.6087, \lambda_4(Y^o) = 0.6087\}$.

Этот результат соответствует теореме 1 об наиболее противоречивых критериях в векторной задаче, т.е. $\lambda^o = \lambda_2(Y^o) = \lambda_3(Y^o) = \lambda_4(Y^o) = \lambda^o = 0.6087, \{2, 3, 4\} \in \boldsymbol{K}, X^o \in \boldsymbol{S}$.

Остальные критерии лежат в пределах: $\{\lambda_1(X^o) = 0.7372\} > \lambda^o$.

Теоретически точка $X^o$ является центром симметрии. Действительно точка $X^o$ лежит между точками оптимума $X_1^*$ и $X_3^*$ полученных на первом шаге, в которых $\lambda_1(X_1^*)$=1, $\lambda_3(X_3^*) = 1$. Покажем геометрическую интерпретации симметрии на рисунке 8.

$X_1^*\ \lambda_1(X_1^*)$=1 $X_2^*\ \lambda_2(X_2^*)$=1 $X_3^*\ \lambda_3(X_3^*) = 1$ $X_4^*\ \lambda_4(X_4^*) = 1$

$X^o$ $\lambda_1(X^o) = 0.7372$

$X^o$ $\lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o) = \lambda_4(X^o)\ \lambda^o = 0.6087$

Рис. 8. Геометрическая интерпретация моделирования структуры материала с нормализованными критериями: $\lambda_1(X), \dots, \lambda_4(X)$.

Для трех критериев первого $\lambda_1(X)$, третьего $\lambda_3(X)$, и четвертого $\lambda_4(X)$, в этом примере сохраняется числовая симметрия.

**Этап 8b. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП по структуре материала в физических единицах**

Рассчитаны и представили параметры по структуре материала:

$\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\} = \{X^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.3,\ x_4 = 2.2\},\ \lambda^o = 0.6087\}$,

в двухмерной системе координат $x_1, x_2$ на Рис.5, трехмерной системе координат $x_1, x_2$ and λ в относительных единицах на рис. 6, 7, 8. Также представим эти параметры в физических единицах для каждой характеристики материала (критерия): $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$. Первая характеристика материала $f_1(X)$ в координатах $x_1, x_2$ представлена на рис. 9.

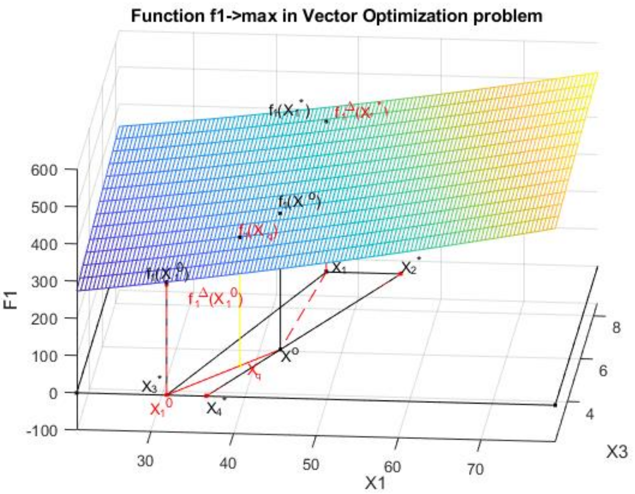


Рис. 9. Геометрическая интерпретация первой характеристики материала $f_1(X)$ в координатах $x_1, x_2$ в натуральных показателях

Функциональные показатели $f_1^\Delta\,(X_1^*)$, $f_1^\Delta(X_1^o)$ первой характеристики материала (выделены красным цветом) определяют ошибки перехода от четырехмерной $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ к двухмерной $X^o = \{x_1, x_2\}$ системе координат.

Вторая характеристика материала $f_2(X)$ в координатах $x_1, x_2$ представлена на рис. 10.

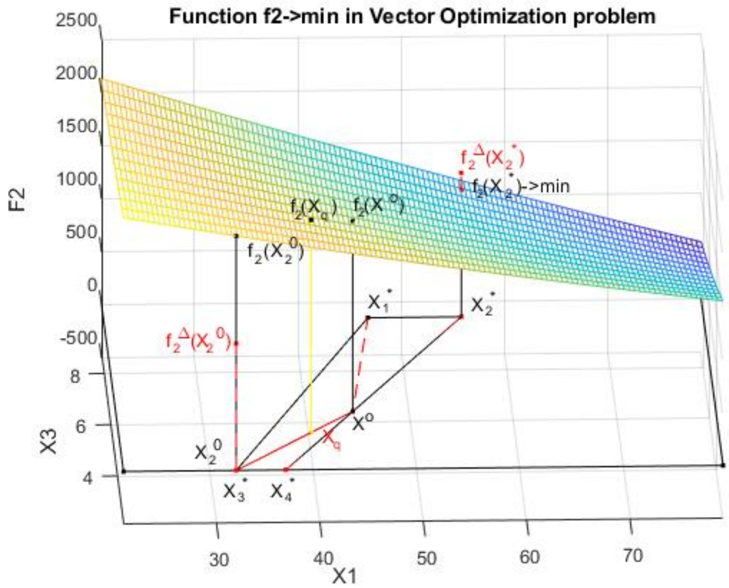


Рис. 10. Геометрическая интерпретация второй характеристики материала $f_2(X)$ в натуральных показателях

Функциональные показатели $f_2^\Delta\,(X_2^*)$, $f_2^\Delta(X_2^o)$ второй характеристик материала (выделены красным цветом) определяют ошибки перехода от четырехмерной $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ к двухмерной $X^o=\{x_1, x_2\}$ системе координат.

Третья характеристика материала $f_3(X)$ в координатах $x_1, x_2$ представлена на рис. 11.

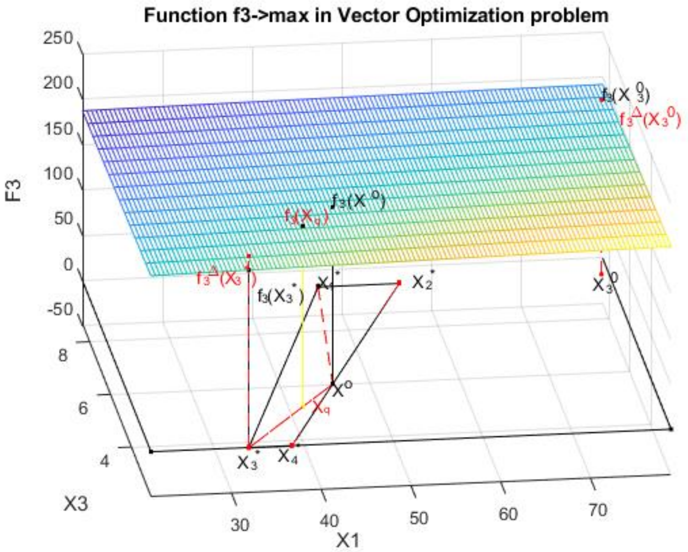


Рис. 11. Геометрическая интерпретация третьей характеристики материала $f_3(X)$ в натуральных показателях

Четвертая характеристика материала $f_4(X)$в координатах $x_1$, $x_2$ представлена на рис. 12.

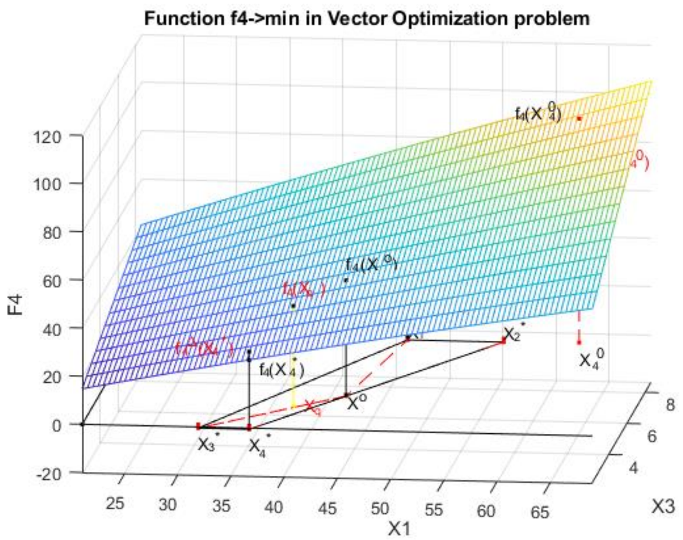


Рис. 12. Геометрическая интерпретация четвертой характеристики материала $f_4(X)$ в натуральных показателях

Представленная версия программного обеспечения выдает следующие результаты:

точка оптимума – $X^o$; характеристики – $F(X^o) = \{f_1(X^o), f_2(X^o), f_3(X^o), f_4(X^o)\}$;

относительные оценки – $\lambda(X^o) = \{\lambda_1(X^o), \lambda_2(X^o), \lambda_3(X^o), \lambda_4(X^o)\}$;

максимальную относительную оценку – $\lambda^o$, такую что $\lambda^o \leq \lambda_k\ (X^o)\ \forall k \in \boldsymbol{K}$.

точку оптимума с приоритетом $q$–го критерия – $X^q$;

характеристики (критерии) – $F(X^q) = \{f_1(X^q), f_2(X^q), f_3(X^q), f_4(X^q)\}$;

относительные оценки – $\lambda(X^o) = \{\lambda_1(X^q), \lambda_2(X^q), \lambda_3(X^q), \lambda_4(X^q)\}$;

максимальную относительную оценку $\lambda^{oo}$ такую, что $\lambda^{oo} \leq p_k^q\ \lambda_k\ (X^q), k = \overline{1, K}$.

*Заключение по поэтому разделу*. Проблема разработки математических методов векторной оптимизации и принятия оптимального решения по структуре материала по некоторому набору экспериментальных данных и функциональных характеристик является одной из важнейших задач системного анализа и проектирования. Разработана методология автоматизации проектирования путем: во-первых, построения математической модели структуры материала в условиях определенности и неопределенности в виде векторной задачи математического программирования; во-вторых, разработки методов решения векторной задачи. Практика "принятия оптимального решения" на основе математической модели структуры материала показана на численном примере решения векторной задачи оптимизации.

**9. Моделирование и принятие оптимального решения в технической системе с четырьмя параметрами и шестью критериями.**

Данная глава этой работы имеет прикладной характер. Работа направлена на базе аксиоматики векторной оптимизации представить автоматизацию проектирования на примере технической системы, [7-21].

**9.1. Моделирование и принятие оптимальных решения по числовому множеству критериев технической системе с четырьмя параметрами и шестью критериями**

***9.1.1. Формирование математической модели технической системе в условиях определенности и неопределенности***

В качестве объекта исследования нами рассматриваются рассматривается техническая система с четырьмя параметрами и шестью функциональными характеристиками. Экспериментальные данные (условия неопределенности) технической системы представим в виде задачи принятия решений второго вида (70):

$$F = \left| \begin{matrix} x_{1,1} \ \ x_{2,1} \ x_{3,1} \ x_{4,1} \ f_1^1, f_1^2, \dots, f_1^K \\ \dots \\ x_{1,M} \ \ x_{2,M} \ \ x_{3,M} \ x_{4,M} \ f_M^1, f_M^2, \dots, f_M^K \end{matrix} \right| - \text{problem of 2-type}, \ K = 6.$$

Исследование технической системы выполнено:

во-первых, в условиях определенности, когда известны данные о функциональных характеристиках технической системы;

во-вторых, в условиях неопределенности, когда известны дискретные значения отдельных характеристик; также известны данные об ограничениях, которые накладываются на функционирование технической системы.

Используя регрессионный анализ экспериментальные данные $F$ преобразуются в векторную задачу математического программирования:

$max\ f_k(X, A) = a_{0k} + a_{1k}x_1 + a_{2k}x_2 + a_{3k}x_3 + a_{4k}x_4 + a_{5k}x_1x_2 + a_{6k}x_1x_3 + a_{7k}x_1x_4 + a_{8k}x_2x_3 + a_{9k}x_2x_4 + a_{10k}x_3x_4 + a_{11k}x_1^2 + a_{12k}x_2^2 + a_{13k}x_2^2 + a_{14k}x_2^2, k = \overline{1, K_1}$.

$min\ f_k(X, A) = a_{0k} + a_{1k}x_1 + a_{2k}x_2 + a_{3k}x_3 + a_{4k}x_4 + a_{5k}x_1x_2 + a_{6k}x_1x_3 + a_{7k}x_1x_4 + a_{8k}x_2x_3 + a_{9k}x_2x_4 + a_{10k}x_3x_4 + a_{11k}x_1^2 + a_{12k}x_2^2 + a_{13k}x_2^2 + a_{14k}x_2^2, k = \overline{1, K_2}$.

При ограничениях $x_1^0 \leq x_1 \leq x_1^*, x_2^0 \leq x_2 \leq x_2^*, x_3^0 \leq x_3 \leq x_3^*, x_4^0 \leq x_4 \leq x_4^*$.

Математический аппарат моделирования инженерной системы базируется на теории и методах векторной оптимизации, которые представлены в предыдущих главах.

***9.1.2. Численная реализация выбора оптимальных параметров сложной технической системы в условиях определенности и неопределенности***

Численная реализация выбора оптимальных параметров сложной технической системы выполняется в соответствии с теоретическими основами многомерной математики, включающей аксиоматику, принципы оптимальности и конструктивные методы многомерной математики как при равнозначных критериях, так и при заданном приоритете критериев [1]. Методология процесса принятия оптимального решения (выбора оптимальных параметров) в технической системе изложена в первом. Рассматривается задача принятия решений в сложной технической системе, о которой известны: во-первых, данные о функциональной взаимосвязи нескольких характеристик с ее компонентами (условия определенности); во-вторых, данные о некотором наборе дискретных значений нескольких характеристик (экспериментальные результаты), во взаимосвязи с дискретными значениями компонент (условия неопределенности); в-третьих, ограничений, накладываемых на функционирование сложной технической системы. Численная задача моделирования сложной технической системы рассматривается с равнозначными критериями и с заданным приоритетом критерия.

В организационном плане процесс моделирования и симулирования технической системы представлен в виде методологии: «Методология выбора оптимальных параметров инженерных систем в условиях определенности и неопределенности», представленной в разделе 7.7.

Первый этап (Разработка технического задания), а также этап анализа результата решения и выбора приоритетного критерия и его величины выполняется ***конструктором технической системы***. Остальные этапы выполняются ***математиком – программистом***.

**9.2. Этап 1. Разработка технического задания (исходных данных) для исследования и выбора технической системы**

***Дано***. Мы исследуем техническую систему. Функционирование технической системы определяется четырьмя параметрами $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, которые представляют вектор управляемых переменных. Параметры технической системы заданы в следующих пределах:

$$20 \le x_1 \le 80, 0 \le x_2 \le 60, 2.0 \le x_3 \le 8.0, 2.0 \le x_4 \le 8.0. \qquad (121)$$

Функционирование технической системы определяются шестью характеристиками (критериями) $F(X) = \{f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X), f_5(X), f_6(X)\}$, величина оценки которых зависит от вектора параметров *X*. *Условия определенности* (когда известна функциональная зависимость критерия от параметров). Для пятой и шестой характеристики $f_5(X)$ и $f_6(X)$ известна функциональная зависимость от параметров $X = \{x_j, j = \overline{1,N}, N = 4\}$.

$$f_5(X) = 886.27 + 26.28x_1 + 33.95x_2 - 27.445x_3 - 49.5x_4 - 0.8451x_1x_2 + 0.5173x_1x_3 + 0.8219x_1x_4 - 0.1411x_2x_3 + 0.3593x_2x_4 - 0.0123x_3x_4 + 0.0438x_1^2 + 0.0401x_2^2 + 3.5281x_3^2 + 2.9103x_4^2, \qquad (122)$$

$$f_6(X) = 41.758 + 0.6598x_1 + 0.4505x_2 - 0.3094x_3 - 1.8334x_4 - 0.011x_1x_2 - 0.0069x_1x_3 + 0.0161x_1x_4 - 0.0143x_2x_3 + 0.0134x_2x_4 - 0.0005x_3x_4 - 0.0003x_1^2 - 0.0002x_2^2 + 0.0279x_3^2 + 0.1033x_4^2, \qquad (123)$$

*Условия неопределенности* (когда неизвестна функциональная зависимость критерия от параметров). Известны: ***результаты экспериментальных данных***;

для первой, второй, третьей и четвертой характеристики: $f_k(X), k = 1, 2, 3, 4$;

величины параметров и соответствующих характеристик: $X = \{x_n = \{x_{ni}, i = \overline{1,M}\}, n = \overline{1,N}\}$. Числовые значения параметров $X$, характеристик $f_1(X), \dots, f_4(X)$ представлены в таблице 3.

**Таблица 3.** Числовые значения параметров и характеристик системы

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $f_1(X) \to max$ | $f_2(X) \to min$ | $f_3(X) \to max$ | $f_4(X) \to min$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20.0 | 0.0 | 20.0 | 20.0 | 330.0 | 957.8 | 43.4 | 20.2 22.617 |
| 20.0 | 0.0 | 20.0 | 50.0 | 340.0 | 970.0 | 43 | 23.0 23.001 |
| 20.0 | 0.0 | 20.0 | 80.0 | 348.0 | 980. | 42.9 | 24.0 24.920 |
| 20.0 | 0.0 | 50.0 | 20.0 | 353.0 | 1010. | 46.1 | 25.0 23.850 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20.0 | 0.0 | 50.0 | 50.0 | 360.0 | 1050. | 42.5 | 26.0 26.286 |
| 20.0 | 0.0 | 50.0 | 80.0 | 365.0 | 1048. | 42.1 | 27.0 28.299 |
| 20.0 | 0.0 | 80.0 | 20.0 | 376.0 | 1047. | 40.2 | 28.0 27.311 |
| 20.0 | 0.0 | 80.0 | 50.0 | 381.0 | 1044. | 39.1 | 29.0 29.947 |
| 20.0 | 0.0 | 80.0 | 80.0 | 390.0 | 1043. | 38.6 | 29.0 31.260 |
| 20.0 | 50.0 | 20.0 | 20.0 | 250.0 | 1785.8 | 53 | 16.6 13.176 |
| 20.0 | 50.0 | 20.0 | 50.0 | 258.0 | 1795.0 | 52.3 | 18.0 16.864 |
| 20.0 | 50.0 | 20.0 | 80.0 | 263.0 | 1803.0 | 51.9 | 21.0 20.228 |
| 20.0 | 50.0 | 50.0 | 20.0 | 270.0 | 1814.2 | 51.4 | 24.8 22.045 |
| 20.0 | 50.0 | 50.0 | 50.0 | 279.0 | 1821.0 | 50.1 | 27.9 25.732 |
| 20.0 | 50.0 | 50.0 | 80.0 | 283.0 | 1832.0 | 49.9 | 31.0 29.097 |
| 20.0 | 50.0 | 80.0 | 20.0 | 290.0 | 1842.6 | 49.8 | 32.9 30.925 |
| 20.0 | 50.0 | 80.0 | 50.0 | 301.0 | 1860.0 | 48 | 35.0 34.612 |
| 20.0 | 50.0 | 80.0 | 80.0 | 310.0 | 1871.0 | 48.2 | 41.0 37.977 |
| 20.0 | 100.0 | 20.0 | 20.0 | 170.0 | 2461.8 | 69 | 13.0 11.565 |
| 20.0 | 100.0 | 20.0 | 50.0 | 175.0 | 2350.0 | 65 | 15.0 15.304 |
| 20.0 | 100.0 | 20.0 | 80.0 | 185.0 | 2310.0 | 62 | 18.0 18.720 |
| 20.0 | 100.0 | 50.0 | 20.0 | 190.0 | 2290.2 | 60.4 | 20.2 23.353 |
| 20.0 | 100.0 | 50.0 | 50.0 | 198.0 | 2360.0 | 62 | 24.0 27.092 |
| 20.0 | 100.0 | 50.0 | 80.0 | 204.0 | 2420.0 | 64 | 27.0 30.508 |
| 20.0 | 100.0 | 80.0 | 20.0 | 210.0 | 2518.6 | 65.8 | 29.3 35.152 |
| 20.0 | 100.0 | 80.0 | 50.0 | 221.0 | 2530.0 | 65 | 33.0 38.891 |
| 20.0 | 100.0 | 80.0 | 80.0 | 230.0 | 2547.0 | 64.2 | 37.4 42.307 |
| 50.0 | 0.0 | 20.0 | 20.0 | 10.0 | 2985.8 | 91.4 | 9.4 20.246 |
| 50.0 | 0.0 | 20.0 | 50.0 | 16.0 | 3001.0 | 91 | 12.0 23.131 |
| 50.0 | 0.0 | 20.0 | 80.0 | 24.0 | 3007.0 | 90 | 14.0 25.693 |
| 50.0 | 0.0 | 50.0 | 20.0 | 30.0 | 3014.2 | 89.8 | 17.6 31.623 |
| 50.0 | 0.0 | 50.0 | 50.0 | 38.0 | 3019.0 | 89 | 19.0 34.508 |
| 50.0 | 0.0 | 50.0 | 80.0 | 44.0 | 3031.0 | 88.7 | 23.0 37.070 |
| 50.0 | 0.0 | 80.0 | 20.0 | 50.0 | 3042.6 | 88.2 | 25.7 43.011 |
| 50.0 | 0.0 | 80.0 | 50.0 | 60.0 | 3060.0 | 87 | 30.0 45.896 |
| 50.0 | 0.0 | 80.0 | 80.0 | 70.0 | 3071.0 | 86.6 | 33.8 48.457 |
| 50.0 | 50.0 | 20.0 | 20м | 410.0 | 0996.2 | 49.6 | 44.0 25.595 |
| 50.0 | 50.0 | 20.0 | 50.0 | 417.0 | 1010.0 | 46 | 50.0 30.244 |
| 50.0 | 50.0 | 20.0 | 80.0 | 423.0 | 1030.0 | 44 | 54.0 34.569 |
| 50.0 | 50.0 | 50.0 | 20.0 | 430.0 | 1043.0 | 43.4 | 57.2 39.892 |
| 50.0 | 50.0 | 50.0 | 50.0 | 439.0 | 1060.0 | 42 | 63.0 44.540 |
| 50.0 | 50.0 | 50.0 | 80.0 | 444.0 | 1080.0 | 41 | 69.0 48.865 |
| 50.0 | 50.0 | 80.0 | 20.0 | 450.0 | 1099.8 | 40.2 | 73.4 54.199 |
| 50.0 | 50.0 | 80.0 | 50.0 | 460.0 | 1120.0 | 38.4 | 81.0 58.847 |
| 50.0 | 50.0 | 80.0 | 80.0 | 470.0 | 1156.6 | 37 | 89.7 63.172 |
| 50.0 | 80.0 | 20.0 | 20.0 | 410.0 | 1814.2 | 56.2 | 33.8 38.558 |
| 50.0 | 100.0 | 20.0 | 50.0 | 418.0 | 1830.0 | 55 | 38.0 44.970 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 50.0 | 100.0 | 20.0 | 80.0 | 423.0 | 1850.0 | 54 | 44.0 51.059 |
| 50.0 | 100.0 | 50.0 | 20.0 | 430.0 | 1871.0 | 53 | 50.0 55.773 |
| 50.0 | 100.0 | 50.0 | 50.0 | 437.0 | 1905.0 | 52 | 56.0 62.185 |
| 50.0 | 100.0 | 50.0 | 80.0 | 444.0 | 1912.0 | 51 | 61.0 68.274 |
| 50.0 | 100.0 | 80 | 20.0 | 450.0 | 1927.8 | 49.8 | 66.2 73.000 |
| 50.0 | 100.0 | 80.0 | 50.0 | 460.0 | 1950.0 | 43 | 71.0 79.411 |
| 50.0 | 100.0 | 80.0 | 80.0 | 470.0 | 1984.6 | 46.6 | 82.5 85.500 |
| 80.0 | 0.0 | 20.0 | 20.0 | 330.0 | 2490.2 | 72.2 | 26.6 17.347 |
| 80.0 | 0.0 | 20.0 | 50.0 | 338.0 | 2510.0 | 71 | 30.0 19.480 |
| 80.0 | 0.0 | 20.0 | 80.0 | 343.0 | 2530.0 | 70 | 36.0 21.291 |
| 80.0 | 0.0 | 50.0 | 20.0 | 350.0 | 2547.0 | 69 | 42.8 34.151 |
| 80.0 | 0.0 | 50.0 | 50.0 | 358.0 | 2590.0 | 69.2 | 51.0 36.285 |
| 80.0 | 0.0 | 50.0 | 80.0 | 363.0 | 2630.0 | 69.6 | 60.0 38.095 |
| 80.0 | 0.0 | 80.0 | 20.0 | 370.0 | 2703.8 | 69.8 | 69.0 50.966 |
| 80.0 | 0.0 | 80.0 | 50.0 | 380.0 | 2690.0 | 65 | 72.0 53.100 |
| 80.0 | 50.0 | 80.0 | 80.0 | 390.0 | 2660.6 | 62 | 75.3 87.623 |
| 80.0 | 50.0 | 20.0 | 20.0 | 170.0 | 3014.2 | 94.6 | 19.4 37.270 |
| 80.0 | 50.0 | 20.0 | 50.0 | 178.0 | 3033.0 | 93 | 25.0 42.879 |
| 80.0 | 50.0 | 20.0 | 80.0 | 182.0 | 3050.0 | 92 | 30.0 48.165 |
| 80.0 | 50.0 | 50.0 | 20.0 | 190.0 | 3071.0 | 91.4 | 35.6 56.993 |
| 80.0 | 50.0 | 50.0 | 50.0 | 198.0 | 3090.0 | 90 | 40.0 62.602 |
| 80.0 | 50.0 | 50.0 | 80.0 | 204.0 | 3110.0 | 89 | 45.0 67.889 |
| 80.0 | 50.0 | 80.0 | 20.0 | 210.0 | 3127.8 | 88.2 | 51.8 76.728 |
| 80.0 | 50.0 | 80.0 | 50.0 | 220.0 | 3060.0 | 87 | 61.0 82.337 |
| 80.0 | 50.0 | 80.0 | 80.0 | 230.0 | 3184.6 | 85 | 68.1 87.623 |
| 80.0 | 100.0 | 20.0 | 20.0 | 490.0 | 1014.6 | 53 | 72.5 64.806 |
| 80.0 | 100.0 | 20.0 | 50.0 | 498.0 | 1040.0 | 51 | 79.0 73.891 |
| 80.0 | 100.0 | 20.0 | 80.0 | 503.0 | 1060.0 | 50 | 86.0 82.653 |
| 80.0 | 100.0 | 50.0 | 20.0 | 510.0 | 1099.8 | 48.2 | 96.8 87.449 |
| 80.0 | 100.0 | 50.0 | 50.0 | 518.0 | 1120.0 | 46 | 105.0 96.534 |
| 80.0 | 100.0 | 50.0 | 80.0 | 523.0 | 1160.0 | 44 | 114.0 105.295 |
| 80.0 | 100.0 | 80.0 | 20.0 | 530.0 | 1185.0 | 43.4 | 121.2 110.102 |
| 80 | 100.0 | 80.0 | 50.0 | 541.0 | 1220.0 | 40 | 130.0 119.187 |
| 80 | 100.0 | 80.0 | 80.0 | 550.0 | 1270.2 | 38.6 | 145.6 127.949 |
| Минимальные значения | | | | 10.0 | 957.8 | 37 | 9.4 12.1 |
| Максимальные значения | | | | 550.0 | 3184.6 | 93 | 145.6 128.1 |
| Индекс корреляции | | | | 0.6115 | 0.7149 | 0.6149 | 0.9017 |
| Коэффициент детерминации | | | | 0.3740 | 0.5111 | 0.411 | 0.8130 |

В принимаемом решении, величину оценки по первой, третьей и шестой характеристики (критерия) желательно, получить как можно выше: $f_1(X) \to max\ f_3(X) \to max\ f_6(X) \to max$ ;; второй, четвертой и пятой как можно ниже: $y_2(X) \to min\ f_4(X) \to min\ f_5(X) \to min$. Параметры $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ изменяются в следующих пределах:

$$20.0 \le x_1 \le 80.0, 0.0 \le x_2 \le 60.0, 2.0 \le x_3 \le 8.0, 2.0 \le x_4 \le 8.0 \quad (124)$$

***Требуется.*** Построить модель системы в виде векторной задачи. Решить векторную задачу с равнозначными критериями. Выбрать приоритетный критерий. Установить численное значение приоритетного критерия. Принять оптимальное решение с заданным приоритетом критерия.

*Примечание.* Автором разработано в системе MATLAB программное обеспечение для решения векторных задач математического программирования. Векторная задача включает четыре переменных (параметров): $X$={$x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$} и шесть критериев (характеристик)

$F(X) = \{f_1(X), f_2(X), \ldots, f_6(X)\}$. Но для каждых новых данных (новая система) программа настраивается индивидуально. В программном обеспечении критерии $F(X) = \{f_1(X), f_2(X), \ldots, f_6(X)\}$ с условиями неопределенности (в таблице 1 они представлены как часть $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$) могут изменяться от нуля (т.е. все критерии построены в условиях определенности) до шести (т.е. все критерии построены в условиях неопределенности).

**9.3. 2 этап. Построение математической и числовой модели системы в условиях определенности и неопределенности**

Создание числовой модели системы включает следующие разделы: Выбор математической модели системы; Построение модели 1) в условиях определенности; 2) в условиях неопределенности; 3) в условиях определенности, неопределенности.

***9.3.1. Математическая модель системы.***

Мы представим модель технической системы в условиях определенности и неопределенности:

$$Opt\ F\ (X)\ =\ \{\max F_1(X) = \{\max f_k\ (X), k = \overline{1, K_1^{def}}\}, \quad (125)$$

$$\max I_1(X) \equiv \{\max f_k\ \ (X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\} \quad (126)$$

$$\min F_2(X) = \{\min f_k\ (X), k = \overline{1, K_2^{def}}, \quad (127)$$

$$\min I_2(X) \equiv \{\min f_k\ \ (X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}\}, \quad (128)$$

при ограничениях $f_k^{min} \ \le\ f_k(X) \le f_k^{max}, k = \overline{1, K}, x_j^{min} \le x_j \le\ x_j^{max}, j = \overline{1, N},$ (129)

где $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ – вектор управляемых переменных (конструктивных параметров);

$F\ (X)\ = \{F_1\ (X)\ F_2\ (X) I_1\ (X), I_2\ (X)\}$ – векторный критерий, каждая компонента которого представляет вектор критериев (характеристик) технической системы, которые функционально зависят от дискретных значений вектора переменных;

$F_1\ (X) = \{f_k\ (X), k = \overline{1, K_1^{def}}\},\ F_2\ (X)\ = \{f_k\ (X), k = \overline{1, K_2^{def}}\}$ – множество функций $max$ и $min$ соответственно; $I_1\ (X) = \{\{f_k\ (X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\},\ I_2\ (X) = \{\{f_k\ (X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_2^{unc}}\}$ – множество матриц $max$ и $min$ соответственно; $(definiteness)$, $K_1^{unc}. K_2^{unc}$ $(uncertainty)$ множество критериев $max$ и $min$ сформированные в условиях определенности и неопределенности;

$g_i\ (X), i = \overline{1, M}$ – вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование системы; они определяются протекающими в технической системе технологическими, физическими и тому подобными процессами;

в (129) $f_k^{min} \le f_k\ (X) \le f_k^{max}, k = \overline{1, K}$ – вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование технической системы;

в (129) $x_j^{min} \le x_j \le x_j^{max}, j = \overline{1, N}$ – параметрические ограничения.

Предполагается, что функции $f_k\,(X), k=\overline{1,K}$ дифференцируемы и выпуклы, $g_i\,(X), i=\overline{1,M}$ непрерывны, а заданное ограничениями (128) множество допустимых точек $\boldsymbol{S}$ не пусто и представляет собой компакт: $S=\{X \in R^n | G(X) \le 0, X^{min} \le X \le X^{max}\} \ne \emptyset$.

***9.3.2. Построение в условиях определенности в числовом виде.***

*Построение в условиях определенности* определяется функциональной зависимостью каждой характеристики и ограничений от параметров технической системы. В нашем примере известны характеристика (82), (83) и ограничения (81). Используя данные (81)- (83) построим двухкритериальную задачу нелинейного программирования в условиях определенности:

$$min\ f_5(X) = 886.27 + 26.28x_1 + 33.95x_2 - 27.445x_3 - 49.5x_4 - 0.8451x_1x_2 + 0.5173x_1x_3 + 0.8219x_1x_4 - 0.1411x_2x_3 + 0.3593x_2x_4 - 0.0123x_3x_4 + 0.0438x_1^2 + 0.0401x_2^2 + 3.5281x_3^2 + 2.9103x_4^2, \quad (130)$$

$$max\ f_6(X) = 41.758 + 0.6598x_1 + 0.4505x_2 - 0.3094x_3 - 1.8334x_4 - 0.011x_1x_2 - 0.0069x_1x_3 + 0.0161x_1x_4 - 0.0143x_2x_3 + 0.0134x_2x_4 - 0.0005x_3x_4 - 0.0003x_1^2 - 0.0002x_2^2 + 0.0279x_3^2 + 0.1033x_4^2, \quad (131)$$

при ограничениях: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 120, \quad (132)$

$$20.0 \le x_1 \le 80.0, 0.0 \le x_2 \le 60.0, 2.0 \le x_3 \le 8.0, 2.0 \le x_4 \le 8.0. \quad (133)$$

Эти данные в дальнейшем используются при построении математической модели системы.

***9.3.3. Построение модели системы в условиях неопределенности***

Построение модели технической системы в условиях неопределенности состоит в использовании качественных и количественных описаний технической системы, полученных экспериментальных данных по принципу “вход-выход” в таблице 1. Преобразование информации (исходных данных): $f_1(x_i, i=\overline{1,M}),\ f_2(x_i, i=\overline{1,M}),\ f_3(x_i, i=\overline{1,M}),\ f_4(x_i, i=\overline{1,M})$

В функциональный вид: $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$ осуществляется путем использования математических методов (регрессионного анализа).

Исходные данные таблицы 1 сформированы в системе MATLAB в виде матрицы:

$$I = |X, F| = \{x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4}, f_{i1}, f_{i2}, f_{i3}, f_{i4}, i=\overline{1,M}\}. \quad (134)$$

Для каждого набора экспериментального данных $f_k, k=1,2,3,4$ строится функция регрессии методом наименьших квадратов $\mathbf{min}\sum_{i=1}^{M}(y_i - \overline{y_i})^2$ в системе MATLAB. Для этого формируется полином $A_k$, определяющий взаимосвязь параметров $X_i = \{x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4}\}$ и функции $\overline{y_{ki}} = f\,(X_i, A_k), k = 2,3$ Результатом является система коэффициентов $A_k=\{A_{0k}, A_{1k}, \dots, A_{14k}\}$, которые определяют коэффициенты квадратичного полинома:

$$f_k(X,A) = A_{0k} + A_{1k}x_1 + A_{2k}x_2 + A_{3k}x_3 + A_{4k}x_4 + A_{5k}x_1x_2 + A_{6k}x_1x_3 + A_{7k}x_1x_4 + A_{8k}x_2x_3 + A_{9k}x_2x_4 + A_{10k}x_3x_4 + A_{11k}x_1^2 + A_{12k}x_2^2 + A_{13k}x_3^2 + A_{14k}x_4^2, k = 2,3. \quad (135)$$

Программное обеспечение полиномиальной аппроксимации с четырьмя переменными и четырнадцатью факторами представлено в [12]. В итоге экспериментальные данные таблицы 1 преобразуются систему коэффициентов четырёх функции вида (15) в виде таблицы:

Ao= [269.8673 795.7195 39.7581 17.5032 % $A_{0k}$ (136)

-1.8746 23.8932 0.6598 -0.0081 %$A_{1k}$

-2.9115 30.8660 0.4493 -0.7005 %$A_{2k}$

8.9389 -25.8586 -0.3094 -0.3605 %$A_{3k}$

10.9366 -45.0026 -1.8334 0.9769 %$A_{4k}$

0.0807 -0.7683 -0.0110 0.0138 %$A_{5k}$

-0.0517 0.4703 -0.0069 0.0708 %$A_{6k}$

-0.1413 0.7472 0.0161 -0.0001 %$A_{7k}$

0.0619 -0.1283 -0.0143 0.0436 %$A_{8k}$
-0.0868 0.3266 0.0134 0.0002 %$A_{9k}$
0.0030 -0.0112 -0.0005 0.0005 %$A_{10k}$
0.0119 0.0398 -0.0003 -0.0018 %$A_{11k}$
0.0098 0.0365 -0.0002 0.0029 %$A_{12k}$
-0.2028 3.2074 0.0279 0.0050 %$A_{13k}$
-0.4188 2.6457 0.1033 -0.0259]; %$A_{14k}$
Rj = [0.6115 0.7149 0.6551 0.9017];
RRj= [0.3740 0.5111 0.4292 0.8130];

На основе Ao (1) Ao (2) Ao (3) Ao (4) строятся функции $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$, которые с учетом полученных коэффициентов примут вид:

$max\ f_1(X)\equiv$ 269.86-1.8746 $x_1$ -2.9115 $x_2$ +8.9389 $x_3$ +10.936 $x_4$ +0.0807 $x_1x_2$ -0.0517 $x_1x_3$ -0.1413$x_1x_4$+ 0.0619$x_2x_3$-0.0868$x_2x_4$+0.003$x_3x_4$+0.0119$x_1^2$+0.0098$x_2^2$-0.2028$x_3^2$ -0.4188$x_4^2$, (137)

$min\ f_2(X)\equiv$ 795.72 +23.89 $x_1$ +30.866 $x_2$ -25.8586 $x_3$ -45.0026 $x_4$ -0.7683 $x_1x_2$ +0.4703 $x_1x_3$ +0.7472$x_1x_4$-0.1283$x_2x_3$+0.3266$x_2x_4$-0.0112$x_3x_4$+0.0398$x_1^2$+0.0365$x_2^2$ +3.2$x_3^2$+2.6457$x_4^2$, (138)

$max\ f_3(X)\equiv$39.7581 +0.6598$x_1$ +0.4493$x_3$ -0.3094$x_3$ -1.8334$x_4$ -0.0110$x_1x_2$ -0.0069$x_1x_3$ + 0.0161$x_1x_4$-0.0143$x_2x_3$+0.0134$x_2x_4$-0.0005$x_3x_4$-0.0003$x_1^2$-0.0002$x_2^2$+0.0279$x_3^2$+0.1033$x_4^2$, (139)

$min\ f_4(X)\equiv$17.5032 -0.0081$x_1$ -0.7005$x_2$ -0.3605$x_3$ +0.9769$x_4$ +0.0138$x_1x_2$ +0.0708$x_1x_3$ -0.0001$x_1x_4$+0.0436$x_2x_3$+0.0002$x_2x_4$+0.0005$x_3x_4$ -0.0018$x_1^2$+0.0029$x_2^2$+0.005$x_3^2$-0.0259$x_4^2$, (140)

при ограничениях: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 120$, (141)

$20.0 \le x_1 \le 80.0, 0.0 \le x_2 \le 60.0, 2.0 \le x_3 \le 8.0, 2.0 \le x_4 \le 8.0.$ (142)

Минимальные и максимальные значения экспериментальных данных $x_1, \dots, x_4$ представлены в нижней части таблицы 2. Минимальные и максимальные значения функций $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$ незначительно отличаются от экспериментальных данных. Индекс корреляции и коэффициенты детерминации представлены в нижних строках таблицы 2.

Результаты регрессионного анализа (135), (136) в дальнейшем используются при построении математической модели технической системы.

***9.3.4. Построение модели системы в условиях определенности и неопределенности***

Для построения математической модели технической системы используем: функции, полученные условиях определенности (130), (131) и неопределенности (135), (136), параметрические ограничения (132). Функции (90), (91), (95), (96) рассматриваем как критерии, определяющие целенаправленность функционирования системы. Множество критериев *K*=6 включают три критерия $f_1(X) \to max, f_3(X) \to max, f_6(X) \to max$ и три $f_2(X) \to min, f_4(X) \to min, f_5(X) \to min$ . В итоге модель функционирования технической системы представим шестимерной задачи – векторной задачей математического программирования:

$opt\ F\ (X) = \{\max F_1\ (X) = \{max\ f_1(X)\equiv 269.86 - 1.8746x_1 - 2.9115x_2 + 8.9389x_3 + 10.936x_4 + 0.0807x_1x_2 - 0.0517x_1x_3 - 0.1413x_1x_4 + 0.0619x_2x_3 - 0.0868x_2x_4 + 0.003x_3x_4 + 0.0119x_1^2 + 0.0098x_2^2 - 0.2028x_3^2 - 0.4188x_4^2,$ (143)

$max\ f_3(X)\equiv$39.7581 +0.6598$x_1$ +0.4493$x_3$ -0.3094$x_3$ -1.8334$x_4$ -0.0110$x_1x_2$ -0.0069$x_1x_3$ + 0.0161$x_1x_4$-0.0143$x_2x_3$+0.0134$x_2x_4$-0.0005$x_3x_4$-0.0003$x_1^2$-0.0002$x_2^2$+0.0279$x_3^2$+0.1033$x_4^2$, (144)

$max\ f_6(X) = 41.758 + 0.6598x_1 + 0.4505x_2 - 0.3094x_3 - 1.8334x_4 - 0.011x_1x_2 - 0.0069x_1x_3 + 0.0161x_1x_4 - 0.0143x_2x_3 + 0.0134x_2x_4 - 0.0005x_3x_4 - 0.0003x_1^2 - 0.0002x_2^2 + 0.0279x_3^2 + 0.1033x_4^2\},$ (145)

$\min F_1\ (X) = \{min\ f_2(X) \equiv 795.72\ +23.89x_1 + 30.866x_2\ -25.8586x_3\ -45.0026x_4\ -0.7683x_1x_2 + 0.4703\ x_1x_3\ +0.7472\ x_1x_4\ -0.1283\ x_2x_3\ +0.3266\ x_2x_4\ -0.0112\ x_3x_4\ +0.0398\ x_1^2\ +0.0365\ x_2^2 + 3.2x_3^2 + 2.6457x_4^2,$ (146)

$min\ f_4(X) \equiv 17.5032\ -0.0081x_1\ -0.7005x_2\ -0.3605x_3\ +0.9769x_4\ +0.0138x_1x_2\ +0.0708x_1x_3\ - 0.0001\ x_1x_4\ +0.0436\ x_2x_3\ +0.0002\ x_2x_4\ +0.0005\ x_3x_4\ -0.0018\ x_1^2\ +0.0029\ x_2^2\ +0.005\ x_3^2\ -0.0259\ x_4^2$ ,

$min\ f_5(X) = 886.27 + 26.28x_1 + 33.95x_2 - 27.445x_3 - 49.5x_4 - 0.8451x_1x_2 + 0.5173x_1x_3 + 0.8219x_1x_4\ - 0.1411x_2x_3 + 0.3593x_2x_4 -\ 0.0123x_3x_4 + 0.0438x_1^2 + 0.0401x_2^2 + 3.5281x_3^2 + 2.9103x_4^2\}\},$ (147)

при ограничениях: $x_1 +\ x_2 +\ x_3 +\ x_4 = 120,$ (148)

$20.0 \le x_1 \le 80.0, 0.0 \le x_2 \le 60.0, 2.0 \le x_3 \le 8.0, 2.0 \le x_4 \le 8.0.$ (149)

Векторная задача (143)- (149) представляет численную модель принятия оптимального решения в условиях определенности и неопределенности в совокупности.

**9.4. 3 этап. Моделирование и выбор оптимальных параметров технической системы на базе векторной задачи с равнозначными критериями**

Для решения векторных задач математического программирования (143)- (149) представлены методы, основанные на аксиоматике нормализации критериев и принципе гарантированного результата, вытекающие из аксиомы 1 и принципа оптимальности 1.

Алгоритм представим в виде ряда шагов.

*Шаг 1*. Решение задачи (143)- (149) по каждому критерию отдельно, при этом используется функция *fmincon* (…) системы MATLAB, обращение к функции *fmincon* (…) рассмотрено в [18, 19]. В результате расчета по каждому критерию получаем точки оптимума: $X_k^*$ и $f_k\ (X_k^*)$,, $k=\overline{1,K}$, $\boldsymbol{K}$=6– величины критериев в этой точке, т. е. наилучшее решение по каждому критерию:

Критерий 1: $X_1^* = \{x_1 = 46.76, x_2 = 43.23, x_3 = 8, x_4 = 2\}, f_1^* = f_1\ (X_1^*)\ = -323.9;$ (150)

Критерий 2: $X_2^* = \{x_1 = 25, x_2 = 23.65, x_3 = 4.98, x_4 = 6.307\}, f_2^* = f_2\ (X_2^*)\ = 1696.7;$

Критерий 3: $X_3^* = \{x_1 = 80.0, x_2 = 0.0, x_3 = 2.0, x_4 = 8.0\}, f_3^* =\ f_3\ (X_3^*)\ = -91.25;$

Критерий 4: $X_4^* = \{x_1 = 20.0, x_2 = 58.08, x_3 = 2.0, x_4 = 2.0\},\ f_4^* = f_4\ (X_4^*)\ = 10.815.$

Критерий 5: $X_5^* = \{x_1 = 25.2, x_2 = 23.69, x_3 = 4.8, x_4 = 6.75\}, f_5^* = f_5\ (X_5^*) = 1882.3;$

Критерий 6: $X_6^* = \{x_1 = 80.0, x_2 = 0.0, x_3 = 2.0, x_4 = 8.0\},\ f_6^* = f_6(Y_6^*) = -93.25.$

Ограничения (149) и точки оптимума $X_1^*, X_2^*, \dots, X_6^*$ в координатах $\{x_1, x_2\}$ представлены на рис. 13.

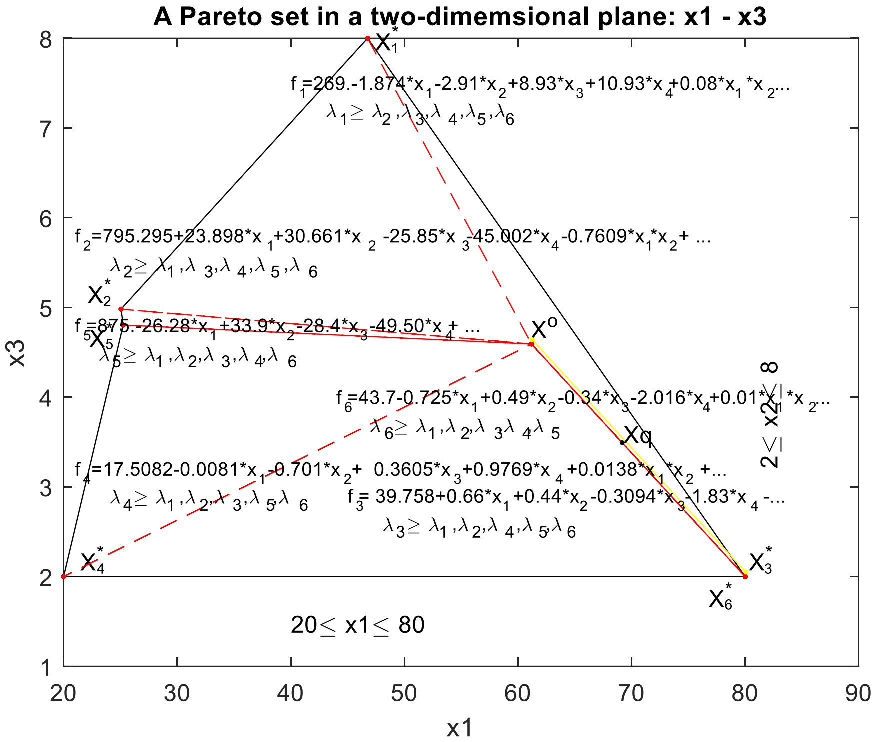


Рис. 13. Множество Парето, $\boldsymbol{S}^o\subset\boldsymbol{S}, X_1^*, \ldots, X_6^*$ в двухмерные системы координат $\{x_1, x_3\}$.

*Шаг 2*. Определяем наихудшую величину каждого критерия (антиоптимум): $X_k^0$ и $f_k^0 = f_k\,(X_k^0), k=\overline{1,K}, \boldsymbol{K}$=4. Для чего решается задача (143)- (149) для каждого критерия $k=\overline{1,K_1}$ на минимум, для каждого критерия $k=\overline{1,K_2}$ на максимум. В результате решения получим: $X_k^0 = \{x_j, j=\overline{1,N}\}$ – точка оптимума по соответствующему критерию, $k=\overline{1,K}$ ; $f_k^0 = f_k\,(X_k^0)$ – величина $k$-го критерия в точке, $X_k^0, k=\overline{1,K}$, (верхний индекс ноль):

Критерий 1: $X_1^0 = \{x_1 = 80, x_2 = 0, x_3 = 2., x_4 = 8.\}, f_1^0 = -175.15$; (151)

Критерий 2: $X_2^0 = \{x_1 = 80, x_2 = 0, x_3 = 8, x_4 = 8.0\}, f_2^0 = f_2(X_2^0) = -3548.08$;

Критерий 3: $X_3^0 = \{x_1 = 20.0, x_2 = 25.37, x_3 = 8, x_4 = 6.625\}, f_3^0 = f_3\,(X_3^0) = 50.57$;

Критерий 4: $X_4^0 = \{x_1 = 62.71, x_2 = 22.88, x_3 = 6.39, x_4 = 20\}, f_4^0 = f_4(X_4^0) = -61.35$;

Критерий 5: $X_5^* = \{x_1 = 80.0, x_2 = 0.0, x_3 = 8.0, x_4 = 8.0\}, f_5^0 = f_5(X_5^0) = -3921.8$;

Критерий 6: $X_6^0 = \{x_1 = 20.0, x_2 = 25.36, x_3 = 8.0, x_4 = 6.63\}, f_6^0 = f_6(Y_6^0) = 52.604$.

*Шаг 3*. Выполняется системный анализ множества точек, оптимальных по Парето, (т.е. анализ по каждому критерию). В точках оптимума $X^* = \{X_1^*, X_2^*, \ldots, X_6^*\}$определяются величины целевых функций $F\,(X^*) = \left\|f_q\,(X_k^*)\right\|_{q=\overline{1,K}}^{k=\overline{1,K}}$, $F = (d_1\, d_2\, d_3\, d_4\, d_5\, d_6)^T$ - вектор отклонений по каждому критерию на допустимом множестве $\boldsymbol{S}$: $d_k = f_k^* - f_k^0, k=\overline{1,6}$, и матрица относительных оценок $\lambda\,(X^*) = \left\|\lambda_q\,(X_k^*)\right\|_{q=\overline{1,K}}^{k=\overline{1,K}}$, где $\lambda_k\,(X) = \,(f_k^* - f_k^0)/d_k$.

$$F\,(X^*) = \left\|\begin{matrix} 324.0 & 1997.9 & 58.0 & 57.1 & 2216.7 & 60.0 \\ 272.3 & 1696.8 & 53.8 & 26.9 & 1882.4 & 55.8 \\ 175.2 & 3285.6 & 91.3 & 22.1 & 3627.1 & 93.3 \\ 221.5 & 2266.4 & 62.0 & 10.8 & 2506.0 & 64.0 \\ 270.9 & 1696.9 & 54.0 & 26.5 & 1882.3 & 56.0 \\ 175.2 & 3285.6 & 91.3 & 22.1 & 3627.1 & 93.3 \end{matrix}\right\|, d_k = \left\|\begin{matrix} 148.8 \\ -1851.3 \\ 40.7 \\ -50.5 \\ -2039.5 \\ 40.6 \end{matrix}\right\|. \quad (152)$$

$$\lambda\,(X^*) = \left\|\begin{matrix} \mathbf{1.0000}\ 0.8373\ 0.1814\ 0.0843\ 0.8361\ 0.1821 \\ 0.6527\ \mathbf{1.0000}\ 0.0787\ 0.6825\ 1.0000\ 0.0787 \\ 0\ 0.1418\ \mathbf{1.0000}\ 0.7774\ 0.1445\ 1.0000 \\ 0.3114\ 0.6923\ 0.2804\ \mathbf{1.0000}\ 0.6942\ 0.2816 \\ 0.6433\ 1.0000\ 0.0832\ 0.6898\ \mathbf{1.0000}\ 0.0832 \\ 0.0000\ 0.1418\ 1.0000\ 0.7774\ 0.1445\ \mathbf{1.0000} \end{matrix}\right\|. \quad (153)$$

Анализ величин критериев в относительных оценках показывает, что в точках оптимума $X^* = \{X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^*, X_6^*\}$ (по диагонали) относительная оценка равна единице. Остальные критерии значительно меньше единицы. Требуется найти такую точку (параметры), при которых относительные оценки наиболее близки к единице. На решение этой проблемы направлено решение λ-задачи – шаг 4, 5.

*Шаг 4*. Построение λ-задачи осуществляется в два этапа: первоначально строится максиминная задача оптимизации с нормализованными критериями:

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{X\in S}\boldsymbol{min}_{k\in K}\lambda_k\,(X), G\,(X)\le 0, X\ge 0, \quad (154)$$

которая на втором этапе преобразуется в задачу математического программирования (λ-задача):

$$\lambda^o = max\,\lambda, \quad (155)$$

При ограничениях $\lambda - \frac{f_1\,(X)-f_1^0}{f_1^*-f_1^0} \le 0, \lambda - \frac{f_3\,(X)-f_3^0}{f_3^*-f_3^0} \le 0, \lambda - \frac{f_3\,(X)-f_3^0}{f_3^*-f_3^0} \le 0,$ (156)

$$\lambda - \frac{f_2\,(X)-f_2^0}{f_2^*-f_2^0} \le 0,\ \lambda - \frac{f_4\,(X)-f_4^0}{f_4^*-f_4^0} \le 0,\ \lambda - \frac{f_5\,(X)-f_5^0}{f_4^*-f_4^0} \le 0, \quad (157)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 120, \quad (158)$$

$$0\le\lambda\le 1, \quad (159)$$

$$20.0 \le x_1 \le 80.0, 0.0 \le x_2 \le 60.0, 2.0 \le x_3 \le 8.0, 2.0 \le x_4 \le 8.0.. \quad (160)$$

где вектор неизвестных имеет размерность *N*+1: $\boldsymbol{X} = \{x_1, \dots, x_N, \lambda\}$; функции $f_1(X), f_2(X), \dots, f_6(X)$ соответствуют (155)- (160) соответственно. Подставив числовые значения функций $f_1(X), f_2(X), \dots, f_4(X)$, мы получим λ-задачу следующего вида:

$$\lambda^o = max\,\lambda, \quad (161)$$

ограничения $\lambda - \frac{269.86-1.8746x_1-\dots-0.2028x_3^2-0.4188x_4^2-f_1^0}{f_1^*-f_1^0} \le 0, \dots,$ (162)

$$\lambda - \frac{39.7581+0.6598x_1+0.4493x_3-\cdots+0.0279x_3^2+0.1033x_4^2-f_3^0}{f_3^*-f_3^0} \le 0, \dots, \quad (163)$$

$$\lambda - \frac{41.758+0.6598x_1+0.4505x_2-\dots+0.0279x_3^2+0.1033x_4^2-f_6^0}{f_6^*-f_6^0} \le 0, \quad (164)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 120, \quad (165)$$

$$0\le\lambda\le 1, 20.0 \le x_1 \le 80.0, 0.0 \le x_2 \le 60.0, 2.0 \le x_3 \le 8.0, 2.0 \le x_4 \le 8.0. \quad (166)$$

[Xo,Lo]=*fmincon* ('Z_TehnSist_4Krit_L',X0,Ao,bo,Aeq,beq,lbo,ubo,'Z_TS_LConst',options)

В результате решения ВЗМП (137)- (141) при равнозначных критериях и соответствующей ей λ-задачи (161)- (166) получили:

$$\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\} = \{X^o = \{x_1 = 61.188, x_2 = 12.219, x_3 = 4.591, x_4 = 2.0, \lambda^o = 0.5196\}, \quad (167)$$

точку оптимума – конструктивные параметры технической системы, которая представлена на рис. 13; $f_k(X^o), k = \overline{1,K}$ – величины критериев (характеристик технической системы):

$\{f_1(X^o) = 252.47, f_2\,(X^o) = 2308.6, f_3\,(X^o) = 71.709, f_4\,(X^o) = 35.09, f_5\,(X^o) = 2555.0, f_6\,(X^o) = 73.723\};$ (168)

$\lambda_k(X^o), k = \overline{1,K}$ – величины относительных оценок

$\{\lambda_1(X^o) = 0.5196, \lambda_2(X^o) = 0.6695, \lambda_3(X^o) = 0.5196, \lambda_4(X^o) = 0.5196, \lambda_5(X^o) = 0.6702, \lambda_6(X^o) = 0.5196\};$ (169)

$\lambda^o = 0.5196$ – это максимальный нижний уровень среди всех относительных оценок, измеренный в относительных единицах:

$$\lambda^o = min\,(\lambda_1(X^o), \lambda_2(X^o), \dots, \lambda_6(X^o)) = 0.5196. \quad (170)$$

$\lambda^o$ – так же называют гарантированным результатом в относительных единицах, т. е. $\lambda_k(X^o)$ и соответственно характеристики технической системы $f_k(X^o)$ нельзя улучшить, не ухудшая при этом другие характеристики.

Заметим, что в соответствии с теоремой с 1, в точке $\boldsymbol{X^o}$ критерии 1, 3, 4 и 6 противоречивы. Это противоречие определяется равенством $\lambda_1(X^o) = \lambda_3(X^o) = \lambda_4(X^o) = \lambda_6(X^o) = \lambda^o = 0.5196$,, а остальные критерии неравенством $\{\lambda_2(X^o) = 0.6695, \lambda_5(X^o) = 0.6702\} > \lambda^o$.

Таким образом, теорема 1 служит основой для определения правильности решения векторной задачи. В векторной задаче математического программирования, как правило, для двух критериев выполняется равенство: $\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_p(X^o), q, p \in \boldsymbol{K}, X \in S$, (в нашем примере такие критерии 1, 3, 4, 6). А для других критериев определяется как неравенство.

**9.5. 4 этап. Построение геометрической интерпретации результатов решения в трехмерной системе координат в относительных единицах**

В допустимом множестве точек $\boldsymbol{S}$, образованных ограничениями (161)- (166), точки оптимума $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^*, X_6^*$, объединенных в контур, представляют множество точек, оптимальных по Парето, $\boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$, представлен на рис 13. Координаты этих точек, а также характеристики технической системы в относительных единицах $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \dots, \lambda_6(X)$ показаны на рис. 14 в трех мерном пространстве $x_1\, x_2$ и λ, где третья ось λ – относительная оценка.

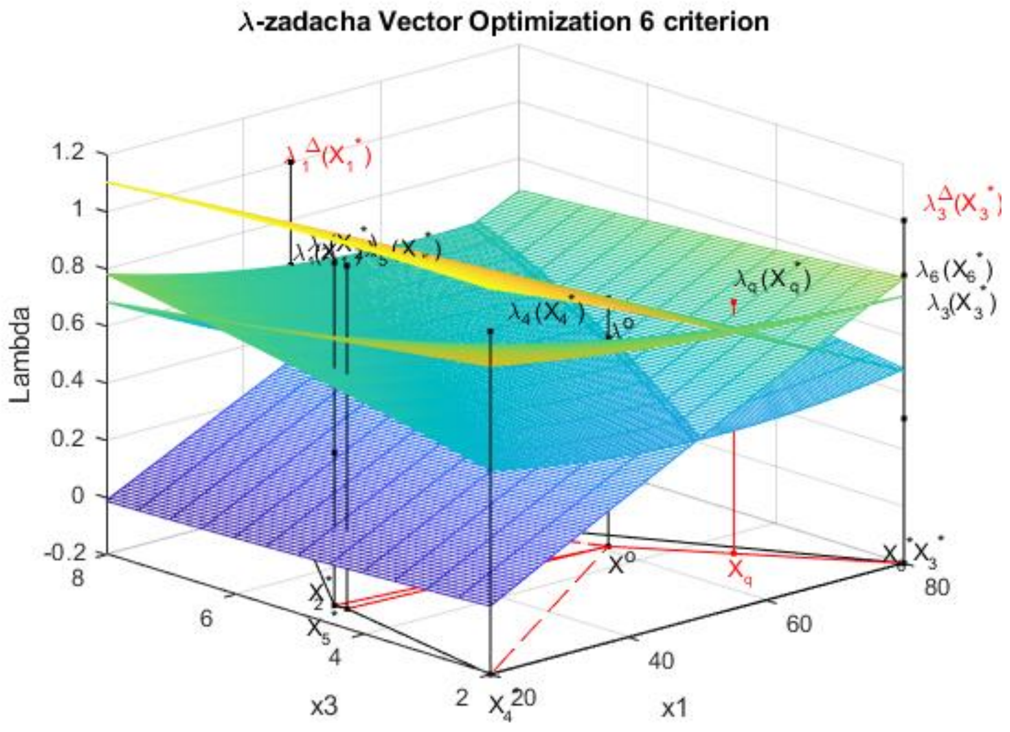


**Figure 14.** Решение λ-задачи в трехмерной системе координат $x_1\, x_3$ и λ

**Discussion**. Глядя на рисунок 14, мы можем представить изменения всех функций $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \dots, \lambda_6\ (X)$ в четырехмерном пространстве.

Рассмотрим, например, оптимальную точку $X_3^*$. Функция $\lambda_3\ (X)$ сформирована из функции $f_3\ (X)$с переменными координатами $\{x_1\ x_2\}$ и с постоянными координатами {$x_3$=12.219, $x_4$=2.0}, взятые из оптимальной точки $X^o$ (167). В точке $X_3^*$ относительная оценка $\lambda_3\ (X_3^*) = 0.83$ – показана на рис. 6 черной точкой. Но мы знаем, что относительная оценка $\lambda_3\ (X_3^*)$ полученная из функции $f_3\ (X_3^*)$ на третьем шаге равна единице, обозначим ее как $\lambda_3^\Delta\ (X_3^*) = 1$ – показана на рис. 14 красной точкой.

Разность между $\lambda_3^\Delta\ (X_3^*) = 1$ и $\lambda_3\ (X_3^*) = 0.83$ является ошибкой $\Delta = 0.17$ перехода от четырех мерной (а в общем случае $N$-мерной) к двухмерной области. Аналогично показана точка $X_1^*$ и соответствующие относительные оценки $\lambda_1\ (X_1^*)$ и $\lambda_1^\Delta\ (X_1^*)$.

*Таким образом*, впервые в отечественной и зарубежной практике показан переход и его геометрическая иллюстрация от $N$-мерного к двухмерному измерению функции в векторных задачах математического программирования с соответствующими ошибками.

**9.6. 5 этап. Решение задачи векторной оптимизации с приоритетом критерия**

Лицом, принимающим решения, как правило, является конструктор системы**.**

*Шаг* 1. Решение векторной задачи при равнозначных критериях. Алгоритм решения векторной задачи представлен на стадии 3. Численные результаты решения векторной задачи представлены выше.

Множество точек, оптимальных по Парето $\boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$ находится между оптимальными точками $X_1^*\ X^o\ X_3^*\ X_6^*\ X^o\ X_4^*\ X^o\ X_5^*\ X^o X_2^*\ X^o\ X_1^*$. Мы проведем анализ множества точек Парето $\boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$. Для этой цели мы соединим вспомогательные точки: $X_1^*\ X_3^*\ X_4^*\ X_2^*\ X_1^*$с точкой $X^o$, которая условно представляет центр множества Парето. В результате получили четыре подмножеств точек $X \in \boldsymbol{S_q^o} \subset \boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}, q = \overline{1,4}$. Подмножество $\boldsymbol{S_1^o} \subset \boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$ характеризуется тем, что относительная оценка $\lambda_1 \geq \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, то есть в поле первого критерия $\boldsymbol{S_1^o}$ имеет приоритет над остальными. Подобно $\boldsymbol{S_2^o}, \boldsymbol{S_3^o}, \boldsymbol{S_4^o}$- подмножества точек, где второй, третий и четвертый критерий имеет приоритет над другими соответственно. Множество точек, оптимальных по Парето, будем обозначать $\boldsymbol{S^o} = \boldsymbol{S_1^o} \cup \boldsymbol{S_2^o} \cup \boldsymbol{S_3^o} \cup \boldsymbol{S_4^o} \cup \boldsymbol{S_5^o} \cup \boldsymbol{S_6^o}$ Координаты всех полученных точек и относительные оценки представлены в двумерном пространстве $\{x_1\ x_2\}$ на рис. 13. Эти координаты показаны в трех измеренных пространствах $\{x_1\ x_2\ \lambda\}$ на рис. 14, где третья ось λ- относительная оценка.

Ограничения набора точек, оптимальных по Парето, на рис. 6 он снижен до -0,5 (чтобы были видимы ограничения). Эта информация также является основой для дальнейшего исследования структуры множества Парето. Лицо, принимающее решения, как правило, является разработчиком системы.

Если результаты решения векторной задачи с равнозначными критериями не удовлетворяют лицо, принимающее решение, то выбор оптимального решения осуществляется из какого-либо подмножества точек $\boldsymbol{S_1^o}, \boldsymbol{S_2^o}, \boldsymbol{S_3^o}, \boldsymbol{S_4^o} \cup \boldsymbol{S_5^o} \cup \boldsymbol{S_6^o}$. Эти подмножества точек Парето показаны на рис. 13 в виде функций $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X), f_5(X), f_6(X)$.

*Шаг* 2. Выбор приоритетного критерия $q \in \boldsymbol{K}$.

Из теории известно, что в оптимальной точке $X^o$ всегда имеется два наиболее противоречивых критерия, $q \in \boldsymbol{K}$ и $p \in \boldsymbol{K}$, для которых в относительных единицах выполняется точное равенство: $\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_p(X^o), q, p \in \boldsymbol{K}, X \in \boldsymbol{S}$,

а для остальных выполняется неравенства: $\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), \forall k \in \boldsymbol{K}, q \neq p \neq k$.

В модели ТС (143)- (149) и соответствующей λ-задачи (161)- (166) такими критериями являются первый и третий:

$$\lambda^o = \lambda_1(X^o) = \lambda_3(X^o) = 0.51958 \quad (171)$$

т.е. выполняется числовая симметрия. Эту симметрию покажем на рис. 15, где представлены функции $\lambda_1$ $(X)$ и $\lambda_3$ $(X)$ отдельно со стороны оптимальной точки $\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\}$.

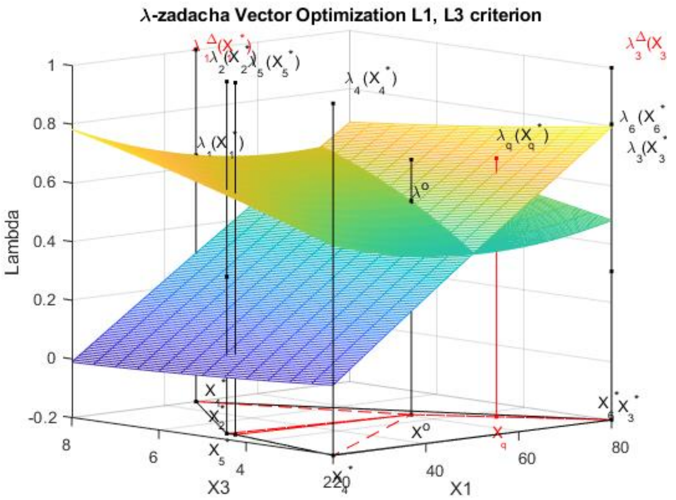


Рис. 15. Решение λ-задачи ($\lambda_1(X)$ и $\lambda_3(X)$) в трехмерной системе координат $x_1$ $x_3$ и λ. $\lambda_1(X^o) = 0.7372, \lambda_3(X^o) = 0.5196$.

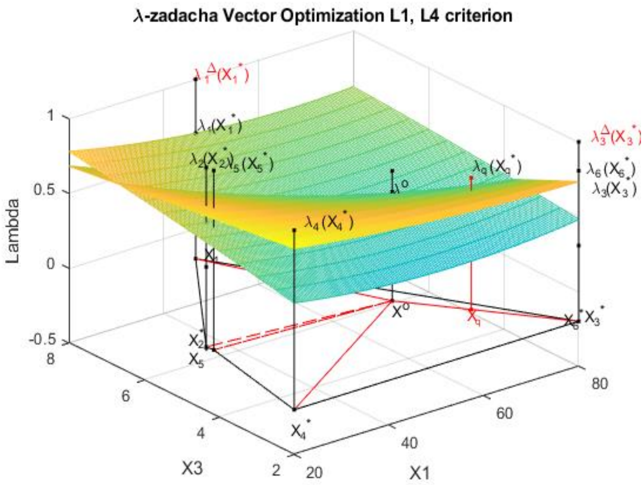


Рис. 16. Решение λ-задачи ($\lambda_1(X)$ и $\lambda_4(X)$) в трехмерной системе координат $x_1$ $x_3$ и λ. $\lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o) = 0.5196$ (точно на пересечении).

Для сравнения аналогично представим функции наиболее противоречивые критерии $\lambda_1(X)$ и $\lambda_4(X)$ отдельно со стороны оптимальной точки $\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\}$. На рисунках 15 и 16 показаны все точки и данные, о которых говорилось на рис. 14.

Как правило, из этой пары $\lambda^o = \lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o) = 0.5196$ противоречивых критериев выбирается критерий, который ЛПР хотел бы улучшить. Такой критерий называется «приоритетным критерием», обозначим его $q = 3 \in \boldsymbol{K}$. Этот критерий исследуется во взаимодействии с первым критерием $q = 1 \in \boldsymbol{K}$. Мы исследуем эти два критерия из всего множества критериев $\boldsymbol{K} = 6$, показанных на рис. 15.

На дисплей выдается сообщение:

q=input ('Введите приоритетный критерий (номер) *q*= ') – Ввели критерий *q*=3.

*Шаг 3*. Определяются числовые пределы изменения величины приоритета критерия $q = 3 \in \boldsymbol{K}$. Для приоритетного критерия $q = 3 \in \boldsymbol{K}$ определяются изменения числовых пределов в натуральных единицах при переходе из точки оптимума $X^o$ (116) в точку $X_q^*$, полученную на первом шаге. Данные о критерии *q*=3 выдаются на экран:

$$f_q(X^o) = 71.709 \leq f_q(X) \leq 91.25 = f_q(X_q^*), q \in \boldsymbol{K}. \quad (172)$$

В относительных единицах критерий *q=3* изменяется в следующих пределах:

$\lambda_q(X^o) = 0.5196 \leq \lambda_q(X) \leq 1 = \lambda_q(X_q^*), q = 3 \in \boldsymbol{K}$. Эти данные анализируется.

*Шаг* 4. Выбор величины приоритетного критерия $q \in \boldsymbol{K}$. (Decision-making).

На сообщение: «Введите величину приоритетного критерия *fq*=» – вводим, например, $f_q$=80.

*Шаг* 5. *Вычисляется относительная оценка*.

Для выбранной величины приоритетного критерия $f_q = 80$ вычисляется относительная оценка: $\lambda_q = \frac{f_q - f_q^0}{f_q^* - f_q^0} = \frac{80-71.709}{91.25-71.709} = 0.7234$,

которая при переходе от точки $X^o$ к точке $X_q^*$ лежит в пределах:

$$0.5196 = \lambda_3\ (X^o) \leq \lambda_3 = 0.5979 \leq \lambda_3\ (X_3^*) = 1, q \in \boldsymbol{K}. \quad (173)$$

*Шаг* 6. Вычислим коэффициент линейной аппроксимации

Предполагая линейный характер изменения критерия $f_q\ (X)$ в (172) и соответственно относительной оценки $\lambda_q$ в (173), используя стандартные приемы линейной аппроксимации, вычислим коэффициент пропорциональности между $\lambda_q\ (X^o)$, $\lambda_q$, который назовем ρ:

$$\rho = \frac{\lambda_q - \lambda_q\ (X^o)}{\lambda_q\ (X_q^*) - \lambda_q\ (X^o)} = \frac{0.7234-0.5196}{1-0.5196} = 0.4243, q = 3 \in \boldsymbol{K}.$$

*Шаг 7*. Вычислим координаты приоритета критериев с размерностью $f_q$.

Предполагая линейный характер изменения вектора $X^q = \{x_1, x_2\}, q = 3$ определим координаты для точки с размерностью $fq$ =80 с относительной оценкой (173):

$$x_{\lambda=0.81}^{q=3} = \{x_1 = X^o(1) + \rho\left(X_q^*(1) - X^o(1)\right), x_2 = X^o(2) + \rho\left(X_q^*(2) - X^o(2)\right),$$

$$x_3 = X^o(3) + \rho\left(X_q^*(3) - X^o(3)\right), x_4 = X^o(4) + \rho\left(X_q^*(4) - X^o(4)\right)\},$$

где $X^o = \{X^o\ (1) = 61.188, x_2 = 12.219, x_3 = 4.591, x_4 = 2.0, \lambda^o = 0.5196\}$,

$X_3^* = \{x_1 = 80.0, x_2 = 0.0, x_3 = 2.0, x_4 = 8.0\}$.

Как результат решения мы получим точку с координатами:

$X^q = \{x_1 = 69.169, x_2 = 7.035, x_3 = 3.492, x_4 = 4.545\}$.

*Шаг 8*. Вычисление главных показателей точки $X^q$.

Для полученной точки $X^q$, вычислим:

все критерии в натуральных единицах $f_k\ (X^q) = \{f_k\ (X^q), k = \overline{1, K}\}$,

$f\ (X^q) = \{f_1\ (X^q) = 228.1, f_2\ (X^q) = 2638.5, f_3\ (X^q) = 78.3, f_4\ (X^q) = 31.1, f_5\ (X^q) = 2916.8, f_6\ (X^q) = 80.3\}$;

все относительные оценки критериев: $\lambda^q = \{\lambda_k^q, k = \overline{1,K}\}, \lambda_k\ (X^q) = \frac{f_k\ (X^q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}$:

$\lambda_k\ (X^q) = \{\lambda_1\ (X^q) = 0.3557, \lambda_2\ (X^q) = 0.4913, \lambda_3\ (X^q) = 0.6812, \lambda_4\ (X^q) = 0.5981, \lambda_5\ (X^q) = 0.4928, \lambda_6\ (X^q) = 0.6812\}$; минимальная относительная оценка: $\min\lambda\ (X^q) = \min_{k \in K}\ (\lambda_k\ (X^q)) = 0.3557$.

вектор приоритетов $P^q(X) = \{p_k^q = \frac{\lambda_q\ (X^q)}{\lambda_k\ (X^q)}, k = \overline{1, K}\}$:

$P^q = [p_1^3 = 1.9151, p_2^3 = 1.3865, p_3^3 = 1.0, p_4^3 = 1.1389, p_5^3 = 1.3824, p_6^3 = 1.0]$;

относительная оценка с соответствующим вектором приоритетов:

$\lambda_k\ (X^q) * P^q = \{p_1^3 * \lambda_1(X^q) = 0.6812, p_2^3 * \lambda_2(X^q) = 0.6812, p_3^3 * \lambda_3(X^q) = 0.6812, p_4^3 * \lambda_4\ (X^q) = 0.6812, p_5^3 * \lambda_5(X^q) = 0.6812, p_6^3 * \lambda_6\ (X^q) = 0.6812\}$;

минимальная относительная оценка:

$\lambda^{oo} = \min\ (p_1^3\lambda_1(X^q), p_2^3\lambda_2\ (X^q), p_3^3\lambda_3\ (X^q), p_4^3\lambda_4\ (X^q), p_5^3\lambda_5\ (X^q), p_6^3\lambda_6\ (X^q)) = 0.6812$.

Аналогично другие точки из области Парето $\boldsymbol{X_t^o} = \{\lambda_t^o, X_t^o\} \in \boldsymbol{S^o}$ могут быть получены.

***Анализ результатов***. Рассчитанная величина $f_q\ (X_t^o) = 78.3, q = 3 \in \boldsymbol{K}, q \in \boldsymbol{K}$ обычно не равна заданной $f_q = 80$. Ошибка выбора $\Delta f_q = |f_q\ (X_t^o) - f_q| = |78.3 - 80| = 1.7$ определяется ошибкой линейной аппроксимации: $\Delta f_{q\%} =\ 0.25\%$.

Если ошибка $\Delta f_q = |f_q\ (X_t^o) - f_q| = |78.3 - 80| = 1.7$, измеренная в натуральных единицах или в процентах $\Delta f_{q\%} = \frac{\Delta f_q}{f_q} * 100 =\ 0.25\%$, больше заданной $\Delta f, \Delta f_q > \Delta f$, то переходим к шагу 2, если $\Delta f_q \leq \Delta f$, то вычисления завершаются. *Конец*.

В процессе моделирования могут быть изменены параметрические ограничения (118)- (149) и функции, т. е. получено некоторое множество оптимальных решений. Из этого множества оптимальных решений выбираем окончательный вариант (процесс принятия решений).

В нашем примере окончательный вариант включает параметры:

$\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\} = \{X^o = \{x_1 = 61.188, x_2 = 12.219, x_3 = 4.591, x_4 = 2.0, \lambda^o = 0.5196\}$;

параметры технической системы при заданном приоритете критерия:

*q*=3: $X^q = \{x_1 = 69.169, x_2 = 7.035, x_3 = 3.492, x_4 = 4.545\}$.

**9.7. 6 этап. Геометрическая интерпретация результатов решение задачи векторной оптимизации в физических единицах в трехмерной системе координат.**

Мы представили параметры:

$\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\} = \{X^o = \{x_1 = 61.188, x_2 = 12.219, x_3 = 4.591, x_4 = 2.0, \lambda^o = 0.5196\}$

в двухмерной системе координат $x_1, x_2$ Рис. 13, трехмерной системе координат $x_1, x_2$ and λ in Рис. 14, 15, 16. Мы также представим эти параметры в физических единицах для каждой характеристики технической системы (критерия): $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X), f_5(X), f_6(X)$. Первая характеристика технической системы $f_1(X)$ в координатах $x_1, x_2$ представлена на рис. 17.

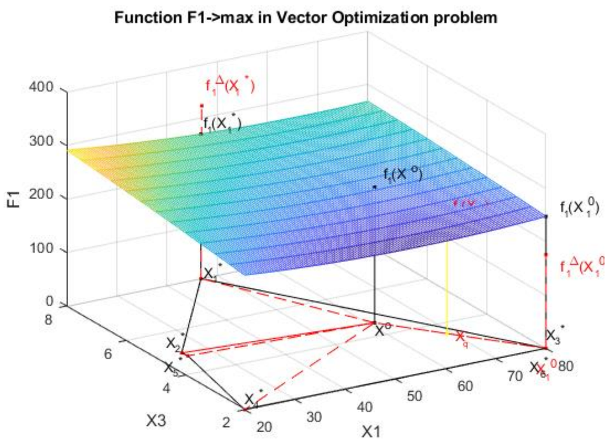


Рис. 17. Первая характеристика технической системы $f_1(X)$ в координатах $x_1, x_2$ в натуральных показателях

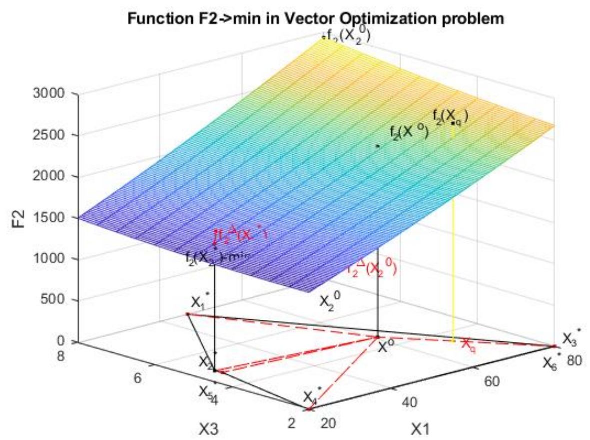


Рис. 18. Вторая характеристика технической системы $f_2(X)$ в координатах $x_1, x_2$в натуральных показателях

Показатели первой $f_1^\Delta\ (X_1^*)$, $f_1^\Delta(X_1^o)$ характеристикЬ технической системы (выделены красным цветом) определяют ошибки перехода от четырехмерной $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ к двухмерной $X^o = \{x_1, x_2\}$ системе координат.

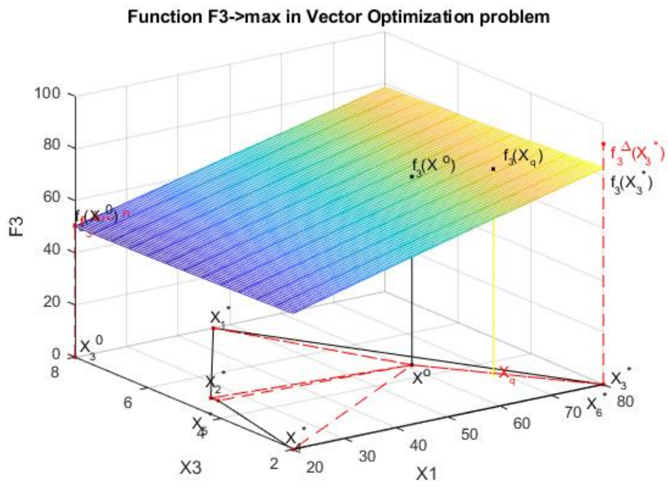


Рис. 19. Третья характеристика технической системы $f_3(X)$ в натуральных показателях

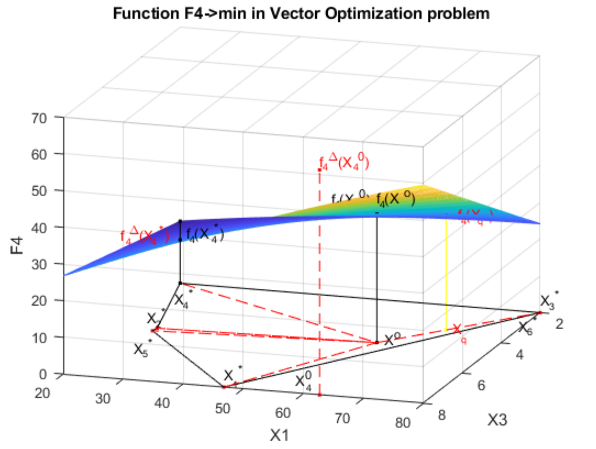


Рис. 20. Четвертая характеристика технической системы $f_4(X)$ в натуральных показателях

Вторая характеристика $f_2(X)$ в координатах $x_1, x_2$ представлена на рис. 18.

Показатели второй $f_2^{\Delta}(X_2^*)$, $f_2^{\Delta}(X_2^o)$ характеристик технической системы (выделены красным цветом) определяют ошибки перехода от четырехмерной $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ к двухмерной $X^o=\{x_1, x_2\}$ системе координат.

Аналогично представлены:

Третья характеристика технической системы $f_3(X)$ в координатах $x_1, x_3$ на рис. 19;

Четвертая характеристика технической системы $f_4(X)$ в координатах $x_1, x_3$ на рис. 20.

Пятая характеристика технической системы $f_5(X)$ в координатах $x_1, x_3$ на рис. 21.

Шестая характеристика технической системы $f_6(X)$ в координатах $x_1, x_3$ представлена на рис. 22.

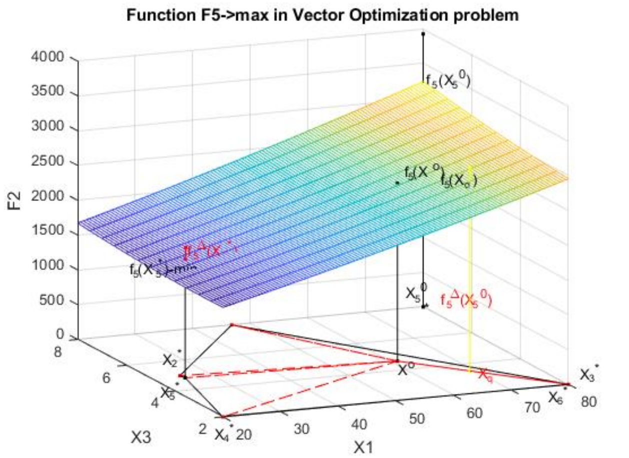


Рис. 21. Пятая характеристика технической системы $f_5(X)$ в натуральных показателях

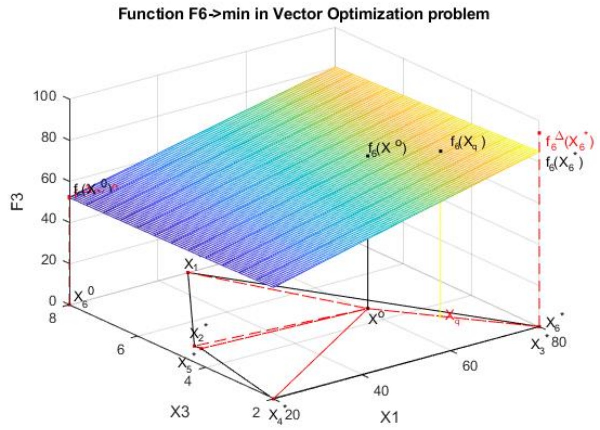


Рис. 22. Шестая характеристика технической системы $f_6(X)$ в натуральных показателях

Показатели третьей $f_3^{\Delta}(X_3^*)$, $f_3^{\Delta}(X_3^o)$, …, и шестой $f_6^{\Delta}(X_6^*)$, $f_6^{\Delta}(X_6^o)$ характеристик технической системы (выделены красным цветом) определяют ошибки перехода от четырехмерной $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ к двухмерной $X^o = \{x_1, x_2\}$ системе координат.

В совокупности, представлена версия программного обеспечения моделирования технической системы в многомерной математике выдает следующие результаты:

точка оптимума – $X^o$;

характеристики (критерии) $F(X^o) = \{f_1(X^o), f_2(X^o), f_3(X^o), f_4(X^o), f_5(X^o), f_6(X^o)\}$;

относительные оценки – $\lambda(X^o) = \{\lambda_1(X^o), \lambda_2(X^o), \lambda_3(X^o), \lambda_4(X^o), \lambda_5(X^o), \lambda_6(X^o)\}$;

максимальную относительную оценку – $\lambda^o$, такую что $\lambda^o \leq \lambda_k\ (X^o)\ \forall k \in \boldsymbol{K}$.

точку оптимума с приоритетом $q$–го критерия – $X^q$;

характеристики (критерии) – $F(X^q) = \{f_1(X^q), f_2(X^q), f_3(X^q), f_4(X^q), f_5(X^q), f_6(X^q)\}$;

относительные оценки – $\lambda(X^o) = \{\lambda_1(X^q), \lambda_2(X^q), \lambda_3(X^q), \lambda_4(X^q), \lambda_5(X^q), \lambda_6(X^q)\}$;

максимальную относительную оценку $\lambda^{oo}$, такую что $\lambda^{oo} \leq p_k^q\ \lambda_k\ (X^q), k = \overline{1,K}$.

***Заключение по главе***. Проблема разработки математических методов векторной оптимизации и принятия оптимального решения на их основе в сложной технической системе по некоторому набору экспериментальных данных и функциональных характеристик является одной из важнейших задач системного анализа и проектирования. В работе разработана методология автоматизации проектирования путем: во-первых, построения математической модели технической системы в условиях определенности и неопределенности в виде векторной задачи математического программирования; во-вторых, разработки аксиоматики и методов решения векторной задачи. Практика "принятия оптимального решения" на основе математической модели технической системы показана на численном примере решения векторной задачи оптимизации.

**Оценим математические результаты данной работы** с точки зрения искусственного интеллекта, полученные на основе теории векторной оптимизации: {аксиоматика Машунина Ю.К., принципы оптимальности и методы решения векторных задач математического (выпуклого) программирования}.

Используя теорию векторной оптимизации, мы получили, в частности, для технической системы и структуры материала: точки оптимума – $X^o = (x_j^o, j = \overline{1,N}\}$;

характеристики (критерии) – $F(X^o) = \{f_k\ (X^o), k = \overline{1,K}\}$;

относительные оценки – $\lambda(X^o) = \{\lambda_k\ (X^o), k = \overline{1,K}\}$ , которые лежат в пределах $\{0 \leq \lambda_k(X^o) \leq 1$ (или 100%), $k = \overline{1,K}\}$, и легко переводится в натуральные единицы.

Может ли эти результаты получить искусственный интеллект, функционирующий, как правило, по принципу перебора. Ответим: «Нет». Искусственный интеллект может получить только приблизительный результат, и то этот результат должен оценить человек.

Таким образом, разработанная теория векторной оптимизации может являться математическим аппаратом вычислительного интеллекта искусственного интеллекта.

**10. Заключение.**

Проблема разработки методов многомерной математики и принятия оптимального решения на её основе в инженерных исследованиях по некоторому множеству функциональных характеристик и экспериментальных данных является одной из важнейших задач системного анализа и проектирования. Теория многомерной математики, представленная в работе, включает аксиоматику, принципы оптимальности и конструктивные методы векторной оптимизации. В исследовании показаны принципы оптимальности решения векторных, которые позволяют принимать решение, во-первых, при равнозначных критериях, во-вторых, при заданном приоритете критерия в инженерных исследованиях и проектирования выбора параметров инженерных систем при равнозначных критериях и при заданном приоритете критерия.

*Выбор оптимальных параметров структуры материала* представлен на численном примере в методологии автоматизации проектирования структуры материала условиях определенности и неопределенности в виде векторной задачи математического программирования.

*Выбор оптимальных параметров технической системы* по множеству характеристик (критериев) представлен на численном примере в методологии автоматизации проектирования технической системы условиях определенности и неопределенности в виде векторной задачи математического программирования. Автор готов участвовать в решении векторных задач линейного и нелинейного программирования. Mashunin@mail.ru

**Список литературы:**

1. Pareto V. Cours d'Economie Politique. Lausanne: Rouge, 1896.
2. Математическая энциклопедия. Редакционная коллегия: И.М. Виноградов и другие. - М.: «Советская энциклопедия», 1977. – 1152 с.
3. Carlin S. Mathematical methods in a game theory, programming and economy. - M.: World, 1964, p. 837.
4. Zak Yu. A. Multi-stage decision-making processes in the problem of vector optimization // A.iT. 1976. No. 6, pp. 41-45.
5. Mikhailevich V. S., Volkovich V. L. Computational methods of research and design of complex systems. M.: Science, 1979, p. 319.
6. Машунин Ю.К. Методы и модели векторной оптимизации. М.: Наука, 1986. 141 с.
7. Машунин Ю. К. , Левицкий В. Л. Методы векторной оптимизации в анализе и синтезе технических систем: монография. - Владивосток: ДВГАЭУ, 1996. 131 с.

8. Машунин Ю.К. Решение композиционных и декомпозиционных задач синтеза сложных технических систем методами векторной оптимизации//Изв. РАН. ТиСУ. 1999. №3. С. 88-93.

Yu. K. Mashunin, "Solving composition and decomposition problems of synthesis of complex engineering systems by vector_optimization methods," Comput. Syst. Sci. Int. 38, 421 (1999). (Scopus)

9. Машунин Ю.К., Машунин К.Ю. Моделирование технических систем в условиях неопределенности и принятие оптимального решения //Изв. РАН. ТиСУ. 2013. №4. С. 19-35.

Mashunin K. Yu., and Mashunin Yu. K. Simulation Engineering Systems under Uncertainty and Optimal Descision Making. Journal of Comput. Syst. Sci. Int. Vol. 52. No. 4. 2013. 519-534. (Scopus)

10. Машунин Ю.К. Теория управления. Математический аппарат управления в экономических системах. – М.: Логос. 2013. 448 с. (Новая университетская библиотека)
11. Mashunin Yu.K. Mashunin K.Yu. Modeling of technical systems on the basis of vector optimization (1. At equivalent criteria) / International Journal of Engineering Sciences & Research Technology. 3(9): September, 2014. P. 84-96 .
12. Mashunin Yu.K. Mashunin K.Yu. Modeling of technical systems on the basis of vector optimization (2. with a Criterion Priority) / International Journal of Engineering Sciences & Research Technology. 3(10): October, 2014. P. 224-240.
13. Yu. K. Mashunin, K. Yu. Mashunin. Simulation and Optimal Decision Making the Design of Technical Systems // American Journal of Modeling and Optimization. 2015. Vol. 3. No 3, 56-67.
14. Yu. K. Mashunin, K. Yu. Mashunin. Simulation and Optimal Decision Making the Design

of Technical Systems (2. The Decision with a Criterion Priority) // American Journal of Modeling and Optimization. 2016. Vol. 4. No 2, 51-66.

15. Yu. K. Mashunin, "Methodology of the Choice of Optimum Parameters of Technological Process on Experimental to Data."*American Journal of Modeling and Optimization*, vol. 7, no. 1 (2019): 20-28. doi: 10.12691/ajmo-7-1-4.

16. Yu. K. Mashunin. Vector optimization in the system optimal Decision Making the Design in economic and technical systems // International Journal of Emerging Trends & Technology in Computer Science. 2017. Vol. 7. No 1, 42-57.

17. Mashunin, Yu. K, Optimal designing in the interrelation Technical system – Materials (Theory) // Mathematical methods in engineering and technology: proceedings of international. Science. Conf.: 12 tons 4 /under General Ed. A. A. Bolshakova. –SPb.: Publishing house of Polytechnical Institute. Un-t, 2018. P. 40-46.

18. Yu. K. Mashunin. Concept of Technical Systems Optimum Designing (Mathematical and Organizational Statement)// International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2017 Proceedings 8076394. Saint Petersburg. Russia/ WOS: 000414282400287 ISBN:978-1-5090-5648-4. (Web of science)

19. Yu. K. Mashunin. Optimum Designing of the Technical Systems Concept (Numerical Realization) // International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2017 Proceedings 8076395. Saint Petersburg. Russia/ WOS: 000414282400288 ISBN:978-1-5090-5648-4. (Web of science)

20. Mashunin K. Yu., and Mashunin Yu. K. Vector Optimization with Equivalent and Priority Criteria. Journal of Comput. Syst. Sci. Int., 2017, Vol. 56. No. 6. pp. 975-996. https://rdcu.be/bhZ8i (Scopus)

21. Mashunin Yu.K. Mathematical Apparatus of Optimal Decision-Making Based on Vector Optimization," Appl. Syst. Innov. 2019, 2, 32. https://doi.org/10.3390/asi2040032

22. Mashunin Yu.K. Theory and Methods Vector Optimization (Volume One), Cambridge Scholars Publishing. 2020, 183 p. ISBN (10): 1-5275-4831-7

23. Торгашов А.Ю., Кривошеев В.П., Машунин Ю.К., Холланд Ч.Д. Расчет и многокритериальная оптимизация статических режимов массообменных процессов на примере абсорбции в производстве газоразделения // Изв. ВУЗов. Нефть и газ, 2001, №3, с. 82-86.

24. Кетков Ю. Л., Кетков А.Ю., Шульц М. М. МАТЛАБ 6.х.: программирование численных методов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. - 672 с.

25. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения: Пер. с англ./Под ред. И. Ф. Шахнова. - М.: Радио и связь, 1981. – 560 с.

26. Jahn Johannes. Vector Optimization: Theory, Applications, and Extensions. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York. 2010. 460 p.

27. Qamrul Hasan Ansari, Jen-Chih Yao. Recent Developments in Vector Optimization. Springer Heidelberg Dordrecht. London. New York. 2010. 550 p.

28. Nakayama Hirotaka, Yun Yeboon, Yoon Min. Sequential Approximate Multiobjective Optimization Using Computational Intelligence. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg . 2009. 197 p.

29. Shankar R. Decision Making in the Manufacturing Environment: Using Graft Theory and fuzzy Multiple Attribute Decision Making Methods. Springer; 2007. 373 p.

30. Cooke T., Lingard H., Blismas N. The development end evaluation of a decision support

tool for health and safety in construction design // Engineering, Construction and Architectural Management. 2008. V. 15. №4. P. 336-351.

31. Walras L. 1874. Elements of Pure Economies , or the theory of social wealth, Lau-sanne.
32. Samuelson P. 1964. Economics. Part 1. -M: Progress.
33. Marshall A. 1993. Principles of economic science. Tom 2. -M: Progress, 145 p.
34. Coase, Ronald. The Institutional Structure of Production // The American Economic Review, vol.82, n°4, pp. 713-719, 1992. (Nobel Prize lecture)Gilbert, J., 1976. Economic theory and goals of the society. - M: Progress. - 230 p.
35. Saimone, G., 1995. Theory of decision making in economic theory and the behav-ioral Sciences. // In the book: The theory of the firm. St. Petersburg.
36. Seo, K.K., 2000. Managerial Economics: Text, Problems, and Short cases. Per. from English. - M: INFA-M. - 671 p.
37. Khan K. 2004. Controlling. - M: INFA-M. - 671 p.
38. Fayol A. (1992). General and industrial management. - M: Controlling.
39. Mashunin Yu. K., 2010. Theory and modeling of the market on the basis of vector optimization. - M: University book. - 352 p.
40. Mashunin, Yu. K., Mashunin, K., Yu. Numerical realization of innovative development of the industrial enterprise//Global challenges in economy and development of the industry (INDUSTRY-2016): proceedings of scientific – practical Konf. with foreign participation on March 21-23 2016/under the editorship of the Dr. of economic Sciences, prof. A. V. Babkin. – SPb.: Publishing house Politekhn. University, 2016. 455-484. (rus.).
41. Mashunin, Yu. K., 2016. Modeling and software implementation of innovative development of the industrial enterprise. St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Economics, no. 3(245), pp. 78-92. (rus)
42. Mashunin, Yu. K., Mashunin, K., Yu., 2017. Analysis of the organization of control, optimization and practice of innovative development of the industrial cluster, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Economics, 10(4), 187-197. DOI: 10.18721/JE. 10418
43. Mashunin, Yu. K., 2017. Management of the region economy. M: RuSCIence. - 344. (rus) ISBN 978-5-4365-1984-5
44. Mashunin Yu. K., K. Yu. Mashunin, Strategic and Innovative Development of the Cluster based on the digital economy, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Economics, 11 (4) (2018) 85—99. DOI: 10.18721/JE.11406
45. Mashunin, Yu. K., 2019. Theory of management and the practice of making managerial decisions: textbook. - Moscow: RuSCIence. – 494 p. (rus) ISBN 978-5-4365-3088-8