

Машунин Юрий Константинович

Доктор экономических наук, к.т.н., профессор

Дальневосточный федеральный университет

ORCID id: 0000-0001-7071-8729 (Пенсионер, Советское образование)

Mashunin Yu. K., Doctor of Economics, Ph.D., Professor

Far Eastern Federal University

ORCID id: 0000-0001-7071-8729 (Soviet education)

**МНОГОМЕРНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНТЕЛЛЕКТ КОНСТРУКТОРА
ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ И ОПРЕДЕЛЕНИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ
МНОГОФУНКЦИОНАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ МАТЕРИАЛА
MULTIDIMENSIONAL MATHEMATICS AND DESIGNER'S INTELLIGENCE
IN THE DESIGN AND DETERMINATION OF OPTIMAL PARAMETERS
OF THE MULTIFUNCTIONAL STRUCTURE OF THE MATERIAL**

Аннотация. Цель работы представить методологию проведения исследования, анализа и принятия оптимальных решений при проектировании и выборе оптимальных параметров многопараметрической, многофункциональной структуры материала на базе теории, методов многомерной математики, используя интеллект конструктора. Представить геометрическую интерпретацию многомерной (шестимерной) структуры материала в двухмерной системе принятия оптимальных решений. Математическое обеспечение сформировано на основе векторной оптимизации <https://rdcu.be/bhZ8i>. (Работа "Vector optimization with equivalent and priority criteria" Springer Nature распространяется бесплатно.). В работе решение проблемы многофункциональности структуры материала в выборе оптимальных параметров представлено в две стадии. На первой стадии работы представлено: во-первых, построение математической модели в виде векторной задачи математического программирования; во-вторых, решение векторной задачи – модели структуры материала в выборе оптимальных параметров в условиях определенности и неопределенности при равнозначных критериях. Теория и прикладные методы многомерной математики (математическая поддержка для моделирования векторной оптимизации) представлена в приложении. На второй стадии работы, использованы интеллектуальные знания конструктора системы, который задает числовые значения для наиболее важного (приоритетного) критерия структуры материала (т.е. проведено шесть экспериментов). Для каждого численного значения критерия структуры материала рассчитаны оптимальные значения параметров шести критериев. Представлена геометрическая интерпретация результатов решения шестимерной структуры материала в двухмерную систему в относительных и физических единицах (всего 36 рисунков).

Abstract: The purpose of the work is to present the methodology of research, analysis and optimal decision-making in the design and selection of optimal parameters of the multiparameter, multifunctional structure of the material based on the theory, methods of multidimensional mathematics, using the intelligence of the designer. To present a geometric interpretation of the multidimensional (six-dimensional) structure of a material in a two-dimensional system of optimal decision-making. Mathematical software is formed on the basis of vector optimization of <https://rdcu.be/bhZ8i> (The work "Vector optimization with equivalent and priority criteria" by Springer Nature is distributed free of charge.). In this work, the solution to the problem of the



multifunctionality of the material structure in the selection of optimal parameters is presented in two stages. At the first stage of the work, the following is presented: firstly, the construction of a mathematical model in the form of a vector problem of mathematical programming; secondly, the solution of a vector problem – a model of the material structure in the choice of optimal parameters under conditions of certainty and uncertainty with equivalent criteria. At the second stage of work, the intellectual knowledge of the system designer was used, who sets numerical values for the most important (priority) criterion of the material structure (i.e. six experiments were conducted). For each numerical value of the criterion of the material structure, the optimal values of the parameters of six criteria were calculated. A geometric interpretation of the results of solving a six-dimensional of the material structure into a two-dimensional system in relative and physical units (36 figures in total) is presented.

Ключевые слова: Многомерная математика, Методы принятия оптимальных решений, Моделирование структуры материала, Интеллект конструктора, Принятие оптимальных решений, Геометрическая интерпретация многомерных систем.

Keywords: Multidimensional Mathematics, Methods of Optimal Decision Making, Modeling of the material structure, Designer's Intelligence, Optimal Decision Making, Geometric Interpretation of Multidimensional Systems.

Introduction

Исследование структуры материала показало, что структура материала зависит от некоторого множества функциональных характеристик, которые в совокупности характеризуют многомерность исследуемой структуры материала. Исследование и анализ функционирования структуры материала показало, что улучшение по одной из характеристик структуры приводит к ухудшению других характеристик.

Для улучшения функционирования структуры материала необходимо учитывать:

во-первых, что в исследуемой структуре материала одно подмножество характеристик (критериев) было направлено на увеличение числового значения (максимизацию), а второе подмножество характеристик (критериев) структуры материала было направлено на уменьшение числового значения (минимизацию); во-вторых, необходимо, чтобы все характеристики структуры материала улучшались в совокупности. В настоящее время известно решение однокритериальной оптимизации, которую можно трактовать как одномерную (одно функциональную) оптимизацию.

Исследования многокритериальных задач началось более ста лет тому назад в работе Pareto V. [1]. В последние три десятилетия методам решения многокритериальных (векторных) задач посвящено большое количество монографий и отдельных статей. Это связано с широким использованием этих методов в решении практических задач. Анализ методов и алгоритмов решения многокритериальных задач в соответствии со своей классификацией представлен в ряде работ [6, 10, 22, 39, 45]: методы решения многокритериальных задач, основанные на свертывании критериев с весовыми коэффициентами [3, 5, 25, 27]. Исследование многокритериальной оптимизации проводилось как на теоретическом уровне зарубежными [3, 25-30] и русскими авторами [4-23], так и на решении практических задач сначала в области экономики [31-45], а за тем в области технических систем [6-21, 46-49]. Множество критериев в многокритериальной задаче оптимизации можно представить в виде вектора, с которым можно проводить математические



операции, отсюда появились векторные задачи оптимизации или векторные задачи математического программирования.

Решение проблемы векторной оптимизации обусловлено рядом трудностей, причем концептуального характера, и главная из них понять: «что значит решить задачу векторной оптимизации». Для решения проблемы с множеством критериев математически необходимо создание, во-первых, аксиоматики и принципов оптимальности, показывающих любому пользователю, в чем одно решение лучше другого решения, и, что такое оптимальное решение многокритериальной (т.е. со многими характеристиками) оптимизационной задачи. А на следующем этапе на базе аксиоматики и принципов оптимальности разработки конструктивных методов решения многокритериальных задач.

Цель работы представить методологию проведения исследования, анализа и принятия оптимальных решений при проектировании и выборе оптимальных параметров многопараметрических, многофункциональных технических систем на базе теории, методов многомерной математики, используя интеллект конструктора. Представить геометрическую интерпретацию многомерной (шестимерной) технической системы в двухмерной системе принятия оптимальных решений. Математическое обеспечение сформировано на основе векторной оптимизации <https://rdcu.be/bhZ8i>. (Работа "Vector optimization with equivalent and priority criteria" Springer Nature распространяется бесплатно.), [6–22].

В прикладной части исследования использованы конструктивные методы принятия оптимальных решений и методы решения векторных задач для моделирования структуры материала. Методы позволяют принимать решение, во-первых, при равнозначных критериях, во-вторых, при заданном приоритете критерия того или иного критерия. В области инженерных систем, к которым относятся технические системы [11–14, 18, 19], технологические процессы [15, 21], материалы [17].

В работе для решения проблемы многофункциональности структуры материала и выбора оптимальных параметров на базе многомерной математики разработана методология моделирования и проектирования структуры материала, которая реализована в две стадии.

Первая стадия работы направлена на решение выбора оптимальных параметров структуры материала в условиях определенности и неопределенности при равнозначных критериях и включает. 1. Построение математической модели структуры материала в условиях определенности и неопределенности и разработки конструктивных методов решения векторной задачи. 2. Построение численной модели выбора оптимальных параметров сложной структуры материала. 3. Разработана численная реализация многопараметрической (4 параметра) и многофункциональной (6 функций - критериев) модели структуры материала при равнозначных критериях. Теория и прикладные методы многомерной математики (математическая поддержка для моделирования векторной оптимизации) представлена в приложении.

Вторая стадия работы направлена на решение выбора оптимальных параметров структуры материала в условиях неопределенности, при этом использованы интеллектуальные знания конструктора системы.

4. Конструктор структуры материала задает численные значения наиболее важного (приоритетного) критерия (т.е. проведено шесть экспериментов). 5. Для каждого численного значения критерия структуры материала вычисляется математически оптимальные значения параметров шести критериев. 6. Сформирована геометрическая интерпретация результатов



решения шестимерной системы параметров в двумерную систему параметров при проектировании характеристик структуры материала в относительных и физических единицах (всего 36 рисунков).

1. Построение математической модели для выбора оптимальных параметров структуры материала в условиях определенности и неопределенности на базе многомерной математики и интеллекта конструктора.

1.1. Математическая модель многопараметрической и многофункциональной структуры материала для принятия оптимального управленческого решения

1.1.1. Проблемы моделирования при проектировании новой структуры материала

Химический состав материала изделия определяется (на единицу объема, веса) процентным содержанием некоторого множества компонент материала, которые в сумме равны ста процентам. Состав материала, характеризуется определенным набором функциональных характеристик, которые включают в себя механические и физико-химические свойства материалов. Одна группа свойств (функциональных характеристик) материала характеризуется тем, что их желательно по своей числовой величине получить как можно больше (например, прочность), другая группа свойств характеризуется тем, что их желательно по своей числовой величине получить как меньше. Улучшение по одной из этих характеристик приводит к ухудшению другой. В целом требуется подобрать такой состав материала, чтобы все свойства материала были как можно лучше в совокупности

1.1.2. Математическая модель структуры материала в условиях определенности

Рассматривается состав материала какого-либо изделия, технической системы, которая зависит от ряда компонент материала: $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_V\}$, где V - множества компонент материала, $Y = \{y_j, j = \overline{1, V}\}$, V - число компонент, из которых может быть составлен (изготовлен) материал, y_V - величина в процентах v -ой компоненты материала, каждая из которых лежит в заданных пределах: $y_v^{min} \leq y_v \leq y_v^{max}$, $v = \overline{1, V}$, где y_v^{min} , y_v^{max} , $\forall v \in V$ - нижний и верхний пределы изменения вектора компонент материала.

$\sum_{v=1}^V y_v = 100\%$ - сумма всех компонент материала равна ста процентам.

Состав материала оценивается набором (множеством) K физических свойств материала: $H(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K}\}$, которые функционально зависят от конструктивных параметров: $Y = \{y_v, v = \overline{1, V}\}^T$, k - индекс вида физического свойства материала, $k = \overline{1, K}$, где K - число видов свойств (функциональных характеристик) материала, представим их в виде вектор - функции.

$H(Y)$ - вектор-функция (векторный критерий), имеющая K - компонент-функций, (K - мощность множества K): $H(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K}\}$. Множество K состоит из подмножества K_1 компонент максимизации и подмножества K_2 минимизации; $K = K_1 \cup K_2$;

$H_1(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K_1}\}$ - это векторный критерий, каждая компонента которого максимизируется, K_1 - число критериев, а $K_1 \equiv \overline{1, K_1}$ - множество критериев максимизации. В дальнейшем будем предполагать, что $H_1(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K_1}\}$ непрерывные вогнутые функции (иногда будем их называть критериями максимизации);

$H_2(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K_2}\}$ - векторный критерий, каждая компонента которого минимизируется, $K_2 \equiv \overline{K_1 + 1, K} \equiv \overline{1, K_2}$ - множество критериев минимизации, K_2 - число. Предполагаем, что $h_k(Y), k = \overline{1, K_2}$ - непрерывные выпуклые функции (будем иногда их называть критериями минимизации), т. е.: $K = K_1 \cup K_2, K_1 \subset K, K_2 \subset K$.

Характеристики материала $H(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K}\}$ мы используем как критерии, а пределы изменения, накладываемые на каждый вид компонент, как параметрические ограничения. Математическую модель материала, решающую в целом проблему выбора оптимального проектного решения (выбора оптимальной структуры материала), представим в виде векторной задачи математического программирования:

$$Opt H(Y) = \{max H_1(Y) = \{max h_k(Y), k = \overline{1, K_1}\}, \quad (1)$$

$$min H_2(Y) = \{min h_k(Y), k = \overline{1, K_2}\}, \quad (2)$$

$$\text{при ограничениях: } G(Y) \leq B, \sum_{v=1}^V y_v(t) = 100\%, h_k^{min} \leq h_k(X) \leq h_k^{max}, k = \overline{1, K}, \quad (3)$$

$$y_v^{min} \leq y_v \leq y_v^{max}, v = \overline{1, V}, \quad (4)$$

где $Y = \{y_j, j = \overline{1, V}\}$ - вектор управляемых переменных (компонент материала);

$H(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K}\}$ - векторный критерий, каждая функция которого представляет характеристику (свойство) материала, функционально зависящую от вектора переменных Y ;

$G(Y) = \{g_1(Y), \dots, g_M(Y)\}^T$ - вектор-функция ограничений, накладываемых на структуру материала, M - множество ограничений.

Предполагается, что функции $H(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K}\}$ дифференцируемы и выпуклы, $G(Y) = \{g_i(Y), i = \overline{1, M}\}^T$ непрерывны, а заданное ограничениями (3)-(4) множество допустимых точек S не пусто и представляет собой компакт:

$$S = \{X \in R^n | G(Y) \leq 0, Y^{min} \leq Y \leq Y^{max}\} \neq \emptyset.$$

Соотношения (1)-(4) образуют математическую модель материала. Требуется найти такой вектор параметров $Y^0 \in S$, при котором каждая компонента (характеристика) вектор - функции: $H_1(Y)$ принимает максимально возможное значение, а вектор - функции $H_2(Y)$ принимает минимальное значение:

$$H_1(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K_1}\}, H_2(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K_2}\}.$$

В данной статье исследование конструктивных свойств материала рассматриваются в статике. Но структура материала могут рассматриваться в динамике (например, при изменении внешней температуры за какой-нибудь период времени). Для этого можно, использовать дифференциально-разностные методы преобразования [4] и проводить исследование за небольшой дискретный промежуток времени $\Delta t \in T$. В совокупности математическую модель материала (1)-(4) можно трактовать как системный подход к исследованию материала.

1.1.3. Построение математической модели структуры материала в условиях определенности и неопределенности

При построении математической модели материала (1)-(4) возможны условия: определенности и неопределенности, [20-26].

1. Построение математической модели материала в условиях определенности

Условия определенности характеризуются тем, что известна функциональная зависимость каждой характеристики (свойства) материала и ограничений от конструктивных компонент материала. Для построения функциональной зависимости выполняем следующие работы.

1. Формируем множество всех функциональных характеристик (свойств) материала K .

Величину характеристики обозначим $h_k(Y), k = \overline{1, K}$. Определяем множество всех компонент материала V , от которых зависят эти характеристики. Величины параметров представим в виде вектора $Y = \{y_j, j = \overline{1, V}\}$. Даем вербальное описание характеристик материала.

2. Мы проводим исследование физических процессов, протекающих в материале. Для этого используем фундаментальные законы физики: моделирование магнитных,



температурных полей; законы сохранения энергии, движения и т. д. Устанавливаем информационную и функциональную связь характеристик материала и ее параметров: $H(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K}\}$.

3. Мы определяем функциональные ограничения: $H(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K}\}$

$$h_k^{\min} \leq h_k \leq h_k^{\max}, k = \overline{1, K}, \text{ или } H^{\min} \leq H \leq H^{\max}$$

и параметрические ограничения:

$$y_v^{\min} \leq y_v \leq y_v^{\max}, v = \overline{1, V}, \text{ или } Y^{\min} \leq Y \leq Y^{\max}.$$

Сумма всех компонент материала равна ста процентам: $\sum_{v=1}^V y_v(t) = 100\%$.

4. В результате мы построим математическую модель материала в виде векторной задачи математического программирования:

$$\begin{aligned} \text{Opt } H_H(Y) = \{ \max H_1(Y) = \{ \max h_k(Y), k = \overline{1, K_1} \}, \\ \min H_2(Y) = \{ \min h_k(Y), k = \overline{1, K_2} \} \}, \\ \text{при ограничениях } H^{\min} \leq H \leq H^{\max}, \\ \sum_{v=1}^V y_v = 100\%, y_v^{\min} \leq y_v \leq y_v^{\max}, v = \overline{1, V}, \end{aligned} \quad (5)$$

Задача $H_H(Y)$ (5) адекватна задачи (1)-(4).

2. Построение математической модели материала в условиях неопределенности

Условия неопределенности характеризуются тем, что отсутствует достаточная информация о функциональной зависимости свойства материала от состава компонент.

В этом случае проводятся экспериментальные исследования. Для заданного числа составов материалов: $Y_i = \{y_{ij}, j = \overline{1, V}, i = \overline{1, M}\}$ определяются соответствующий набор свойств: $H(Y_i) = \{h_k(Y_i), k = \overline{1, K}\}, i = \overline{1, M}$. С учетом этого матрица экспериментов по исследованию структуры материала принимает вид:

$$I = \left\| \begin{array}{l} Y_1 = \{y_{1v}, v = \overline{1, V}\} h_1(Y_1) \dots h_K(Y_1) \\ \dots \\ Y_M = \{y_{Mv}, v = \overline{1, V}\} h_1(Y_M) \dots h_K(Y_M) \end{array} \right\|, \quad (6)$$

где столбец $v \in V$ представляет числовую величину v -ой компоненты материала в процентах, $v = \overline{1, V}$ столбец $k \in K$ представляет числовую величину k -го свойства материала, $k = \overline{1, K}$. Задача лица, принимающего решения, (ЛПР) - конструктора состоит в выборе такой альтернативы, которая позволила бы получить "в наибольшей мере устраивающий его (оптимальный) результат" [18, 20]. Множество критериев (характеристик) K подразделяется на два подмножества $K = K_1 \cup K_2, K_1 \subset K, K_2 \subset K$.

K_1 — это подмножество характеристик, числовые величины которых желательно получить, как можно выше: $I_1(Y_i) = \{h_k(Y_i, i = \overline{1, M}), k = \overline{1, K_1}\} \rightarrow \max$

K_2 — это подмножества характеристик, числовые величины которых желательно получить, как можно ниже: $I_2(Y_i) = \{h_k(Y_i, i = \overline{1, M}), k = \overline{1, K_2}\} \rightarrow \min$.

Решение задачи принятия решений по структуре материала по своей сути близка к решению векторной задачи математического программирования, которая в условиях неопределенности примет вид:

$$\begin{aligned} \text{Opt } H_I(Y) = \{ \max I_1(Y) = \{ \max h_k(Y_i, i = \overline{1, M}), k = \overline{1, K_1} \}, \\ \min I_2(Y) = \{ \min h_k(Y_i, i = \overline{1, M}), k = \overline{1, K_2} \} \}, \\ \text{при ограничениях } h_k^{\min}(Y_i, i = \overline{1, M}) \leq h_k \leq h_k^{\max}(Y_i, i = \overline{1, M}), k = \overline{1, K}, \\ \sum_{v=1}^V y_v = 100\%, y_v^{\min} \leq y_v \leq y_v^{\max}, v = \overline{1, V}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $Y_i = \{y_{ij}, j = \overline{1, V}, i = \overline{1, M}\}$ - вектор управляемых переменных (конструктивных параметров); $H(Y_i) = \{I_1(Y_i), I_2(Y_i)\}$ - векторный критерий, каждая компонента которого представляет характеристику (свойство) материала, функционально зависящую от величины



дискретного значения вектора переменных $Y_i, i = \overline{1, M}$; M – множество дискретных значений вектора переменных $Y_i, i = \overline{1, M}$;

$h_k^{min}(Y_i) \leq h_k \leq h_k^{max}(Y_i), k = \overline{1, K}$ – вектор-функция ограничений, накладываемых на функции материала изделия, $y_v^{min} \leq y_v \leq y_v^{max}, v = \overline{1, V}$ – параметрические ограничения.

1.1.4. Построения математической модели структуры материала в условиях определенности и неопределенности в совокупности в виде векторной задачи

В реальной жизни условия определенности и неопределенности совмещаются. Модель материала так же отражает эти условия. Объединим модели H_H (5) и H_I (7). В итоге получим модель материала в условиях определенности и неопределенности в совокупности в виде векторной задачи математического программирования:

$$Opt H(Y) = \{\max H_1(Y) = \{\max h_k(Y), k = \overline{1, K_1^{def}}\}, \quad (8)$$

$$\max I_1(Y) = \{\max h_k(Y_i, i = \overline{1, M}), k = \overline{1, K_1^{unc}}\}, \quad (9)$$

$$\min H_2(Y) = \{\min h_k(Y), k = \overline{1, K_2^{def}}\}, \quad (10)$$

$$\min I_2(Y) = \{\min h_k(Y_i, i = \overline{1, M}), k = \overline{1, K_2^{unc}}\}, \quad (11)$$

$$\text{при ограничениях: } G(Y) \leq B, h_k^{min} \leq h_k(X) \leq h_k^{max}, k = \overline{1, K}, \sum_{v=1}^V y_v(t) = 100\%, \quad (12)$$

$$y_v^{min} \leq y_v \leq y_v^{max}, v = \overline{1, V}, \quad (13)$$

где Y – вектор управляемых переменных (конструктивных параметров материала);

$H(Y) = \{H_1(Y) I_1(Y) H_2(Y) I_2(Y)\}$ – векторный критерий, каждая компонента которого представляет вектор критериев (характеристик) материала, которые функционально зависят от значений вектора переменных Y ; K_1^{def}, K_2^{def} (*definiteness*), K_1^{unc}, K_2^{unc} (*uncertainty*) множество критериев $\max$ и $\min$ сформированные в условиях определенности и неопределенности (8)-(11); в (12)-(13) вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование материала в производственных условиях, (13) параметрические ограничения.

1.1.5. Преобразование задачи принятия решения по структуре материала с условиями неопределенности в задачу векторной оптимизации с условиями определенности.

Используя методы регрессионного анализа в задаче (8)-(13), k -й столбец матрицы I (6), преобразуем $\forall k \in \overline{1, K_1^{unc}} h_i^k, i = \overline{1, M}$, в функцию $h_k(X), \forall k \in \overline{1, K_1^{unc}}$, которую будем использовать в качестве критерия. Аналогично $\forall k \in \overline{1, K_2^{unc}}$. Подмножество критериев $\overline{1, K_1^{unc}}$ максимизируется, а подмножество критериев $\overline{1, K_2^{unc}}$ минимизируется, т. е. каждое подмножество критериев представлено вектор-функцией:

$$\max I_1(Y) = \{\max h_k(Y_i, i = \overline{1, M}), k = \overline{1, K_1^{unc}}\} \rightarrow \max I_1(Y) \equiv \{\max h_k(Y), k = \overline{1, K_1^{unc}}\}, \quad (14)$$

$$\min I_2(Y) = \{\min h_k(Y_i, i = \overline{1, M}), k = \overline{1, K_2^{unc}}\} \rightarrow \min I_2(Y) = \{\min h_k(Y), k = \overline{1, K_2^{unc}}\}, \quad (15)$$

К ограничениям относятся: функциональные ограничения:

$$h_k^{min} \leq h_k(Y) \leq h_k^{max}, k = \overline{1, K}, \quad (16)$$

где минимальные значения $h_k^{min} = \min_{i=\overline{1, M}} h_i^k(Y_i)$, и максимальные значения $h_k^{max} = \max_{i=\overline{1, M}} h_i^k(Y_i)$. Параметрические ограничения: $y_j^{min} \leq y_j \leq y_j^{max}, j = \overline{1, N}$, где минимальные

значения $y_j^{min} = \min_{i=\overline{1, M}} y_{ij}, \forall j \in N$, максимальные значения $y_j^{max} = \max_{i=\overline{1, M}} y_{ij}, \forall j \in N$.

Таким образом, экспериментальные данные $I_1(X)$ (11) и $I_2(X)$ (13) преобразованы в функциональные данные (14), (15), [9, 14].



1.1.6. Математическая модель структуры материала в условиях определенности и неопределенности в совокупности

Критерии $I_1(Y)$, $I_2(Y)$, функциональные $h_k(Y)$ и параметрические ограничения y_j используем для построения задачи оптимизации и представим их в виде векторной задачи математического программирования в общем виде:

$$Opt H(Y) = \{\max H_1(Y) = \{\max h_k(Y), k = \overline{1, K_1}\}, \quad (17)$$

$$\min H_2(Y) = \{\min h_k(Y), k = \overline{1, K_2}\}, \quad (18)$$

$$\text{при ограничениях } G(Y) \leq B, h_k^{\min} \leq h_k(X) \leq h_k^{\max}, k = \overline{1, K}, \sum_{v=1}^V y_v(t) = 100\%, \quad (19)$$

$$y_v^{\min} \leq y_v \leq y_v^{\max}, v = \overline{1, V}, \quad (20)$$

где $V = \{v_j, j = \overline{1, N}\}$ - вектор вещественных переменных – параметров,

множество критериев $K_1 = \overline{1, K_1^{def}} \cup \overline{1, K_1^{unc}}$, $K_2 = \overline{1, K_2^{def}} \cup \overline{1, K_2^{unc}}$.

Задача (17)-(20) эквивалентна векторной задаче (1)-(4).

К содержательному классу структуры материалов, которые могут быть представлены векторной задачей (17)-(20), можно отнести достаточно большое их количество задач из различных отраслей экономики государства: электротехнической, авиационно-космической, металлургической (выбор оптимальной структуры материала), химической и т.п.

1.2. Методология принятия оптимального решения - выбора параметров многокритериальной структуры материала в условиях определенности, неопределенности.

Методология принятия оптимального решения в исследуемой структуре материала включает две части, разделенных на ряд этапов, [3, 11, 13, 14].

Часть 1. Выбор оптимальных параметров структуры материала в условиях определенности и неопределенности с равнозначными критериями. Первая часть включает: 1. *Формирование технического задания*, преобразование условий неопределенности (связанных с экспериментальными данными) в условия определенности, построение математической и численной модели структуры материала (the process of modeling of a engineering system). 2. Принятие оптимального решения (выбора оптимальных параметров) в структуры материала при равнозначных критериях на базе многомерной математики (the process of simulation of a engineering system): Решение векторной задачи математического программирования (ВЗМП) - модели структуры материала при равнозначных критериях (решение прямой задачи); Геометрическая интерпретация результатов решения в трехмерной системе координат в относительных единицах; Анализ результатов решения Векторной Задачи Математического Программирования при равнозначных критериях - подготовка информации для принятия решений с приоритетом отдельного критерия из всего множества критериев.

Часть 2. Выбор оптимальных параметров инженерных систем в условиях неопределенности с приоритетом критерия на базе многомерной математики интеллекта конструктора структуры материала.

1. Анализ и сравнение результатов решения векторной задачи с равнозначными критериями. 2. Вывод из анализа: **Информация об Инженерной Системе** в физических единицах для принятия решений с приоритетом критерия. 3. Геометрическая интерпретация результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров, по указанному конструктору приоритетному критерию в относительных и физических величинах.



Техническое задание, а также этап анализа результатов решения, выбора приоритетного критерия и его величины выполняется конструктором структуры материала. Остальные этапы выполняются математиком - программистом.

2. Часть 1. Выбор оптимальных параметров инженерных систем в условиях определенности и неопределенности с равнозначными критериями.

2.1. Выбор оптимальных параметров технической системы в условиях определенности с равнозначными критериями.

Первый этап – техническое задание, а также этап анализа результатов решения, выбора приоритетного критерия и его величины выполняется конструктором технической системы сложной структуры. Остальные этапы выполняются математиком - программистом.

2.1.1. 1 этап. Техническое задание: Построение математической и численной модели структуры материала.

Дано. Структура материала определяется четырьмя параметрами $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, которые представляют вектор управляемых переменных. Параметры структуры материала заданы в следующих пределах:

$$20.0 \leq x_1 \leq 80.0, 0.0 \leq x_2 \leq 60.0, 2.0 \leq x_3 \leq 8.0, 2.0 \leq x_4 \leq 8.0. \quad (21)$$

Функционирование структуры материала определяются шестью характеристиками (критериями) $H(Y) = \{h_1(Y), h_2(Y), \dots, h_6(Y)\}$, величина оценки которых зависит от вектора параметров.

Условия определенности (когда известна функциональная зависимость критерия от параметров). Для пятой и шестой характеристики $h_5(Y)$ и $h_6(Y)$ известна функциональная зависимость от параметров $Y = \{y_j, j = \overline{1, N}, N = 4\}$:

$$h_5(Y) = 886.27 + 26.28y_1 + 33.95y_2 - 27.445y_3 - 49.5y_4 - 0.8451y_1y_2 + 0.5173y_1y_3 + 0.8219y_1y_4 - 0.1411y_2y_3 + 0.3593y_2y_4 - 0.0123y_3y_4 + 0.0438y_1^2 + 0.0401y_2^2 + 3.5281y_3^2 + 2.9103y_4^2. \quad (22)$$

$$h_6(Y) = 41.758 + 0.6598y_1 + 0.4505y_2 - 0.3094y_3 - 1.8334y_4 - 0.011y_1y_2 - 0.0069y_1y_3 + 0.0161y_1y_4 - 0.0143y_2y_3 + 0.0134y_2y_4 - 0.0005y_3y_4 - 0.0003y_1^2 - 0.0002y_2^2 + 0.0279y_3^2 + 0.1033y_4^2 \quad (23)$$

Условия неопределенности (когда неизвестна функциональная зависимость критерия от параметров). Известны: **результаты экспериментальных данных**;

для первой, второй, третьей и четвертой характеристики: $h_k(Y), k = 1, 2, 3, 4$;

величины параметров и соответствующих характеристик: $Y = \{y_n = \{y_{ni}, i = \overline{1, M}\}, n = \overline{1, N}\}$. Числовые значения параметров Y , характеристик $\{h_1(Y), \dots, h_4(Y)\}$ представлены в таблице 1, [13].

Таблица 1

Экспериментальные значения параметров и характеристик технической системы.

y_1	y_2	y_3	y_4	$h_1(Y) \rightarrow \max$	$h_2(Y) \rightarrow \min$	$h_3(Y) \rightarrow \max$	$h_4(Y) \rightarrow \min$
20.0	0.0	20.0	20.0	330.0	957.8	43.4	20.2 22.617
20.0	0.0	20.0	50.0	340.0	970.0	43	23.0 23.001
20.0	0.0	20.0	80.0	348.0	980.	42.9	24.0 24.920
20.0	0.0	50.0	20.0	353.0	1010.	46.1	25.0 23.850
20.0	0.0	50.0	50.0	360.0	1050.	42.5	26.0 26.286
20.0	0.0	50.0	80.0	365.0	1048.	42.1	27.0 28.299
20.0	0.0	80.0	20.0	376.0	1047.	40.2	28.0 27.311
20.0	0.0	80.0	50.0	381.0	1044.	39.1	29.0 29.947
20.0	0.0	80.0	80.0	390.0	1043.	38.6	29.0 31.260
20.0	50.0	20.0	20.0	250.0	1785.8	53	16.6 13.176



20.0	50.0	20.0	50.0	258.0	1795.0	52.3	18.0	16.864
20.0	50.0	20.0	80.0	263.0	1803.0	51.9	21.0	20.228
20.0	50.0	50.0	20.0	270.0	1814.2	51.4	24.8	22.045
20.0	50.0	50.0	50.0	279.0	1821.0	50.1	27.9	25.732
20.0	50.0	50.0	80.0	283.0	1832.0	49.9	31.0	29.097
20.0	50.0	80.0	20.0	290.0	1842.6	49.8	32.9	30.925
20.0	50.0	80.0	50.0	301.0	1860.0	48	35.0	34.612
20.0	50.0	80.0	80.0	310.0	1871.0	48.2	41.0	37.977
20.0	100.0	20.0	20.0	170.0	2461.8	69	13.0	11.565
20.0	100.0	20.0	50.0	175.0	2350.0	65	15.0	15.304
20.0	100.0	20.0	80.0	185.0	2310.0	62	18.0	18.720
20.0	100.0	50.0	20.0	190.0	2290.2	60.4	20.2	23.353
20.0	100.0	50.0	50.0	198.0	2360.0	62	24.0	27.092
20.0	100.0	50.0	80.0	204.0	2420.0	64	27.0	30.508
20.0	100.0	80.0	20.0	210.0	2518.6	65.8	29.3	35.152
20.0	100.0	80.0	50.0	221.0	2530.0	65	33.0	38.891
20.0	100.0	80.0	80.0	230.0	2547.0	64.2	37.4	42.307
50.0	0.0	20.0	20.0	10.0	2985.8	91.4	9.4	20.246
50.0	0.0	20.0	50.0	16.0	3001.0	91	12.0	23.131
50.0	0.0	20.0	80.0	24.0	3007.0	90	14.0	25.693
50.0	0.0	50.0	20.0	30.0	3014.2	89.8	17.6	31.623
50.0	0.0	50.0	50.0	38.0	3019.0	89	19.0	34.508
50.0	0.0	50.0	80.0	44.0	3031.0	88.7	23.0	37.070
50.0	0.0	80.0	20.0	50.0	3042.6	88.2	25.7	43.011
50.0	0.0	80.0	50.0	60.0	3060.0	87	30.0	45.896
50.0	0.0	80.0	80.0	70.0	3071.0	86.6	33.8	48.457
50.0	50.0	20.0	20м	410.0	0996.2	49.6	44.0	25.595
50.0	50.0	20.0	50.0	417.0	1010.0	46	50.0	30.244
50.0	50.0	20.0	80.0	423.0	1030.0	44	54.0	34.569
50.0	50.0	50.0	20.0	430.0	1043.0	43.4	57.2	39.892
50.0	50.0	50.0	50.0	439.0	1060.0	42	63.0	44.540
50.0	50.0	50.0	80.0	444.0	1080.0	41	69.0	48.865
50.0	50.0	80.0	20.0	450.0	1099.8	40.2	73.4	54.199
50.0	50.0	80.0	50.0	460.0	1120.0	38.4	81.0	58.847
50.0	50.0	80.0	80.0	470.0	1156.6	37	89.7	63.172
50.0	80.0	20.0	20.0	410.0	1814.2	56.2	33.8	38.558
50.0	100.0	20.0	50.0	418.0	1830.0	55	38.0	44.970
50.0	100.0	20.0	80.0	423.0	1850.0	54	44.0	51.059
50.0	100.0	50.0	20.0	430.0	1871.0	53	50.0	55.773
50.0	100.0	50.0	50.0	437.0	1905.0	52	56.0	62.185
50.0	100.0	50.0	80.0	444.0	1912.0	51	61.0	68.274
50.0	100.0	80	20.0	450.0	1927.8	49.8	66.2	73.000
50.0	100.0	80.0	50.0	460.0	1950.0	43	71.0	79.411
50.0	100.0	80.0	80.0	470.0	1984.6	46.6	82.5	85.500
80.0	0.0	20.0	20.0	330.0	2490.2	72.2	26.6	17.347
80.0	0.0	20.0	50.0	338.0	2510.0	71	30.0	19.480
80.0	0.0	20.0	80.0	343.0	2530.0	70	36.0	21.291
80.0	0.0	50.0	20.0	350.0	2547.0	69	42.8	34.151
80.0	0.0	50.0	50.0	358.0	2590.0	69.2	51.0	36.285
80.0	0.0	50.0	80.0	363.0	2630.0	69.6	60.0	38.095
80.0	0.0	80.0	20.0	370.0	2703.8	69.8	69.0	50.966
80.0	0.0	80.0	50.0	380.0	2690.0	65	72.0	53.100



80.0	50.0	80.0	80.0	390.0	2660.6	62	75.3	87.623
80.0	50.0	20.0	20.0	170.0	3014.2	94.6	19.4	37.270
80.0	50.0	20.0	50.0	178.0	3033.0	93	25.0	42.879
80.0	50.0	20.0	80.0	182.0	3050.0	92	30.0	48.165
80.0	50.0	50.0	20.0	190.0	3071.0	91.4	35.6	56.993
80.0	50.0	50.0	50.0	198.0	3090.0	90	40.0	62.602
80.0	50.0	50.0	80.0	204.0	3110.0	89	45.0	67.889
80.0	50.0	80.0	20.0	210.0	3127.8	88.2	51.8	76.728
80.0	50.0	80.0	50.0	220.0	3060.0	87	61.0	82.337
80.0	50.0	80.0	80.0	230.0	3184.6	85	68.1	87.623
80.0	100.0	20.0	20.0	490.0	1014.6	53	72.5	64.806
80.0	100.0	20.0	50.0	498.0	1040.0	51	79.0	73.891
80.0	100.0	20.0	80.0	503.0	1060.0	50	86.0	82.653
80.0	100.0	50.0	20.0	510.0	1099.8	48.2	96.8	87.449
80.0	100.0	50.0	50.0	518.0	1120.0	46	105.0	96.53
80.0	100.0	50.0	80.0	523.0	1160.0	44	114.0	105.29
80.0	100.0	80.0	20.0	530.0	1185.0	43.4	121.2	110.10
80	100.0	80.0	50.0	541.0	1220.0	40	130.0	119.18
80	100.0	80.0	80.0	550.0	1270.2	38.6	145.6	127.94
Минимальные значения				10.0	957.8	37	9.4	12.1
Максимальные значения				550.0	3184.6	93	145.6	128.1
Индекс корреляции				0.6115	0.7149	0.6149	0.9017	
Коэффициент детерминации				0.3740	0.5111	0.411	0.8130	

В принимаемом решении, величину оценки по первой, третьей и шестой характеристики (критерия) желательно, получить как можно выше: $h_1(Y) \rightarrow \max, h_3(Y) \rightarrow \max, h_6(Y) \rightarrow \max$; второй, четвертой и пятой характеристики (функции), как можно ниже: $h_2(Y) \rightarrow \min, h_4(Y) \rightarrow \min, h_5(Y) \rightarrow \min$.

$$20.0 \leq y_1 \leq 80.0, 0.0 \leq y_2 \leq 60.0, 2.0 \leq y_3 \leq 8.0, 2.0 \leq y_4 \leq 8.0.$$

$$\text{Ограничение: } y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 100 \quad (24)$$

Параметры структуры материала: $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ изменяются в следующих пределах: $x_1 \in [20.0 \ 50.0 \ 80.0], x_2 \in [0.0 \ 30.0 \ 60.0], x_3 \in [2.0 \ 5.0 \ 8.0], x_4 \in [2.2 \ 5.5 \ 8.8]$.

Требуется. 1. Построить математическую модель структуры материала в виде векторной задачи математического программирования. 2. Решить векторную задачу с равнозначными критериями (характеристиками). 3. Используя интеллект конструктора, выбрать приоритетный (наиболее важный) критерий. Установить численное значение выбранного приоритетного критерия. 4. Решить векторную задачу с установленной величиной приоритетного критерия, т.е. Принять наилучшее (оптимальное) решение с заданным приоритетом критерия. 5. Представить геометрическую интерпретацию результатов решения при проектировании структуры материала перехода от двухмерного к N -мерному пространству в относительных единицах. 6. Показать геометрическую интерпретацию результатов решения N -мерной технической системы в двухмерной системе в физических единицах.

Примечание. Автором разработано программное обеспечение в системе MATLAB для решения векторных задач математического программирования. Векторная задача включает четыре переменных (параметров технической системы): $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ и шестью критериями (характеристики)



1а этап. Математическая модель структуры материала в условиях определенности

Построение математической модели для принятия оптимального управленческого решения структуры материала показано в разделе 1. В соответствии с (15)-(20) представим математическую модель структуры материала в условиях определенности и неопределенности в совокупности в виде векторной задачи:

$$Opt H(Y) = \{\max H_1(Y) = \{\max h_k(Y), k = \overline{1, K_1^{def}}\}, \quad (25)$$

$$\max I_1(Y) = \{\max h_k(Y_i, i = \overline{1, M}), k = \overline{1, K_1^{unc}}\}, \quad (26)$$

$$\min H_2(Y) = \{\min h_k(Y), k = \overline{1, K_2^{def}}\}, \quad (27)$$

$$\min I_2(Y) = \{\min h_k(Y_i, i = \overline{1, M}), k = \overline{1, K_2^{unc}}\}, \quad (28)$$

$$\text{at restrictions } G(Y) \leq B, h_k^{min} \leq h_k(X) \leq h_k^{max}, k = \overline{1, K}, \sum_{v=1}^V y_v(t) = 100\%, \quad (29)$$

$$y_v^{min} \leq y_v \leq y_v^{max}, v = \overline{1, V}, \quad (30)$$

где $Y_i = \{y_{ij}, j = \overline{1, V}\}, i = \overline{1, M}$ вектор управляемых переменных (конструктивных параметров структуры материала);

$H(Y) = \{H_1(Y) I_1(Y) H_2(Y) I_2(Y)\}$ представляет векторный критерий, каждая компонента которого является вектором критериев (характеристик) структуры материала, которые функционально зависят от дискретных значений вектора переменных;

$H_1(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K_1^{def}}\}, H_2(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K_2^{def}}\}$ – это множество функций

$\max$ и $\min$ соответственно;

$$I_1(Y) = \{\{h_k(Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\},$$

$I_2(Y) = \{\{h_k(Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_2^{unc}}\}$ – это множество матриц $\max$ и $\min$ соответственно; (*definiteness*), $K_1^{unc} \cdot K_2^{unc}$ (*uncertainty*) множество критериев $\max$ и $\min$ сформированные в условиях определенности и неопределенности;

в (29) $h_k^{min} \leq h_k(X) \leq h_k^{max}, k = \overline{1, K}$ представлена вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование структуры материала;

$y_v^{min} \leq y_v \leq y_v^{max}, v = \overline{1, V}$ – параметрические ограничения.

Примем, что функции $h_k(X), k = \overline{1, K}$ дифференцируемы и выпуклы, $g_i(X), i = \overline{1, M}$ непрерывны, а заданные ограничениями (30) множество допустимых точек S не пусто:

$S = \{X \in R^n | G(Y) \leq 0, X^{min} \leq X \leq X^{max}\} \neq \emptyset$, и представляет собой компакт.

2.1.2. 2 этап. Построение численной модели структуры материала в условиях определенности

Построение структуры материала в условиях определенности характеризуется функциональной зависимостью каждой характеристики и ограничений от параметров структуры материала. В нашем примере известны характеристики (22), (23) и ограничения (21). Используя эти данные, построим двухкритериальную задачу нелинейного программирования в условиях определенности:

$$\min h_5(Y) = 886.27 + 26.28y_1 + 33.95y_2 - 27.445y_3 - 49.5y_4 - 0.8451y_1y_2 + 0.5173y_1y_3 + 0.8219y_1y_4 - 0.1411y_2y_3 + 0.3593y_2y_4 - 0.0123y_3y_4 + 0.0438y_1^2 + 0.0401y_2^2 + 3.5281y_3^2 + 2.9103y_4^2, \quad (31)$$

$$\max h_6(Y) = 41.758 + 0.6598y_1 + 0.4505y_2 - 0.3094y_3 - 1.8334y_4 - 0.011y_1y_2 - 0.0069y_1y_3 + 0.0161y_1y_4 - 0.0143y_2y_3 + 0.0134y_2y_4 - 0.0005y_3y_4 - 0.0003y_1^2 - 0.0002y_2^2 + 0.0279y_3^2 + 0.1033y_4^2, \quad (32)$$

$$\text{при ограничениях: } y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 100, \quad 20.0 \leq y_1 \leq 80.0, 0.0 \leq y_2 \leq 60.0, 2.0 \leq y_3 \leq 8.0, 2.0 \leq y_4 \leq 8.0. \quad (33)$$

Эти данные в дальнейшем используются при построении математической модели структуры материала.

2.1.3. 3 этап. Преобразование экспериментальных данных (условия неопределенности) в данные с функциональной зависимостью (условия определенности).

Условия неопределенности характеризуются тем, что исходные данные, характеризующие исследуемого объекта, представлены: а) случайными, б) нечеткими, или, в) не полными данными, т. е. в условиях неопределенности известны лишь конечное множество X измеренных параметров $Y = \{y_v, v = \overline{1, V}\}$

$Y_v = \{y_{iv}, v = \overline{1, V}, i = \overline{1, M}\}$, где $v = \overline{1, V}$ - число параметров, которые исследуются в модели структуры материала, $i = \overline{1, M}$ – номер и множество данных;

Множество K характеристик структуры материала:

$$h_k(Y_v = \{y_{iv}, v = \overline{1, V}, i = \overline{1, M}\}, k = \overline{1, K}).$$

Поэтому в условиях неопределенности отсутствует достаточная информация о функциональной зависимости каждой характеристики и ограничений от параметров. Информационные данные опций а) и б) преобразуются в числовые данные опции с) и представляются в табличной форме. В работе рассматривается опция с) информация с неполными данными, которые, как правило, **получены в результате эксперимента**.

С учетом измеренных параметров Y_v и соответствующего множества K характеристик: $h_1(y_i, i = \overline{1, M})$, $h_2(y_i, i = \overline{1, M})$, $h_3(y_i, i = \overline{1, M})$, $h_4(y_i, i = \overline{1, M})$ представим матрицу результатов экспериментальных данных по исследуемой структуре материала:

$$I = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 = y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{14} & h_1(Y_1), h_2(Y_1), h_3(Y_1), h_4(Y_1) \\ \dots & \dots \\ Y_M = y_{M1}, y_{M2}, y_{M3}, y_{M4} & h_1(Y_M), h_2(Y_M), h_3(Y_M), h_4(Y_M) \end{bmatrix}, \quad (34)$$

Представим математическую модель структуры материала в условиях неопределенности в виде векторной задачи математического программирования:

$$Opt H(Y) = \{max I_1(Y) = \{max h_k(Y), k = \overline{1, K_1^{unc}}\}, \quad (35)$$

$$min I_2(Y) = \{min h_k(Y), k = \overline{1, K_2^{unc}}\}, \quad (36)$$

$$\text{at restrictions } G(Y) \leq B, h_k^{min} \leq h_k(X) \leq h_k^{max}, k = \overline{1, K}, \sum_{v=1}^V y_v(t) = 100\%, \quad (37)$$

$$y_v^{min} \leq y_v \leq y_v^{max}, v = \overline{1, V}, \quad (38)$$

где $Y = \{y_v, v = \overline{1, V}\}$ - вектор управляемых переменных (параметров);

$H(Y) = \{I_1(Y) I_2(Y)\}$ - векторный критерий, каждая компонента которого представляет вектор критериев (выходных характеристик исследуемого объекта). Величина характеристики (функции) зависит от дискретных значений вектора переменных Y . $I_1(Y) = \overline{1, K_1^{unc}}$, $I_2(Y) = \overline{1, K_2^{unc}}$ (*uncertainty*) – множество критериев *max* и *min* сформированные в условиях неопределенности;

в (37) $h_k^{min} \leq h_k(X) \leq h_k^{max}, k = \overline{1, K}$ – вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование исследуемого объекта, $y_v^{min} \leq y_v \leq y_v^{max}, v = \overline{1, V}$ – параметрические ограничения исследуемого объекта.

2.1.4. 4 этап. Преобразование экспериментальных данных (условий неопределенности) в данные с функциональной зависимостью (условия определенности). Построение численной модели.

Формирование в условиях неопределенности состоит в использовании качественных, количественных описаний структуры материала, полученных по принципу “вход-выход” в таблице 2. Преобразование исходные данных (информации): $h_1(y_i, i = \overline{1, M})$, $h_2(y_i, i = \overline{1, M})$,



$h_3(y_i, i = \overline{1, M}), h_4(y_i, i = \overline{1, M})$ в функциональный вид: $\{h_1(Y), h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)\}$ осуществляется путем использования математических методов регрессионного анализа.

Исходные данные сформированы в таблице 2 в системе MATLAB в виде матрицы (34):

$$I = |Y, H| = \{y_{i1}, y_{i2}, y_{i3}, y_{i4}, h_{i2}, h_{i3}, h_{i4}, i = \overline{1, M}\}. \quad (39)$$

Для каждого набора экспериментальных данных таблицы 2 $h_k, k = 1, 2, 3, 4$ строится функция регрессии методом наименьших квадратов $\min \sum_{i=1}^M (x_i - \bar{x}_i)^2$ в системе MATLAB.

Формируется полином A_k , определяющий взаимосвязь параметров $Y_i = \{y_{i1}, y_{i2}, y_{i3}, y_{i4}\}$ и функции $\bar{h}_{ki} = h(Y_i, A_k), k = 1, 2, 3, 4$. Результатом является система коэффициентов:

$$A_k = \{A_{0k}, A_{1k}, \dots, A_{14k}\}, \text{ определяющие коэффициенты квадратичного полинома:} \\ h_k(Y, A) = A_{0k} + A_{1k}y_1 + A_{2k}y_2 + A_{3k}y_3 + A_{4k}y_4 + A_{5k}y_1y_2 + A_{6k}y_1y_3 + A_{7k}y_1y_4 + \\ A_{8k}y_2y_3 + A_{9k}y_2y_4 + A_{10k}y_3y_4 + A_{11k}y_1^2 + A_{12k}y_2^2 + A_{13k}y_3^2 + A_{14k}y_4^2, k = 1, 2, 3, 4. \quad (40)$$

Программное обеспечение полиномиальной аппроксимации с четырьмя переменными и четырнадцатью факторами разработано. В итоге экспериментальные данные таблицы 2 преобразуются систему коэффициентов четырех функции $h_k(Y, A)$ в виде таблицы:

$$\begin{aligned} A_0 &= [269.8673 \ 795.7195 \ 39.7581 \ 17.5032 \quad \% A_{0k} \\ &-1.8746 \ 23.8932 \ 0.6598 \ -0.0081 \quad \% A_{1k} \\ &-2.9115 \ 30.8660 \ 0.4493 \ -0.7005 \quad \% A_{2k} \\ &8.9389 \ -25.8586 \ -0.3094 \ -0.3605 \quad \% A_{3k} \\ &10.9366 \ -45.0026 \ -1.8334 \ 0.9769 \quad \% A_{4k} \\ &0.0807 \ -0.7683 \ -0.0110 \ 0.0138 \quad \% A_{5k} \\ &-0.0517 \ 0.4703 \ -0.0069 \ 0.0708 \quad \% A_{6k} \\ &-0.1413 \ 0.7472 \ 0.0161 \ -0.0001 \quad \% A_{7k} \\ &0.0619 \ -0.1283 \ -0.0143 \ 0.0436 \quad \% A_{8k} \\ &-0.0868 \ 0.3266 \ 0.0134 \ 0.0002 \quad \% A_{9k} \\ &0.0030 \ -0.0112 \ -0.0005 \ 0.0005 \quad \% A_{10k} \\ &0.0119 \ 0.0398 \ -0.0003 \ -0.0018 \quad \% A_{11k} \\ &.0098 \ 0.0365 \ -0.0002 \ 0.0029 \quad \% A_{12k} \\ &-0.2028 \ 3.2074 \ 0.0279 \ 0.0050 \quad \% A_{13k} \\ &-0.4188 \ 2.6457 \ 0.1033 \ -0.0259]; \quad \% A_{14k} \\ R_j &= [0.6115 \ 0.7149 \ 0.6551 \ 0.9017]; \\ RR_j &= [0.3740 \ 0.5111 \ 0.4292 \ 0.8130]. \end{aligned} \quad (41)$$

На основе $A_0(1) \ A_0(2) \ A_0(3) \ A_0(4)$ строятся функции $h_1(Y), h_2(Y), h_3(Y)$ и $h_4(Y)$, которые с учетом полученных коэффициентов примут вид:

$$\max h_1(Y), \min h_2(Y), \max h_3(Y), \min h_4(Y), \text{ with restrictions:} \quad (42)$$

при ограничениях: (21).

Представим функции $h_1(Y), h_2(Y), h_3(Y)$ и $h_4(Y)$, которые с учетом полученных коэффициентов (41) и ограничений (20), представляют векторную задачу с условиями неопределенности:

$$\begin{aligned} \max h_1(Y) &\equiv 269.86 - 1.8746y_1 - 2.9115y_2 + 8.9389y_3 + 10.936y_4 + 0.0807y_1y_2 - 0.0517y_1y_3 \\ &- 0.1413y_1y_4 + 0.0619y_2y_3 - 0.0868y_2y_4 + 0.003y_3y_4 + 0.0119y_1^2 + 0.0098y_2^2 - 0.2028y_3^2 - \\ &0.4188y_4^2, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \min h_2(Y) &\equiv 795.72 + 23.89y_1 + 30.866y_2 - 25.8586y_3 - 45.0026y_4 - 0.7683y_1y_2 + \\ &0.4703y_1y_3 + 0.7472y_1y_4 - 0.1283y_2y_3 + 0.3266y_2y_4 - 0.0112y_3y_4 + 0.0398y_1^2 + 0.0365y_2^2 \\ &+ 3.2y_3^2 + 2.6457y_4^2 \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \max h_3(Y) &\equiv 39.7581 + 0.6598y_1 + 0.4493y_3 - 0.3094y_4 - 1.8334y_4 - 0.0110y_1y_2 - \\ &0.0069y_1y_3 + 0.0161y_1y_4 - 0.0143y_2y_3 + 0.0134y_2y_4 - 0.0005y_3y_4 - 0.0003y_1^2 - \\ &0.0002y_2^2 + 0.0279y_3^2 + 0.1033y_4^2, \end{aligned} \quad (45)$$



$$\begin{aligned} \min h_4(Y) = & 17.5032 - 0.0081y_1 - 0.7005y_2 - 0.3605y_3 + 0.9769y_4 + 0.0138y_1y_2 \\ & + 0.0708y_1y_3 - 0.0001y_1y_4 + 0.0436y_2y_3 + 0.0002y_2y_4 + 0.0005y_3y_4 - \\ & 0.0018y_1^2 + 0.0029y_2^2 + 0.005y_3^2 - 0.0259y_4^2, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\text{при ограничениях: } y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 100, \quad (47)$$

$$20.0 \leq y_1 \leq 80.0, 0.0 \leq y_2 \leq 60.0, 2.0 \leq y_3 \leq 8.0, 2.0 \leq y_4 \leq 8.0. \quad (48)$$

Минимальные и максимальные значения экспериментальных данных $y_1, \dots, y_4$ представлены в нижней части таблицы 2. Минимальные и максимальные значения функций $h_1(Y), h_2(Y), h_3(Y)$ и $h_4(Y)$ незначительно отличаются от экспериментальных данных. Индекс корреляции и коэффициенты детерминации представлены в нижних строках таблицы 2. Результаты регрессионного анализа (27), (28) в дальнейшем используются при построении математической модели структуры материала.

Получившаяся математическая модель в виде ВЗМП (43)-(48) является численной моделью структуры материала в условиях неопределенности.

2.1.5. Построение агрегированной численной модели структуры материала в условиях определенности

Объединяя математические модели структуры материала в условиях определенности (31)-(33) и неопределенности (43)-(48) представим математическую модель технической системы в условиях определенности и неопределенности в совокупности в виде ВЗМП:

$$\begin{aligned} \text{Opt } H(Y) = & \{ \max H_1(Y) = \{ \max h_k(Y), k = \overline{1, K_1^{def}} \}, \\ & \max I_1(Y) = \{ \max h_k(Y_i, i = \overline{1, M}), k = \overline{1, K_1^{unc}} \}, \\ & \min H_2(Y) = \{ \min h_k(Y), k = \overline{1, K_2^{def}} \}, \\ & \min I_2(Y) = \{ \min h_k(Y_i, i = \overline{1, M}), k = \overline{1, K_2^{unc}} \} \}, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \text{при ограничениях } G(Y) \leq B, h_k^{min} \leq h_k(X) \leq h_k^{max}, k = \overline{1, K}, \sum_{v=1}^V y_v(t) = 100\%, \\ y_v^{min} \leq y_v \leq y_v^{max}, v = \overline{1, V}, \end{aligned}$$

где $Y = \{y_v, v = \overline{1, V}\}$ - вектор управляемых переменных (конструктивных параметров);

$$H_1(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K_1^{def}}\}, H_2(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K_2^{def}}\} -$$

множество функций $\max$ и $\min$ соответственно;

$$I_1(Y) = \{ \{h_k(Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}} \}, I_2(X) = \{ \{h_k(Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_2^{unc}} \} \quad (50)$$

множество матриц $\max$ и $\min$ соответственно; (*definiteness*), K_1^{unc}, K_2^{unc} (*uncertainty*) множество критериев $\max$ и $\min$ сформированные в условиях определенности и неопределенности.

Объединяя численные модели структуры материала в условиях определенности (31)-(33) и неопределенности (43)-(48) представим числовую структуру материала в условиях определенности и неопределенности в совокупности в виде векторной задачи:

$$\begin{aligned} \text{opt } H(Y) = & \{ \max H_1(Y) = \{ \max h_1(Y) = 269.86 - 1.8746y_1 - \\ & 2.9115y_2 + 8.9389y_3 + 10.936y_4 + 0.0807y_1y_2 - 0.0517y_1y_3 - 0.1413y_1y_4 + 0.0619y_2y_3 - \\ & 0.0868y_2y_4 + 0.003y_3y_4 + 0.0119y_1^2 + 0.0098y_2^2 - 0.2028y_3^2 - 0.4188y_4^2, \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \max h_3(Y) = & 39.7581 + 0.6598y_1 + 0.4493y_3 - 0.3094y_3 - 1.8334y_4 - 0.0110y_1y_2 - \\ & 0.0069y_1y_3 + 0.0161y_1y_4 - 0.0143y_2y_3 + 0.0134y_2y_4 - 0.0005y_3y_4 - 0.0003y_1^2 - \\ & 0.0002y_2^2 + 0.0279y_3^2 + 0.1033y_4^2 \}, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \max h_6(Y) = & 41.758 + 0.6598y_1 + 0.4505y_2 - 0.3094y_3 - 1.8334y_4 - \\ & 0.011y_1y_2 - 0.0069y_1y_3 + 0.0161y_1y_4 - 0.0143y_2y_3 + 0.0134y_2y_4 - 0.0005y_3y_4 - \\ & 0.0003y_1^2 - 0.0002y_2^2 + 0.0279y_3^2 + 0.1033y_4^2 \}, \end{aligned} \quad (53)$$



$$\min H_2(Y) = \{ \min h_2(Y) \equiv 795.72 + 23.89y_1 + 30.866y_2 - 25.8586y_3 - 45.0026y_4 - 0.7683y_1y_2 + 0.4703y_1y_3 + 0.7472y_1y_4 - 0.1283y_2y_3 + 0.3266y_2y_4 - 0.0112y_3y_4 + 0.0398y_1^2 + 0.0365y_2^2 + 3.2y_3^2 + 2.6457y_4^2, \quad (54)$$

$$\min h_4(Y) \equiv 17.5032 - 0.0081y_1 - 0.7005y_2 - 0.3605y_3 + 0.9769y_4 + 0.0138y_1y_2 + 0.0708y_1y_3 - 0.0001y_1y_4 + 0.0436y_2y_3 + 0.0002y_2y_4 + 0.0005y_3y_4 - 0.0018y_1^2 + 0.0029y_2^2 + 0.005y_3^2 - 0.0259y_4^2 \}, \quad (55)$$

$$\min h_5(Y) = 886.27 + 26.28y_1 + 33.95y_2 - 27.445y_3 - 49.5y_4 - 0.8451y_1y_2 + 0.5173y_1y_3 + 0.8219y_1y_4 - 0.1411y_2y_3 + 0.3593y_2y_4 - 0.0123y_3y_4 + 0.0438y_1^2 + 0.0401y_2^2 + 3.5281y_3^2 + 2.9103y_4^2 \}, \quad (56)$$

$$\text{at restrictions: } y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 100, \quad (57)$$

$$20.0 \leq y_1 \leq 80.0, 0.0 \leq y_2 \leq 60.0, 2.0 \leq y_3 \leq 8.0, 2.0 \leq y_4 \leq 8.0. \quad (58)$$

Векторная задача математического программирования (51)-(58) представляет численную модель структуры материала для принятия оптимального решения в условиях определенности и неопределенности в совокупности.

2.2. Блок 2. Принятие оптимального решения (выбора оптимальных параметров) структуры материала при равнозначных критериях на базе многомерной математики.

2.2.1. 5 этап. Решение векторной задачи - выбор оптимальных параметров структуры материала при равнозначных критериях.

Для формирования модели структуры материала на базе векторной задачи математического программирования с равнозначными критериями (51)-(58) представлены методы, основанные на аксиоматике нормализации критериев и принципе гарантированного результата, вытекающие из аксиомы 1 и принципа оптимальности 1.

Методика решения представлена в виде ряда шагов.

Шаг 1. Решение ВЗМП (51)-(58) по каждому критерию отдельно. Для решения используется функция *fmincon(...)* системы MATLAB, обращение к функции *fmincon(...)* в [18, 19]. Как результат расчета, по каждому критерию получаем точки оптимума: X_k^* и

$h_k^* = h_k(Y_k^*), k = \overline{1, K}, K = 6$ – величины критериев - наилучшее решение по каждому критерию:

$$\begin{aligned} \text{Criterion 1: } Y_1^* &= \{y_1 = 36.0, y_2 = 33.58, y_3 = 8.0, y_4 = 2.4\}, h_1^* = h_1(Y_1^*) = 293.6; \\ \text{Criterion 2: } Y_2^* &= \{y_1 = 20.0, y_2 = 6.50, y_3 = 5.49, y_4 = 8.0\}, h_2^* = h_2(Y_2^*) = 1339.1; \\ \text{Criterion 3: } Y_3^* &= \{y_1 = 70.0, y_2 = 0.0, y_3 = 2.0, y_4 = 8.0\}, h_3^* = h_3(Y_3^*) = 84.0; \\ \text{Criterion 4: } Y_4^* &= \{y_1 = 20.0, y_2 = 56.0, y_3 = 2.0, y_4 = 2.0\}, h_4^* = h_4(Y_4^*) = 10.8. \\ \text{Criterion 5: } Y_5^* &= \{y_1 = 20.0, y_2 = 6.63, y_3 = 5.36, y_4 = 8.0\}, h_5^* = h_5(Y_5^*) = 1489.4; \\ \text{Criterion 6: } Y_6^* &= \{y_1 = 70.0, y_2 = 0.0, y_3 = 2.0, y_4 = 8.0\}, h_6^* = h_6(Y_6^*) = 86.0. \end{aligned} \quad (59)$$

(В дальнейших расчётах и рисунках значения: $y_1, y_3, Y, h, Y_1^*, Y_K^*$ обозначены на рисунках, как $x_1, x_3, Y, f, X_1^*, X_K^*$)

Результат (59) решения ВЗМП (51)-(58), ограничения (57)-(58) и точки оптимума $x_1, x_3, X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$ в координатах x_1, x_3 представлены на рис. 11.

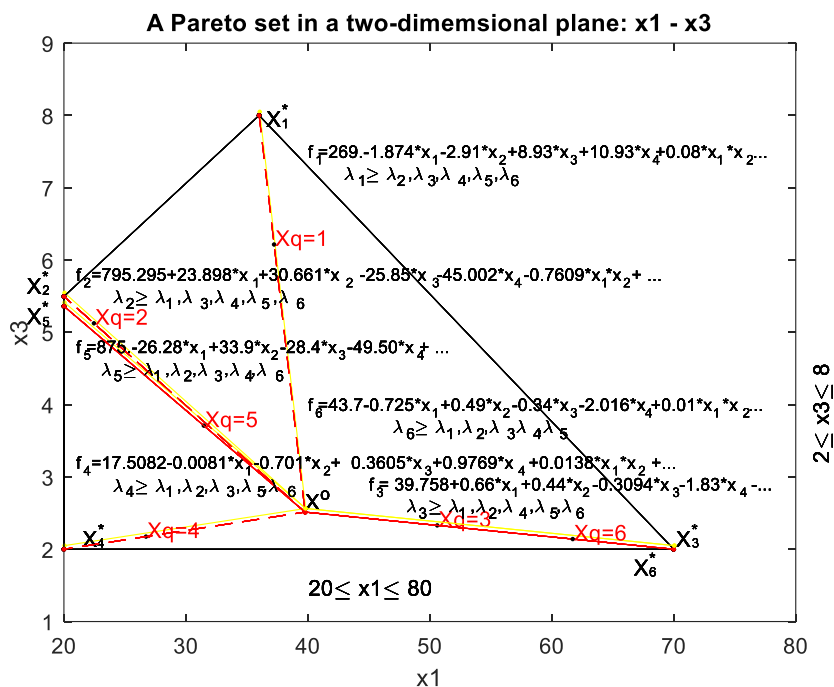


Рисунок 1. Допустимое множество точек $\mathbf{S}$ в координатах x_1, x_3 . Множество точек, оптимальных по Парето, $\mathbf{S}^o \subset \mathbf{S}$, ограничено точками $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$, и локальное $\mathbf{S}_1^o$ между $X_1^*, X_{13}^*, X^o, X_{12}^o, X_1^*$ в двухмерной системе координат $\{x_1, x_3\}$.

Шаг 2. Вычисляем наихудшую величину каждого критерия (антиоптимум): X_k^0 и $f_k^0 = f_k(X_k^0)$, $k = \overline{1, K}$, $K=4$. Для этого решается задача (30)-(35) для каждого критерия $k = \overline{1, K_1}$ на минимум, для каждого критерия $k = \overline{1, K_2}$ на максимум. В результате получим: $X_k^0 = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ - точка оптимума по соответствующему критерию, $k = \overline{1, K}$; $f_k^0 = f_k(X_k^0)$ – величина k -го критерия в точке, X_k^0 , $k = \overline{1, K}$, (верхний индекс ноль):

$$\begin{aligned}
\text{Criterion 1: } X_1^0 &= \{x_1 = 20, x_2 = 50, x_3 = 2.0, x_4 = 8.0\}, f_1^0 = f_1(X_1^0) = 221.4; \\
\text{Criterion 2: } X_2^0 &= \{x_1 = 70, x_2 = 0, x_3 = 2.0, x_4 = 8.0\}, f_2^0 = f_2(X_2^0) = 2917.8, \\
\text{Criterion 3: } X_3^0 &= \{x_1 = 20.0, x_2 = 4.0, x_3 = 8.0, x_4 = 8.0\}, f_3^0 = f_3(X_3^0) = 46.4, \\
\text{Criterion 4: } X_4^0 &= \{x_1 = 55.88, x_2 = 8.11, x_3 = 8.0, x_4 = 8.0\}, f_4^0 = f_4(X_4^0) = 50.3, \\
\text{Criterion 5: } X_5^0 &= \{x_1 = 20.0, x_2 = 50.0, x_3 = 2.0, x_4 = 8.0\}, f_5^0 = f_5(X_5^0) = 2413.4, \\
\text{Criterion 6: } X_6^0 &= \{x_1 = 20.0, x_2 = 4.0, x_3 = 8.0, x_4 = 8.0\}, f_6^0 = f_6(Y_6^0) = 48.4
\end{aligned} \tag{60}$$

Шаг 3. Системный анализ множества точек, оптимальных по Парето, (т.е. анализ по каждому критерию) реализуется. Для этого в точках оптимума $X^* = \{X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^*, X_6^*\}$ определяются величины целевых функций $F(X^*) = \|f_q(X_k^*)\|_{q=\overline{1,K}}^{k=\overline{1,K}}$,

$D = (d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4 \ d_5 \ d_6)^T$ - вектор отклонений по каждому критерию на допустимом множестве S : $d_k = f_k^* - f_k^0, k = \overline{1,6}$, и матрица относительных оценок:

$$\lambda(X^*) = \|\lambda_q(X_k^*)\|_{q=\overline{1,K}}^{k=\overline{1,K}}, \text{ где } \lambda_k(X) = \frac{f_k(X) - f_k^0}{d_k}; \text{ } Lmin = \lambda(X^0) = \|\lambda_q(X_k^0)\|_{q=\overline{1,K}}^{k=\overline{1,K}}.$$

$$F(X^*) = \begin{bmatrix} 293.6 & 1953.7 & 56.8 & 43.1 & 2168.1 & 58.9 \\ 302.3 & 1339.1 & 47.4 & 27.7 & 1489.5 & 49.4 \\ 188.4 & 2917.8 & 84.0 & 23.4 & 3222.5 & 86.0 \\ 222.0 & 2224.5 & 61.6 & 10.8 & 2460.0 & 63.6 \\ 301.3 & 1339.2 & 47.5 & 27.5 & 1489.4 & 49.5 \\ 188.4 & 2917.8 & 84.0 & 23.4 & 3222.5 & 86.0 \end{bmatrix}, d_k = \begin{bmatrix} 72.26 \\ -1578.7 \\ 37.539 \\ -39.4 \\ -923.9 \\ 37.53 \end{bmatrix}. \quad (61)$$

$$\lambda(X^*) = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.6107 & 0.2773 & 0.1824 & 0.2655 & 0.2782 \\ 1.1207 & 1.0000 & 0.0787 & 0.6825 & 1.0000 & 0.0787 \\ -0.4562 & 0.1418 & 1.0000 & 0.7774 & 0.1445 & 1.0000 \\ 0.0085 & 0.6923 & 0.2804 & 1.0000 & 0.6942 & 0.2816 \\ 1.1064 & 1.0000 & 0.0832 & 0.6898 & 1.0000 & 0.0832 \\ -0.4562 & 0.1418 & 1.0000 & 0.7774 & 0.1445 & 1.0000 \\ 0.0 & 0.4660 & 0.4008 & 0.8849 & 0.1445 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$\lambda(X^0) = \begin{bmatrix} -0.4562 & 0.0 & 0.9135 & 0.1414 & -0.0000 & 0.9134 \\ 1.3601 & 0.9846 & 0.0 & 0.6063 & 0.9831 & 0.0000 \\ 0.7108 & 0.5921 & 0.4401 & 0.0 & 0.5912 & 0.4403 \\ -0.00 & 0 & 0.9135 & 0.1414 & 0.0 & 0.9134 \\ 1.3628 & 0.9847 & 0.0000 & 0.6062 & 0.9832 & 0.0 \end{bmatrix}. \quad (62)$$

Системный анализ величин критериев в относительных оценках в ВЗМП (51)-(58) показывает: в точках оптимума $X^* = \{X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^*, X_6^*\}$ (по диагонали) относительная оценка равна единице. Остальные критерии (62) $\lambda(X^*) = \|\lambda_q(X_k^*)\|_{q=1, \bar{K}}^{k=1, \bar{K}}$ значительно меньше единицы и наихудшее решение в точке $X^0 = \{X_1^0, X_2^0, X_3^0, X_4^0, X_5^0, X_6^0\}$, где относительная оценка $\lambda(X^0) = 0$. Требуется найти такую точку (параметры), при которых относительные оценки близки к единице. На решение этой проблемы направлено решение λ -задачи: шаг 4, 5.

Шаг 4. Формирование λ -задачи реализуется в два этапа.

При построении λ -задачи используется нормализация следующего вида: $\lambda_k(X) = \frac{f(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}$, где f_k^* - оптимальное значение, полученное на первом шаге, f_k^0 - наихудшее значение, полученное на втором шаге.

На первом этапе строится максиминная задача оптимизации с нормализованными критериями: $\lambda_k(X) = \frac{f(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}$

$$\lambda^0 = \max_{X \in S} \min_{k \in K} \lambda_k(X), G(X) \leq 0, X \geq 0, \quad (63)$$

на 2-м этапе максиминная задача (63) преобразуется в стандартную задачу математического программирования (λ -задача):

$$\lambda^0 = \max \lambda, \quad (64)$$

$$\text{с ограничениями } \lambda - \frac{f_1(X) - f_1^0}{f_1^* - f_1^0} \leq 0, \lambda - \frac{f_3(X) - f_3^0}{f_3^* - f_3^0} \leq 0, \lambda - \frac{f_6(X) - f_6^0}{f_6^* - f_6^0} \leq 0,$$

$$\lambda - \frac{f_2(X) - f_2^0}{f_2^* - f_2^0} \leq 0, \lambda - \frac{f_4(X) - f_4^0}{f_4^* - f_4^0} \leq 0, \lambda - \frac{f_5(X) - f_5^0}{f_5^* - f_5^0} \leq 0, \quad (65)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100,$$

$$0 \leq \lambda \leq 1, 20.0 \leq x_1 \leq 80.0, 0.0 \leq x_2 \leq 60.0, 2.0 \leq x_3 \leq 8.0, 2.0 \leq x_4 \leq 8.0.$$

Вектор неизвестных имеет размерность $N+1$: $X = \{x_1, \dots, x_N, \lambda\}$ функции $f_1(X), f_2(X), \dots, f_6(X)$ соответствуют (51)-(56) соответственно. Подставив числовые значения функций $f_1(X), f_2(X), \dots, f_6(X)$, мы получим λ -задачу следующего вида:

$$\lambda^0 = \max \lambda, \quad (66)$$

$$\text{at restrictions } \lambda - \frac{269.86 - 1.8746x_1 - \dots - 0.2028x_3^2 - 0.4188x_4^2 - f_1^0}{f_1^* - f_1^0} \leq 0, \dots,$$

$$\lambda - \frac{41.758 + 0.6598x_1 + 0.4505x_2 - \dots + 0.0279x_3^2 + 0.1033x_4^2 - f_6^0}{f_6^* - f_6^0} \leq 0, \quad (67)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100,$$

$$0 \leq \lambda \leq 1, 20.0 \leq x_1 \leq 80.0, 0.0 \leq x_2 \leq 60.0, 2.0 \leq x_3 \leq 8.0, 2.0 \leq x_4 \leq 8.0.$$

Шаг 5. Решение λ -задачи (66)-(67).

Для этой цели мы используем обращение к функции $fmincon(\dots)$, [16]:



$[Xo, Lo] = fmincon('Z_TehnSist_4Krit_L', X0, Ao, bo, Aeq, beq, lbo, ubo, 'Z_TehnSist_LConst', options).$

В результате решения векторной задачи (51)-(57) при равнозначных критериях и соответствующей ей λ -задачи (67)-(68) получили:

$$X^o = \{X^o, \lambda^o\} = \{X^o = \{x_1 = 39.77, x_2 = 24.34, x_3 = 2.5139, x_4 = 2.0, \lambda^o = 0.4206\} \quad (68)$$

точку оптимума X^o – конструктивные параметры структуры материала, которая представлена на рис. 1;

$$f_k(X^o), k = \overline{1, K} - \text{величины критериев (характеристик структуры материала):} \\ \{f_1(X^o) = 251.8, f_2(X^o) = 1828.4, f_3(X^o) = 62.2, \\ f_4(X^o) = 23.1, f_5(X^o) = 2024.7, f_6(X^o) = 64.2\}; \quad (69)$$

$$\lambda_k(X^o), k = \overline{1, K} - \text{величины относительных оценок} \\ \lambda(X^o) = \{\lambda_1(X^o) = 0.4206, \lambda_2(X^o) = 0.6901, \lambda_3(X^o) = 0.4206, \\ \lambda_4(X^o) = 0.6892, \lambda_5(X^o) = 0.4206, \lambda_6(X^o) = 0.4213\}; \quad (70)$$

$\lambda^o = 0.4206$ – это максимальный нижний уровень среди всех относительных оценок в относительных единицах: $\lambda^o = \min(\lambda_1(X^o), \lambda_3(X^o), \lambda_5(X^o), \lambda_6(X^o)) = 0.4206$.

$\lambda^o = 0.4206$ называют также гарантированным результатом в относительных единицах. $\lambda_k(X^o)$ и соответственно характеристики структуры материала $f_k(Y^o)$ нельзя улучшить, не ухудшая при этом другие характеристики.

В соответствии с теоремой с 1, в точке X^o критерии 1, 3, 5 и 6: $\lambda_1(X^o), \lambda_3(X^o), \lambda_5(X^o), \lambda_6(X^o)$ противоречивы. Это противоречие определяется равенством: $\lambda_1(X^o) = \lambda_3(X^o) = \lambda_5(X^o) = \lambda_6(X^o) = \lambda^o = 0.4206$, а остальные критерии неравенством $\{\lambda_2(X^o) = 0.6901, \lambda_4(X^o) = 0.6892\} > \lambda^o$.

Теорема 1 [16] служит основой для определения правильности решения векторной задачи. В ВЗМП, как правило, для двух критериев выполняется равенство:

$$\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_p(X^o), \quad q, p \in K, X \in S,$$

(в нашем примере такие критерии 1, 3, 5, 6), для других критериев определяется как неравенство.

2.2.2. 6 этап. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП с 4 параметрами и 6 критериями в двухмерную систему координат (с 2 параметрами) в относительных единицах.

Для геометрической интерпретации результатов решения ВЗМП с 4 параметрами и 6 критериями в двухмерную систему координат (с 2-мя параметрами) в относительных единицах введем изменения. В векторной задаче (51)-(58) параметры x_1 и x_3 рассматриваются как переменные, а параметры x_2 и x_4 рассматриваются как постоянные. В соответствии с результатом решения ВЗМП (51)-(58) при равнозначных критериях (68):

$X^o = \{X^o, \lambda^o\} = \{X^o = \{x_1 = 39.77, x_2 = 24.34, x_3 = 2.5139, x_4 = 2.0, \lambda^o = 0.4206\}$ в ВЗМП (51)-(58) во всех функциях переменным x_2, x_4 присвоим постоянные параметры с размерностью: $x_2 = 24.34, x_4 = 2.0$. В итоге ВЗМП (51)-(58) стала двухмерной с двумя переменными x_1 и x_3 .

Результаты решения ВЗМП (51)-(58) с двумя переменными x_1 и x_3 .

В обозначениях результатов решения ввели дополнительную букву «о» $X1o\max$.

1. По первому критерию координаты точки на максимум равны:

$$X1o\max = \{x_1 = 36.0042 \quad x_2 = 24.3454 \quad x_3 = 8.0000 \quad x_4 = 2.0000\}. \quad (71)$$



Величины шести критериев в точке $X1_{\max}$: $FX1_{\max} = \{f_1(X1_{\max}) = 285.0$
 $f_2(X1_{\max}) = 1906.2$ $f_3(X1_{\max}) = 57.4$ $f_4(X1_{\max}) = 39.8$ $f_5(X1_{\max}) = 2115.8$
 $f_6(X1_{\max}) = 59.4\}$.

Величины относительны оценок критериев в точке $X1_{\max}$:

$LX1_{\max} = \{\lambda_1(X1_{\max}) = 0.8807$ $\lambda_2(X1_{\max}) = 0.6408$ $\lambda_3(X1_{\max}) =$
 0.2924 $\lambda_4(X1_{\max}) = 0.2650$ $\lambda_5(X1_{\max}) = 0.3221$ $\lambda_6(X1_{\max}) = 0.2931\}$.

Координаты точки по первому критерию на минимум:

$X1_{\min} = \{20.0000$ 24.3454 2.0000 $2.0000\}$.

Величины шести критериев в точке $X1_{\min}$:

$FX1_{\min} = \{1.0e+03 * 0.2397$ 1.6285 0.0549 0.0141 1.8043 $0.0569\}$.

Величины относительны оценок критериев в точке $X1_{\min}$:

$LX1_{\min} = \{0.2538$ 0.8167 0.2250 0.9166 0.6592 $0.2257\}$.

2. По второму критерию координаты точки, функции и относительные оценки на максимум и минимум равны:

$$\begin{aligned} X2_{\max} &= \{20.0000 \ 24.3454 \ 5.4965 \ 2.0000\}. \\ FX2_{\max} &= \{1.0e+03 * 0.2673 \ 1.6440 \ 0.0528 \ 0.0217 \ 1.8249 \ 0.0548\}. \\ LX2_{\max} &= \{0.6359 \ 0.8068 \ 0.1703 \ 0.7255 \ 0.6369 \ 0.1709\}. \\ X2_{\min} &= \{70.0000 \ 24.3454 \ 2.0000 \ 2.0000\}. \\ FX2_{\min} &= \{1.0e+03 * 0.2785 \ 2.1888 \ 0.0740 \ 0.0295 \ 2.4206 \ 0.0761\}. \\ LX2_{\min} &= \{0.7901 \ 0.4618 \ 0.7356 \ 0.5271 \ -0.0079 \ 0.7364\}. \end{aligned} \quad (73)$$

3. По третьему критерию координаты точки, функции и относительные оценки на максимум и минимум.

$$\begin{aligned} X3_{\max} &= \{70.0000 \ 24.3454 \ 2.0000 \ 2.0000\} \\ FX3_{\max} &= 1.0e+03 * 0.2785 \ 2.1888 \ 0.0740 \ 0.0295 \ 2.4206 \ 0.0761 \\ LX3_{\max} &= 0.7901 \ 0.4618 \ 0.7356 \ 0.5271 \ -0.0079 \ 0.7364 \\ X3_{\min} &= \{20.0000 \ 24.3454 \ 8.0000 \ 2.0000\} \\ FX3_{\min} &= 1.0e+03 * 0.2840 \ 1.7033 \ 0.0518 \ 0.0271 \ 1.8927 \ 0.0538 \\ LX3_{\min} &= 0.8674 \ 0.7693 \ 0.1423 \ 0.5868 \ 0.5636 \ 0.1429. \end{aligned} \quad (73)$$

4. По четвертому критерию координаты точки, функции и относительные оценки на максимум и минимум равны:

$$\begin{aligned} X4_{\max} &= \{20.0000 \ 24.3454 \ 2.0000 \ 2.0000\} \\ FX4_{\max} &= 1.0e+03 * 0.2397 \ 1.6285 \ 0.0549 \ 0.0141 \ 1.8043 \ 0.0569 \\ LX4_{\max} &= 0.2538 \ 0.8167 \ 0.2250 \ 0.9166 \ 0.6592 \ 0.2257 \\ X4_{\min} &= \{55.8898 \ 24.3454 \ 8.0000 \ 2.0000\} \\ FX4_{\min} &= 1.0e+03 * 0.2947 \ 2.1866 \ 0.0642 \ 0.0543 \ 2.4243 \ 0.0662 \\ LX4_{\min} &= 1.0149 \ 0.4631 \ 0.4733 \ -0.1024 \ -0.0118 \ 0.4740 \end{aligned} \quad (74)$$

5. В соответствии с пятым критерием, координаты точки, функции и относительные оценки по пятому критерию на максимум и минимум:

$$\begin{aligned} X5_{\max} &= \{20.0000 \ 24.3454 \ 5.3618 \ 2.0000\} \\ FX5_{\max} &= 1.0e+03 * 0.2663 \ 1.6420 \ 0.0529 \ 0.0214 \ 1.8225 \ 0.0549 \\ LX5_{\max} &= 0.6225 \ 0.8081 \ 0.1720 \ 0.7330 \ 0.6395 \ 0.1727 \\ X5_{\min} &= \{20.0000 \ 24.3454 \ 2.0000 \ 2.0000\} \\ FX5_{\min} &= 1.0e+03 * 0.2397 \ 1.6285 \ 0.0549 \ 0.0141 \ 1.8043 \ 0.0569 \\ LX5_{\min} &= 0.2538 \ 0.8167 \ 0.2250 \ 0.9166 \ 0.6592 \ 0.2257 \end{aligned} \quad (75)$$

6. В соответствии с шестым критерием, координаты точки, функции и относительные оценки по шестому критерию на максимум и минимум:

$$\begin{aligned} X6_{\max} &= \{70.0000 \ 24.3454 \ 2.0000 \ 2.0000\} \\ FX6_{\max} &= 1.0e+03 * 0.2785 \ 2.1888 \ 0.0740 \ 0.0295 \ 2.4206 \ 0.0761 \\ LX6_{\max} &= 0.7901 \ 0.4618 \ 0.7356 \ 0.5271 \ -0.0079 \ 0.7364 \\ X6_{\min} &= \{20.0000 \ 24.3454 \ 8.0000 \ 2.0000\} \\ FX6_{\min} &= 1.0e+03 * 0.2840 \ 1.7033 \ 0.0518 \ 0.0271 \ 1.8927 \ 0.0538 \end{aligned} \quad (76)$$



$$LX6_{\min} = 0.8674 \quad 0.7693 \quad 0.1423 \quad 0.5868 \quad 0.5636 \quad 0.1429.$$

Представим в целом результаты решения ВЗМП с двумя переменными параметрами: x_1 и x_3 (двухмерная ВЗМП):

$$\begin{aligned} X &= [X1_{\max} = \{x_1 = 36.0 \quad x_2 = 24.34 \quad x_3 = 8.0 \quad x_4 = 2.00\}, \lambda_1(X1_{\max}) = 0.8807; \\ X2_{\max} &= \{20.0000 \quad 24.34 \quad 5.4965 \quad 2.00\}, \lambda_2(X2_{\max}) = 0.8068; \\ X3_{\max} &= \{70.0000 \quad 24.34 \quad 2.0000 \quad 2.00\}, \lambda_3(X3_{\max}) = 0.7356; \\ X4_{\max} &= \{20.0000 \quad 24.34 \quad 2.0000 \quad 2.00\}, \lambda_4(X4_{\max}) = 0.9166; \\ X5_{\max} &= \{20.0000 \quad 24.34 \quad 5.3618 \quad 2.00\}, \lambda_5(X5_{\max}) = 0.6206; \\ X6_{\max} &= \{20.0000 \quad 24.34 \quad 8.0000 \quad 2.00\}, \lambda_6(X6_{\max}) = 0.7364; \\ X^0 &= \{x_1 = 39.77, x_2 = 24.34, x_3 = 2.5139, x_4 = 2.00\}, \lambda(X^0) = \lambda^0 = 4206. \end{aligned} \quad (77)$$

В допустимом множестве точек S , образованных ограничениями (57)-(58), в двухмерной системе координат $x_1 \ x_3$ точки оптимума $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^*, X_6^*$, объединенных в контур, представляют множество точек, оптимальных по Парето, $S^0 \subset S$, представлены на рис 1.

Точки оптимума $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^*, X_6^*$ в двухмерной системе координат $x_1 \ x_3$, а также характеристики структуры материала в относительных единицах $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3(X), \lambda_4(X), \lambda_5(X), \lambda_6(X)$ в соответствии с расчётами (71)-(76) показаны на рис. 2 в трехмерном пространстве $x_1 \ x_3$ и λ , где третья ось λ - относительная оценка.

Численные значения при геометрической интерпретации шести функций в относительных единицах $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3(X), \lambda_4(X), \lambda_5(X), \lambda_6(X)$ в соответствии с расчётами (71)-(76) в трехмерной системе координат $x_1 \ x_3$ и λ в точках оптимума $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^*, X_6^*$ показаны черным цветом.

Но в соответствии с нормализацией $\lambda_k(X) = \frac{f_k(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}$, рассмотренной на третьем шаге алгоритма (62), в точках оптимума: $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^*, X_6^*$ относительная оценка равна единице $\lambda_k(X_k^*) = 1, k = \overline{1,6}$, что и показано красным цветом. Таким образом, сделан первый шаг геометрической интерпретации четырехмерной системы параметров к двухмерной системе.

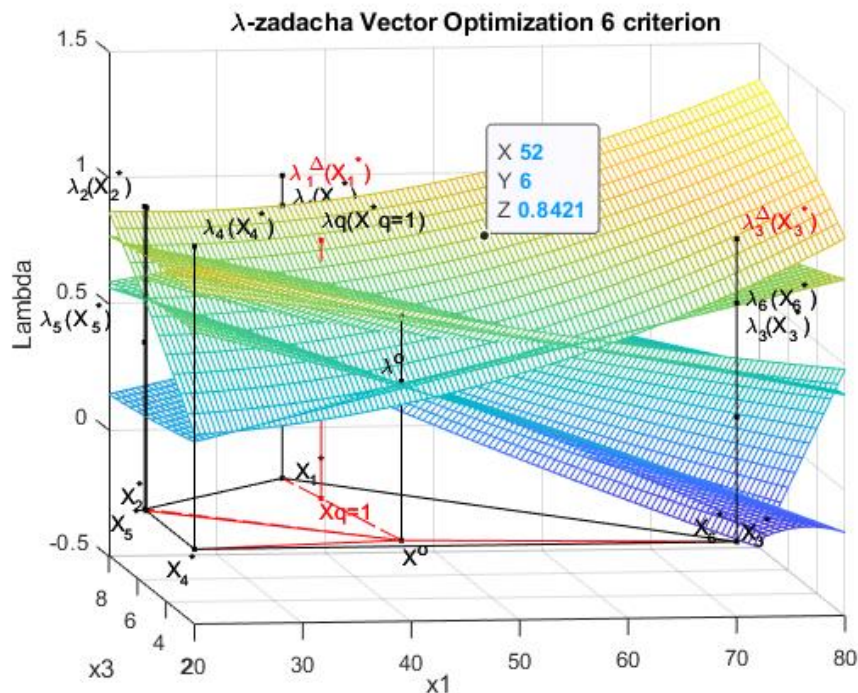


Рисунок 2. Геометрическая интерпретация шести функций в относительных единицах $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3(X), \lambda_4(X), \lambda_5(X), \lambda_6(X)$ в трехмерной системе координат $x_1 \ x_3$ и λ

2.2.3. 7 этап. Результаты решения Векторной Задачи Математического Программирования при равнозначных критериях - подготовка информации для принятия решений с приоритетом критерия.

Результаты решения Векторной Задачи Математического Программирования при равнозначных критериях (Результаты моделирования структуры материала).

1. Критерии (характеристики ТС), параметры в точке оптимума (См. Шаг 1):

$$\begin{aligned} \text{Criterion 1: } X_1^* &= \{x_1 = 36.0, x_2 = 33.58, x_3 = 8.0, x_4 = 2.4\}, f_1^* = f_1(X_1^*) = 293.6; \\ \text{Criterion 2: } X_2^* &= \{x_1 = 20.0, x_2 = 6.50, x_3 = 5.49, x_4 = 8.0\}, f_2^* = f_2(X_2^*) = 1339.1; \\ \text{Criterion 3: } X_3^* &= \{x_1 = 70.0, x_2 = 0.0, x_3 = 2.0, x_4 = 8.0\}, f_3^* = f_3(X_3^*) = 84.0; \\ \text{Criterion 4: } X_4^* &= \{x_1 = 20.0, x_2 = 56.0, x_3 = 2.0, x_4 = 2.0\}, f_4^* = f_4(X_4^*) = 10.8. \\ \text{Criterion 5: } X_5^* &= \{x_1 = 20.0, x_2 = 6.63, x_3 = 5.36, x_4 = 8.0\}, f_5^* = f_5(X_5^*) = 1489.4; \\ \text{Criterion 6: } X_6^* &= \{x_1 = 70.0, x_2 = 0.0, x_3 = 2.0, x_4 = 8.0\}, f_6^* = f_6(X_6^*) = 86.0. \end{aligned} \quad (78)$$

2. Критерии (характеристики ТС), параметры в точке антиоптимума (См. Шаг 2):

$$\begin{aligned} \text{Criterion 1: } X_1^0 &= \{x_1 = 20, x_2 = 50, x_3 = 2.0, x_4 = 8.0\}, f_1^0 = f_1(X_1^0) = 221.4; \\ \text{Criterion 2: } X_2^0 &= \{x_1 = 70, x_2 = 0, x_3 = 2.0, x_4 = 8.0\}, f_2^0 = f_2(X_2^0) = 2917.8, \\ \text{Criterion 3: } X_3^0 &= \{x_1 = 20.0, x_2 = 4.0, x_3 = 8.0, x_4 = 8.0\}, f_3^0 = f_3(X_3^0) = 46.4, \\ \text{Criterion 4: } X_4^0 &= \{x_1 = 55.88, x_2 = 22.88, x_3 = 8.0, x_4 = 8.0\}, f_4^0 = f_4(X_4^0) = 50.3, \\ \text{Criterion 5: } X_5^0 &= \{x_1 = 20.0, x_2 = 50.0, x_3 = 8.0, x_4 = 8.0\}, f_5^0 = f_5(X_5^0) = 2413.4, \\ \text{Criterion 6: } X_6^0 &= \{x_1 = 20.0, x_2 = 4.0, x_3 = 8, x_4 = 8.0\}, f_6^0 = f_6(X_6^0) = 48.4. \end{aligned} \quad (79)$$

3. Критерии (характеристики) в относительных единицах в точке X^0 (См. Шаг 5):

$\lambda^0 = 0.4206$ – максимальный нижний уровень в относительных единицах

$$\begin{aligned} \text{Параметры: } X^0 &= \{x_1 = 61.188, x_2 = 12.21, x_3 = 4.591, x_4 = 2\}, \\ \lambda_k(X^0), k = \overline{1, K} &- \text{величины относительных оценок: } \{\lambda_1(X^0) = 0.4206, \lambda_2(X^0) = 0.6901, \lambda_3(X^0) = 0.4206, \lambda_4(X^0) = 0.6892, \lambda_5(X^0) = 0.4206, \lambda_6(X^0) = 0.4213\}. \end{aligned} \quad (80)$$

4. Критерии (характеристики структуры материала) в физических единицах:

$$\begin{aligned} f_k(X^0), k = \overline{1, K} &- \text{величины критериев (характеристик структуры материала) в } X^0: \\ \{f_1(X^0) = 252.47, f_2(X^0) = 2308.6, f_3(X^0) = 71.709, f_4(X^0) = 35.09, f_5(X^0) = 2555.0, f_6(X^0) = 73.723\}; \end{aligned} \quad (81)$$

5. Информация об структуре материала в физических единицах принятия решений с приоритетом критерия (Шаг 1 – Шаг 5 – Шаг 2):

$$\begin{aligned} 1. f_1(X) \rightarrow \max: f_1^* &= f_1(X_1^*) = 293.6 \leq f_1(X^0) = 252.4 \leq f_1^0 = f_1(X_1^0) = 221.4; \\ 2. f_2(X) \rightarrow \min: f_2^* &= f_2(X_2^*) = 1339.1 \leq f_2(X^0) = 2308.6 \leq f_2^0 = f_2(X_2^0) = 2917.8; \\ 3. f_3(X) \rightarrow \max: f_3^* &= f_3(X_3^*) = 84.0 \leq f_3(X^0) = 71.709 \leq f_3^0 = f_3(X_3^0) = 46.4; \\ 4. f_4(X) \rightarrow \min: f_4^* &= f_4(X_4^*) = 10.8 \leq f_4(X^0) = 35.09 \leq f_4^0 = f_4(X_4^0) = -50.3; \\ 5. f_5(X) \rightarrow \min: f_5^* &= f_5(X_5^*) = 1489.4 \leq f_5(X^0) = 2555 \leq f_5^0 = f_5(X_5^0) = 2413.4; \\ 6. f_6(X) \rightarrow \max: f_6^* &= f_6(X_6^*) = 86.0 \leq f_6(X^0) = 73.7 \leq f_6^0 = f_6(X_6^0) = 48.4. \end{aligned} \quad (82)$$

2.2.4. Заключение по результатам решения векторной задачи математического программирования при равнозначных критериях.

Мы представили теоретические основы построения математической модели структуры материала в виде векторной задачи математического программирования при равнозначных критериях (характеристиках). Теория и методы решения такого класса задач представлены в многомерной математике, в ранних работах автора. В процессе решения задачи системе MATLAB представлена геометрическая интерпретация результатов решения в двухмерной системе координат.

Таким образом, впервые в отечественной и зарубежной практике показан переход и его геометрическая иллюстрация от N -мерного к двухмерному измерению функции в векторных задачах математического программирования с соответствующими ошибками линейной аппроксимации. Нами подготовлена информация для исследования и выбора оптимального

решения при приоритете того или иного критерия (характеристики) структуры материала. На решение этой проблемы направлена вторая часть работы.

3. Часть 2. Выбор оптимальных параметров структуры материала в условиях неопределенности - с приоритетом критерия на базе многомерной математики.

Часть 2 включает два блока: **Блок 3.** Анализ, сравнение результатов решения ВЗМП при равнозначных критериях сложной инженерной системы (модели структуры материала) и подготовка к выбору оптимальных параметров по приоритетному критерию решения векторной задачи (раздел 3.1). **Блок 4.** Исследование и выбор оптимальных параметров структуры материала по приоритетным критериям $k1, k2, \dots, kb$ и геометрическая интерпретация результатов решения в относительных и физических единицах на базе многомерной оптимизации (раздел 3.2).

3.1. Блок 3. Анализ, сравнение результатов решения ВЗМП при равнозначных критериях сложной инженерной системы (структуры материала) и подготовка к выбору оптимальных параметров по приоритетному критерию.

3.1.1. Этап 8. Анализ, сравнение результатов решения ВЗМП при равнозначных критериях сложной инженерной системы (структуры материала)

Сравним результаты решения векторной задачи математического программирования с равнозначными критериями (51)-(58) с четырьмя переменными x_1, x_2, x_3 и x_4 с результатами решения векторной задачи (51)-(58) с двумя переменными x_1 и x_3 .

Результаты решения четырехмерной ВЗМП (51)-(58) с переменными координатами $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ представлены в (78), ..., (82), в относительных единицах показаны на рис. 3 красным цветом. Результаты решения двухмерной ВЗМП (четыре критерия) с переменными координатами $\{x_1, x_3\}$ представлены в (77). Результаты решения и сравнения исследуемых задач представлены в трехмерной системе координат x_1, x_3 и λ на рис. 3.

λ задача-Результаты для Принятия решения Конструктором

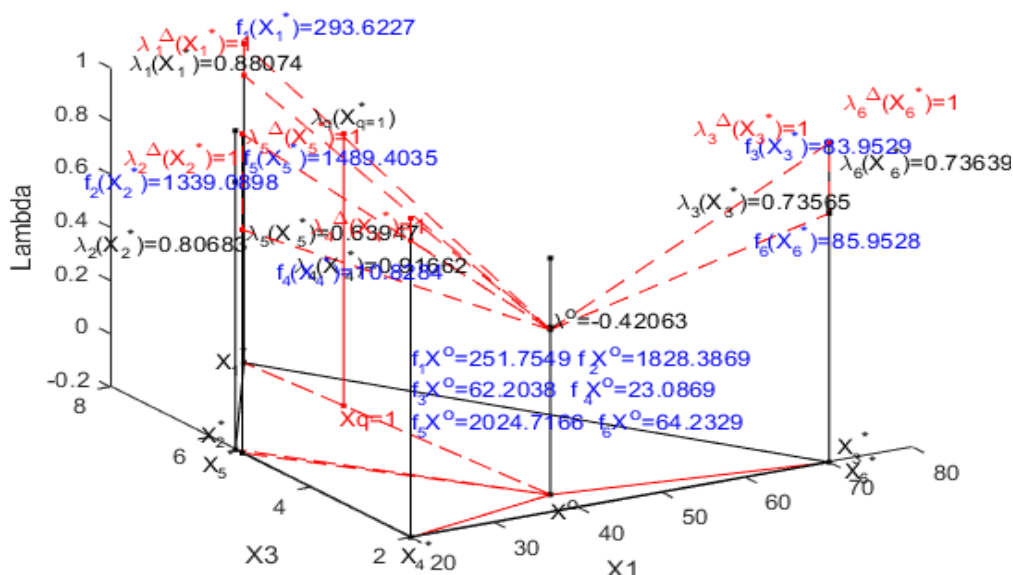


Рисунок. 3.k1. Результаты решения λ -задачи в трехмерной системе координат x_1, x_3 и λ .

Результаты решения в относительных единицах в двухмерной $\lambda_1(X), \dots, \lambda_6(X)$ и четырехмерной $\lambda_1^A(X_1^*) = 1, \dots, \lambda_6^A(X_6^*) = 1$ выделены красным цветом.

Результаты решения в физических единицах в двухмерной $f_1(X), \dots, f_6(X)$ и четырехмерной $f_1(X^0), \dots, f_6(X^0)$ выделены фиолетовым цветом.

Рассмотрим, например, оптимальную точку X_3^* . Функция $\lambda_3(X)$ сформирована из функции $f_3(X)$ с переменными координатами $\{x_1, x_3\}$, с постоянными координатами $\{x_2=12.219, x_4=2.0\}$, взятые из оптимальной точки X^0 . В точке X_3^* относительная оценка $LX3_{\max}(3) = 0.7356$ – показана на рис. 3 черной точкой. Но мы знаем, что относительная оценка $\lambda_3(X_3^*)$ полученная из функции $f_3(X_3^*)$ на третьем шаге равна единице, обозначим ее как $\lambda_3^A(X_3^*) = 1$ – показана на рис. 3 красной точкой.

Разность между относительными оценками $\lambda_3^A(X_3^*)=1$ и $\lambda_3(X_3^*) = 0.7976$ является ошибкой $\Delta=0.2644$ перехода от четырехмерной (а в общем случае N -мерной) к двухмерной системе измерений. Аналогично на рис. 3 показаны:

точка X_1^* , соответствующие относительные оценки $\lambda_1(X_1^*) = 0.63992$, $\lambda_1^A(X_1^*) = 1$;

точка X_2^* , соответствующие относительные оценки $\lambda_2(X_2^*) = 1.0878$, $\lambda_2^A(X_2^*) = 1$;

точка X_3^* , соответствующие относительные оценки $\lambda_3(X_3^*) = 0.7975$, $\lambda_3^A(X_3^*) = 1$;

точка X_4^* , соответствующие относительные оценки $\lambda_4(X_4^*) = 0.8792$, $\lambda_4^A(X_4^*) = 1$.

точка X_5^* , соответствующие относительные оценки $\lambda_5(X_5^*) = 1.0871$, $\lambda_5^A(X_5^*) = 1$;

точка X_6^* , соответствующие относительные оценки $\lambda_6(X_6^*) = 0.7977$, $\lambda_6^A(X_6^*) = 1$.

Вывод из анализа: Информация об структуре материала в физических единицах для принятия решений с приоритетом критерия. Подготовка к геометрической интерпретации решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по приоритетному критерию.

3.1.2. 9 этап. Подготовка информации к выбору оптимальных параметров по любому приоритетному критерию и геометрической интерпретации результатов решения.

При подготовке информации к выбору оптимальных параметров по приоритетному критерию и геометрической интерпретации результатов решения векторной задачи используем рис. 3.

По результатам решения векторной задачи математического программирования при равнозначных критериях мы сформулировали информацию для улучшения и принятия управленческого решения для любого критерия (характеристики структуры материала):

$$f_k(X_k^*) \leq f_k(X^0) \leq f_k(X_k^0), k = \overline{1, K}.$$

Информация об Инженерной Системе в физических единицах для принятия решений.

Величины критериев (характеристик технической системы):

1. $f_1(X) \rightarrow \max: f_1^* = f_1(X_1^*) = 293.6 \leq f_1(X^0) = 252.4 \leq f_1^0 = f_1(X_1^0) = 221.4$;
2. $f_2(X) \rightarrow \min: f_2^* = f_2(X_2^*) = 1339.1 \leq f_2(X^0) = 2308.6 \leq f_2^0 = f_2(X_2^0) = 2917.8$;
3. $f_3(X) \rightarrow \max: f_3^* = f_3(X_3^*) = 84.0 \leq f_3(X^0) = 71.709 \leq f_3^0 = f_3(X_3^0) = 46.4$;
4. $f_4(X) \rightarrow \min: f_4^* = f_4(X_4^*) = 10.8 \leq f_4(X^0) = 35.09 \leq f_4^0 = f_4(X_4^0) = -50.3$;
5. $f_5(X) \rightarrow \min: f_5^* = f_5(X_5^*) = 1489.4 \leq f_5(X^0) = 2555 \leq f_5^0 = f_5(X_5^0) = 2413.4$;
6. $f_6(X) \rightarrow \max: f_6^* = f_6(X_6^*) = 86.0 \leq f_6(X^0) = 73.7 \leq f_6^0 = f_6(X_6^0) = 48.4$.

Соотношения (83) являются основой для исследования выбранного критерия:

во-первых, для выбора величины критерия в физических единицах;

во-вторых, расчета соответствующей относительной оценки;

в-третьих, расчета соответствующих параметров структуры материала;

в-четвертых, принятия окончательного решения.

Реализация выбора оптимальных параметров структуры материала для заданной величины каждого критерия $f_k(X)$, $k = \overline{1, K}$, $K = 6$ представлена в блоке 4.

3.2. Блок 4. Исследование и выбор оптимальных параметров структуры материала по приоритетным критериям $k1, k2, \dots, k6$ и геометрическая интерпретация результатов решения в относительных и физических единицах на базе многомерной оптимизации и интеллекта конструктора.

Первый этап – техническое задание, анализ результатов решения при равнозначных критериях, выбора приоритетного критерия и его величины выполняется конструктором структуры материала на базе своего интеллекта. Этапы расчета, формирование геометрической интерпретации результатов решения выполняются математиком – программистом (программным обеспечением).

3.2.1. Техническое задание для выбора приоритетного критерия и его величины, геометрической интерпретации

Дано. Представлены результаты решения векторной задачи при равнозначных критериях (83). На базе решения векторной задачи (83) конструктор, используя свои знания (интеллект) решает:

1. Выбор номера исследуемого приоритетного критерия.
2. Выбор численной величины приоритетного критерия.

Результат, который хотел бы получить конструктор:

1. Параметры (численные значения), при которых остальные критерии достигают оптимальной величины (численные значение).
2. Геометрическую интерпретацию результатов решения векторной задачи выбранного критерия в трехмерной системе координат в физических единицах.

Исходная информация структуры материала при равнозначных критериях в физических единицах для принятия решений представлена в (83).

В работе: для каждого приоритетного критерия $k1, k2, \dots, k6$ проведен расчет.

Числовые данные каждого исследуемого приоритетного критерия представлены ниже, в (84).

Величины исследуемых критериев (**характеристик**) структуры материала, лежащих пределах (82) $f_k^* = f_k(X_k^*) \leq f_k(X_{k,q=k}) \leq f_k(X^o)$:

1. $f_1(X) \rightarrow \max: f_1^* = f_1(X_1^*) = 293.6 \leq f_1(X_{1,q=1}) = \mathbf{280} \leq f_1(X^o) = 252.4;$
2. $f_2(X) \rightarrow \min: f_2^* = f_2(X_2^*) = 1339.1 \leq f_2(X_{2,q=2}) = \mathbf{1400} \leq f_2(X^o) = 2308.6$
3. $f_3(X) \rightarrow \max: f_3^* = f_3(X_3^*) = 84.0 \leq f_3(X_{3,q=3}) = \mathbf{70} \leq f_3(X^o) = 71.709;$
4. $f_4(X) \rightarrow \min: f_4^* = f_4(X_4^*) = 10.8 \leq f_4(X_{4,q=4}) = \mathbf{15} \leq f_4(X^o) = 35.09;$
5. $f_5(X) \rightarrow \min: f_5^* = f_5(X_5^*) = 1489.4 \leq f_5(X_{5,q=5}) = \mathbf{1800} \leq f_5(X^o) = 2555;$
6. $f_6(X) \rightarrow \max: f_6^* = f_6(X_6^*) = 86.0 \leq f_6(X_{6,q=6}) = \mathbf{80} \leq f_6(X^o) = 73.7.$

Представлена геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП последовательно с приоритетом $k1, k2, \dots, k6$ критериев в трехмерной системе координат в относительных и физических единицах.

3.2.2. Блок $k1$. Выбор оптимальных параметров структуры материала по первому приоритетному критерию, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП в относительных и физических единицах.

Как правило, лицом, принимающим решения, является конструктор системы.

В разделе в соответствии с техническим заданием выполнен расчет для приоритета по первому критерию: $f_1(X_{1,q=1}) = \mathbf{280}$.



1.1.1. Решение ВЗМП - модели структуры материала при заданном приоритете первого критерия в многомерной математике.

Шаг 1. Решается векторная задачи при равнозначных критериях.

Результаты решения векторной задачи представлены в разделе 2.2.1. 5 этап. Решение векторной задачи - выбор оптимальных параметров структуры материала при равнозначных критериях:

$$\{\lambda_1(X^o) = 0.4206, \lambda_2(X^o) = 0.6901, \lambda_3(X^o) = 0.4206, \lambda_4(X^o) = 0.6892, \lambda_5(X^o) = 0.4206, \lambda_6(X^o) = 0.4213\};$$

Параметры: $X^o = \{x_1 = 39.77, x_2 = 24.34, x_3 = 2.513, x_4 = 2.0, \}$.

Шаг 2. Выбор приоритетного критерия $q \in K$.

Из множества критериев $\lambda_k(X^o), k = \overline{1, K}$, полученных в результате решения при равнозначных критериях, выбирается критерий, который конструктор хотел бы улучшить. Пределы изменения всех критериев в физических величинах представлены в (84):

$$f_k(X_k^*) \leq f_k(X) \leq f_k(X^o), k = \overline{1, K}.$$

Выбранный критерий называется «приоритетным критерием», обозначим его $q = 1 \in K$.

Выбор приоритетного критерия: выдается сообщение на дисплей:

$q = \text{input}(\text{'Введите приоритетный критерий (номер) } q = \text{'})$ – Ввели критерий $q=1$.

Шаг 3. Формируются числовые пределы изменения величины приоритета критерия

$q = 1 \in K$. Для приоритетного критерия $q = 1 \in K$ определяются изменения числовых пределов в натуральных единицах при переходе из точки оптимума X^o (83) в точку X_q^* , полученную на первом шаге. Данные о пределах изменения критерии $q=1$ $f_{q=1}(X)$ выдаются на дисплей:

$$f_1(X^o) = 251.7 \leq f_{q=1}(X) \leq f_1(X_1^*) = 293.6, q = 1 \in K$$

Эти данные анализируются.

Шаг 4. Определяется величина приоритетного критерия $q \in K$. (Decision-making).

На сообщение: «Введите величину приоритетного критерия $f_q =$ » - вводим: $f_{q=1} = 280$.

Шаг 5. Вычисляется относительная оценка для приоритетного критерия.

Для приоритетного критерия $f_{q=1} = 280$ вычисляется относительная оценка:

$$\lambda_q = \frac{f_q - f_q^o}{f_q^* - f_q^o} = \frac{280 - 221.4}{293.6 - 221.4} = 0.8115,$$

которая при переходе от точки X^o к точке X_q^* лежит в пределах:

$$\lambda_q(X^o) = 0.4206 \leq \lambda_q(X) = 0.8115 \leq 1.0 = \lambda_q(X_q^*), q = 1 \in K.$$

Шаг 6. Вычислим коэффициент линейной аппроксимации Кр.

Предполагая линейный характер изменения критерия $f_{q=1}(X)$ в (84) и соответственно относительной оценки $\lambda_{q=1}$, используя стандартные приемы линейной аппроксимации, вычислим коэффициент пропорциональности между $\lambda_q(X^o)$, λ_q , который назовем ρ :

$$\rho = \frac{\lambda_q - \lambda_q(X^o)}{\lambda_q(X_q^*) - \lambda_q(X^o)} = \frac{0.8115 - 0.4206}{1 - 0.4206} = 0.6746, q = 1 \in K.$$

Шаг 7. Координаты приоритета критериев с размерностью $f_{q=1} = 300$ определяются.

Предполагаем линейный характер изменения вектора $X^q = \{x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4\}$, $q = 1$ определим координаты для точки с размерностью $f_{q=1} = 280$, $\lambda_q(X) = 0.8390$:

$$x_{\lambda=0.74}^{q=1} = \{x_1 = X^o(1) + \rho(X_q^*(1) - X^o(1)), x_2 = X^o(2) + \rho(X_q^*(2) - X^o(2)),$$

$$x_3 = X^o(3) + \rho(X_q^*(3) - X^o(3)), x_4 = X^o(4) + \rho(X_q^*(4) - X^o(4))\},$$



где $X^0 = \{x_1 = 61.188, x_2 = 12.21, x_3 = 4.591, x_4 = 2, \}$.

$$X_1^* = \{x_1 = 36.0, x_2 = 33.58, x_3 = 8.0, x_4 = 2.4\}, f_1^* = f_1(X_1^*) = 293.6.$$

Как результат решения мы получим координаты точки:

$$X^q = \{x_1 = 37.22, x_2 = 30.57, x_3 = 6.215, x_4 = 2.2776\}.$$

Шаг 8. Формирование главных показателей точки $X^{q=1}$.

В полученной точке X^q , вычислим и представим главные показатели:

Координаты точки оптимума: $X^{q=1} = \{x_1 = 37.22, x_2 = 30.57, x_3 = 6.215, x_4 = 2.27\}$;

Критерии в натуральных единицах $f_k(X^q) = \{f_k(X^q), k = \overline{1, K}\}$:

$$f_k(X^{q=1}) = \{f_1(X^q) = 280.9, f_2(X^q) = 1888.5, f_3(X^q) = 58.4, f_4(X^q) = 36.4, f_5(X^q) = 2094.6, f_6(X^q) = 60.5\}; \quad (85)$$

Относительные оценки: $\lambda^q = \{\lambda_k^q, k = \overline{1, K}, \lambda_k(X^q) = \frac{f_k(X^q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}$:

$$\lambda_k(X^{q=1}) = \{\lambda_1(X^q) = 0.8233, \lambda_2(X^q) = 0.6520, \lambda_3(X^q) = 0.320, \lambda_4(X^q) = 0.3509, \lambda_5(X^q) = 0.3450, \lambda_6(X^q) = 0.3209\};$$

Вектор приоритетов $P^q(X) = \{p_k^q = \frac{\lambda_k(X^q)}{\lambda_k(X^q)}, k = \overline{1, K}\}$:

$$P^q = [p_1^1 = 1.0, p_2^1 = 1.2627, p_3^1 = 3.1595, p_4^1 = 2.3463, p_5^1 = 2.3860, p_6^1 = 2.5652];$$

минимальная относительная оценка: $\min \lambda(X^q) = \min_{k \in K} (\lambda_k(X^q)) = 0.320$.

Аналогично получены другие точки из области Парето $X_t^0 = \{\lambda_t^0, X_t^0\} \in S^0$.

2.k1. Анализ результатов решения векторной задачи - модели структуры материала при заданном приоритете первого критерия.

Рассчитанная в (85) величина первого критерия при заданном приоритете

$f_1(X^q) = 280.9, q = 1 \in K, q \in K$ обычно не равна заданной $f_q = 280$. Ошибка выбора $\Delta f_q = |f_q(X_t^0) - f_q| = |280.9 - 280| = 0.9$ определяется ошибкой линейной аппроксимации:

$\Delta f_{q\%} = 0.9\%$. Если ошибка $\Delta f_q = |f_q(X_t^0) - f_q| = |280.9 - 280| = 0.9$, которая измерена в натуральных единицах или в процентах $\Delta f_{q\%} = \frac{\Delta f_q}{f_q} * 100 = 0.9\%$, больше заданной $\Delta f, \Delta f_q > \Delta f$, то переходим к шагу 2, если $\Delta f_q \leq \Delta f$, то вычисления завершаются.

Конец.

При моделировании могут быть изменены параметрические ограничения и функции, т. е. получено некоторое множество оптимальных решений. Из этого множества оптимальных решений выбираем окончательный вариант (процесс принятия решений). В примере окончательный вариант (85) включает параметры:

$$X^0 = \{X^0, \lambda^0\} = \{X^0 = \{x_1 = 39.77, x_2 = 24.34, x_3 = 2.5139, x_4 = 2.0, \lambda^0 = 0.4206\}$$

параметры структуры материала при заданном приоритете критерия $q=1$:

$$X^{q=1} = \{x_1 = 37.22, x_2 = 30.57, x_3 = 6.215, x_4 = 2.27\}$$

3.k1. Геометрическая интерпретация результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по первому приоритетному критерию в относительных единицах.

Для геометрической интерпретации результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по первому приоритетному критерию (85) в относительных единицах сформируем, аналогично рис. 3, рис. 4.k1. На рис. 4.k1 представим:

относительные оценки шести критериев в точке оптимума $\lambda_k(X_k^*), k = \overline{1, K}, K = 6$ (черный цвет) – полученные в двухмерной системе координат $x_1 x_3$;

относительные оценки шести критериев в точке оптимума $\lambda_k^A(X_k^*) = 1, k = \overline{1, K}, K = 6$ (красный цвет) – реальные данные для системы координат $x_1 x_2 x_3 x_4$.



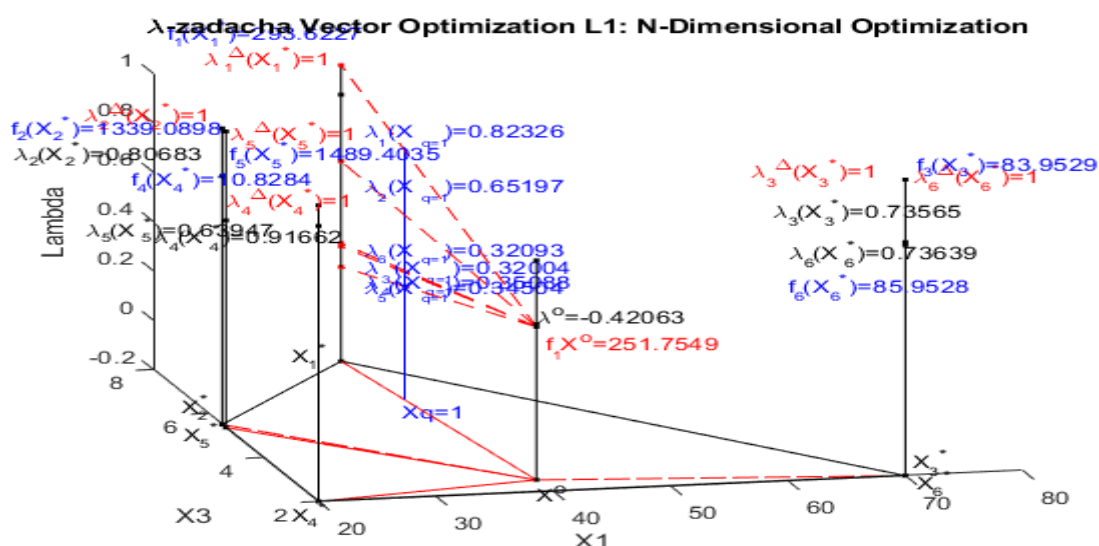


Рис. 4.к1. λ -задача в системе координат x_1 x_3 и λ . Результаты: $\lambda_k^A(X_k^*) = 1, k = \overline{1, K}$; относительные оценки с приоритетом $q = 1$ критерия в точке $X_{q=1}$: $\lambda_k(X_{q=1}), k = \overline{1, K}$.

На третьем шаге решения ВЗМП с равнозначными критериями (62) в точках оптимума $X_1^*, X_2^*, \dots, X_6^*$ получены величины всех относительных оценок:

$$\lambda(X^*) = \begin{pmatrix} L(X_1^*) \\ L(X_2^*) \\ L(X_3^*) \\ L(X_4^*) \\ L(X_5^*) \\ L(X_6^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.6107 & 0.2773 & 0.1824 & 0.2655 & 0.2782 \\ 1.1207 & 1.0000 & 0.0787 & 0.6825 & 1.0000 & 0.0787 \\ -0.4562 & 0.1418 & 1.0000 & 0.7774 & 0.1445 & 1.0000 \\ 0.0085 & 0.6923 & 0.2804 & 1.0000 & 0.6942 & 0.2816 \\ 1.1064 & 1.0000 & 0.0832 & 0.6898 & 1.0000 & 0.0832 \\ -0.4562 & 0.1418 & 1.0000 & 0.7774 & 0.1445 & 1.0000 \end{pmatrix}.$$

На рис. 4.к1 $\lambda_1(X_1^*) = 1.0000$ обозначена как $\lambda_2^A(X_2^*)=1$.

Линейная функция, соединяющая точки X^0 и X_1^* : в относительных единицах $\lambda_1(X^0) = 0.4206$ и $\lambda_1^A(X_1^*)=1$ характеризует функцию $f_1(X)$:

во-первых, изменение функции $\lambda_1(X)$ в относительных единицах;

во-вторых, изменение функции в физических единицах $f_1(X_1^*) = 293.6$, в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Эта линейная функция представляет геометрическую интерполяцию функций $f_1(X)$ в относительных единицах из N -мерного (4-мерного) в двухмерную систему координат. Аналогично исследуются все функции (критерии). В целом на рис. 4.к1 в точке X_1^* показана геометрическая (линейная) интерполяция всех функций:

$f_1(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_1^A(X_1^*) = 1.0$;

$f_2(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_2^A(X_1^*) = 0.6107$;

$f_3(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_3^A(X_1^*) = 0.2773$;

$f_4(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_4^A(X_1^*) = 0.1824$.

$f_5(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_5^A(X_1^*) = 0.2655$.

$f_6(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_6^A(X_1^*) = 0.2782$.

Относительные оценки с приоритетом первого критерия в точке оптимума $X_{q=1}$

рассчитываются: $\lambda_k(X_{q=1}) = \frac{f_k(X_{q=1}) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}$:

$\lambda_k(X^{q=1}) = \{\lambda_1(X^q) = 0.8233, \lambda_2(X^q) = 0.6520, \lambda_3(X^q) = 0.320, \lambda_4(X^q) = 0.3509, \lambda_5(X^q) = 0.3450, \lambda_6(X^q) = 0.3209\}$.

Полученные математические результаты исследования являются основным источником для построения четырех параметрических шести характеристик (критериев) в двухмерной области в физических единицах.

Исходной информацией для геометрической интерпретации результатов решения ВЗМП с приоритетом первого критерия являются параметры точки оптимума при равнозначных критериях: $X^o = \{X^o, \lambda^o\} = \{X^o = \{x_1 = 39.77, x_2 = 24.34, x_3 = 2.5139, x_4 = 2.0, \lambda^o = 0.4206\}$, рассчитанной в двухмерной системе координат x_1, x_3 (см. Рис. 1) и представленной в трехмерной системе координат x_1, x_3 и λ в относительных единицах на рис. 2, 3, 4.

4.k1. Геометрическая интерпретация результатов решения векторной задачи (ВЗМП) - функций: $f_1(X), \dots, f_6(X)$ с приоритетом первого критерия – модели структуры материала при проектировании в трехмерной системе координат в физических единицах.

Исследуем и представим параметры последовательно для каждой характеристики структуры материала (критерии): $f_1(X), f_2(X), \dots, f_6(X)$ в **физических единицах**.

1. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП - первой характеристики $f_1(X_{1,q=1})$ с приоритетом первого критерия при проектировании в физических единицах.

Представим геометрическую интерпретацию результатов решения по первой характеристики (51) структуры материала:

$\max f_1(X) = 269.86 - 1.8746x_1 - 2.9115x_2 + 8.9389x_3 + 10.936x_4 + 0.0807x_1x_2 - 0.0517x_1x_3 - 0.1413x_1x_4 + 0.0619x_2x_3 - 0.0868x_2x_4 + 0.003x_3x_4 + 0.0119x_1^2 + 0.0098x_2^2 - 0.2028x_3^2 - 0.4188x_4^2$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1, x_3\}$ и с постоянными координатами $\{x_2 = 24.34, x_4 = 2.0\}$ представим на рис. 5.k1.

На Рис. 5.k1 исследованы и представлены: во-первых, точка оптимума X_1^* ; во-вторых, точка минимума X_1^0 ; в-третьих, точка с равнозначными критериями X^o , и, в-четвертых, точка оптимума с приоритетом первого критерия $X_{1,q=1}$, с соответствующими оценками в физических единицах, которые характеризует функцию $f_1(X)$ в двухмерном $\{x_1, x_3\}$ и четырехмерном измерении параметров $\{x_1, \dots, x_4\}$.

1. В точке оптимума X_1^* : при расчете **по четырем переменным** $x_1, \dots, x_4$ координаты точки и функция первого критерия равны:

$$X_1^* = \{x_1 = 36.004, x_3 = 8.0\}, f_1^* = f_1(X_1^*) = 293.6.$$

на рисунке 5.k1 функция обозначена как $f_1^\Delta(X_1^*) = 293.6$; в двухмерной системе координат x_1, x_3 и двумя постоянными x_2, x_4 величина целевой функции равна $f_1^* = f_1(X_1^*) = 285.0$. (Черный цвет), обозначено как $f_1(X_1^*) = 285.0$.

2. Координаты точки и функция первого критерия на **минимум**. В точке оптимума в **четырёхмерной** системе координат $X_1^0 = \{x_1 = 20.0, x_3 = 2.0\}$ величина целевой функции равна $f_1^0 = f_1(X_1^0) = 239.7$. В двухмерной системе координат x_1, x_3 величина целевой функции равна $F_{X10min} = 239.7$. (Черный цвет).

3. Координаты точки и функция первого критерия при равнозначных критериях:

Координаты точки $X^o = \{x_1 = 39.77, x_3 = 2.513\}$. Величина целевой функции:

$f_1(X^o) = 251.8$. Относительная оценка в точке оптимума X^o :



$$\lambda_1(X^0) = \frac{f_1(X^0) - f_1^0}{f_1^* - f_1^0} = 0.4206.$$

4. В точке оптимума $X_{1,q=1}$ величина первого критерия с приоритетом первого критерия равна $f_1(X_{1,q=1}) = 280.85$ - она близка к заданной величине в техническом задании $f_1(X_{q=1}) = 280$. Ошибка расчета равна: $f_1(X_{1,q=1}) - f_1(X_{q=1}) = 280.85 - 280 = 0.85$.

Линейная функция, соединяющая точки $f_1(X^0)$ и $f_1^\Delta(X_1^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_1(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

А в целом отрезки $f_1^\Delta(X_1^*) - f_1(X^0) - f_1^\Delta(X_1^0)$ представляют геометрическую интерпретацию функции $f_1(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

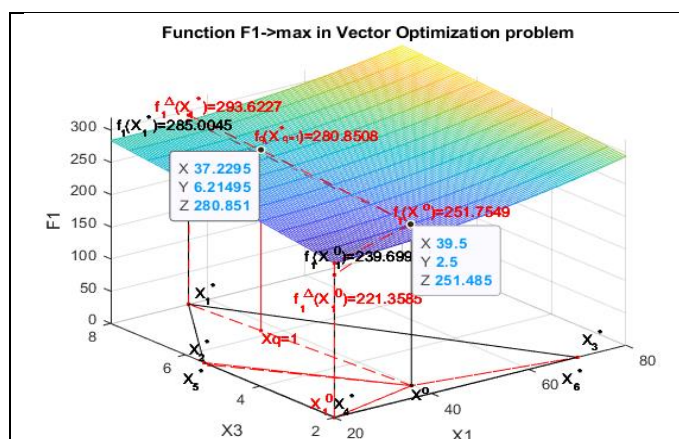


Рисунок. 5.k1. Функция $f_1(X)$ с приоритетом 1-го критерия в двухмерной системе x_1, x_3 , геометрическая интерпретация функции $f_1(X_{1,q=1})$ в системе координат x_1, x_2, x_3, x_4 в физических единицах

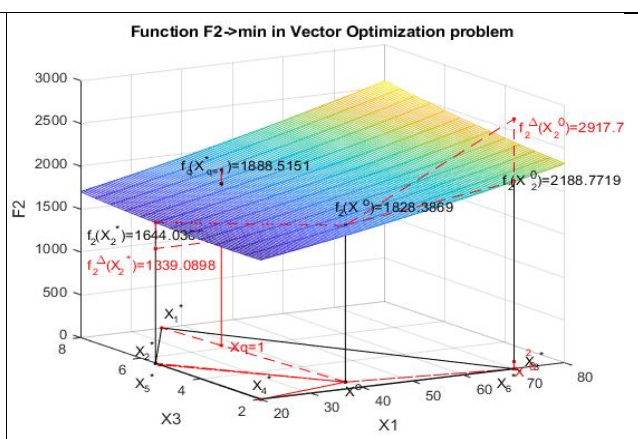


Рисунок. 6.k1. Функция $f_2(X)$ с приоритетом 1-го критерия в двухмерной системе x_1, x_3 , геометрическая интерпретация функции $f_2(X_{1,q=1})$ в координатах $x_1, \dots, x_4$ в физических единицах

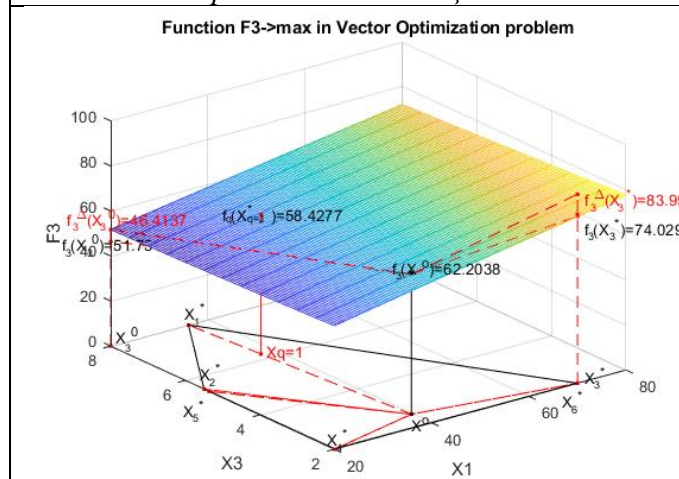


Рисунок. 7.k1. Функция $f_3(X)$ с приоритетом первого критерия в двухмерной системе координат x_1, x_3 , геометрическая интерпретация функции $f_3(X_{1,q=1})$ в координатах $x_1, \dots, x_4$ в физических единицах.

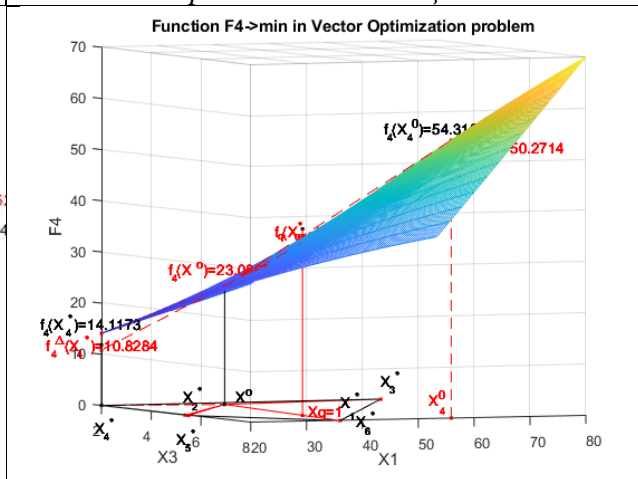


Рисунок. 8.k1. Функция $f_4(X)$ в двухмерной системе координат x_1, x_3 и геометрическая интерпретация функции $f_4(X_{1,q=1})$ с приоритетом первого критерия в системе координат $x_1, \dots, x_4$ в физических единицах.

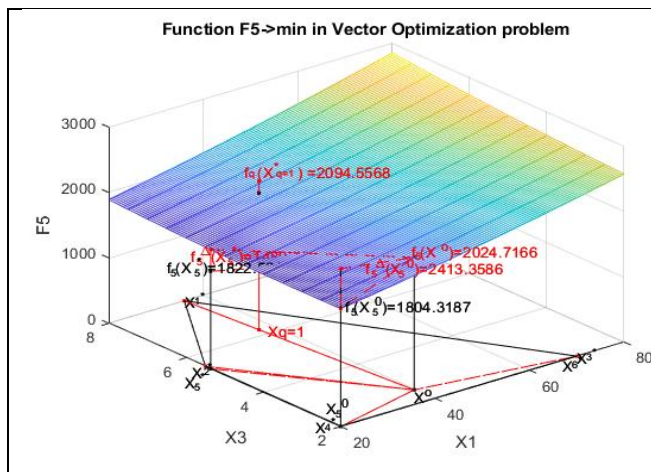


Рисунок. 9.k1. Функция $f_5(X)$ с приоритетом первого критерия в двухмерной системе координат x_1, x_3 , геометрическая интерпретация функции $f_5(X_{1,q=1})$ в координатах $x_1, \dots, x_4$ в физических единицах.

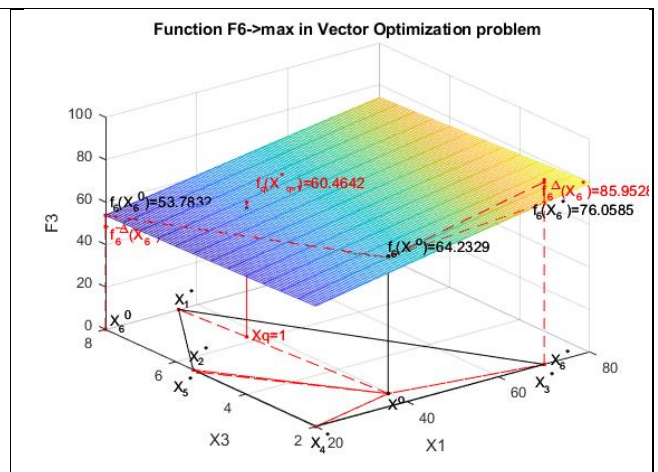


Рисунок. 10.k1. Функция $f_6(X)$ в двухмерной системе координат x_1, x_3 и геометрическая интерпретация функции $f_6(X_{1,q=1})$ с приоритетом первого критерия в системе координат $x_1, \dots, x_4$ в физических единицах.

2. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – второй характеристики $f_2(X_{1,q=1})$ с приоритетом первого критерия – структуры материала при проектировании в физических единицах.

Представим геометрическую интерпретацию результатов решения второй характеристики (54) структуры материала:

$\min f_2(X) \approx 795.72 + 23.89x_1 + 30.866x_2 - 25.8586x_3 - 45.0026x_4 - 0.7683x_1x_2 + 0.4703x_1x_3 + 0.7472x_1x_4 - 0.1283x_2x_3 + 0.3266x_2x_4 - 0.0112x_3x_4 + 0.0398x_1^2 + 0.0365x_2^2 + 3.2x_3^2 + 2.6457x_4^2$ в физических единицах. Переменные координаты $\{x_1, x_3\}$, постоянные координаты $\{x_2 = 49.54, x_4 = 2.2\}$ взяты из точки X^0 (40) и представим $f_2(X)$ на рис. 6.k1.

1. Координаты точки и функция второго критерия на оптимум ($\min f_2(X)$): $f_2^* = f_2(X_2^*) = 1644$.; Параметры: $X_2^* = \{x_1 = 25, x_2 = 23.65, x_3 = 4.98, x_4 = 6.307\}$ при расчете по четырем переменным. На рисунке обозначена как $f_2^\Delta(X_2^*) = 1696.7$. В двухмерной системе координат x_1, x_3 $X_2^* = \{x_1 = 25.0, x_3 = 4.98\}$ (на рис. 6.k1 обозначена как X_2^*) величина целевой функции равна: $f_2^* = f_2(X_2^*) = 1534.2$. (Черный цвет).

2. Координаты точки **минимума** (Наихудшее решение для критерия на $\min$ является максимальным числовым значением) в точке $X_2^0 = \{x_1 = 61.18, x_3 = 4.591\}$ величина целевой функции $F_2^0 = f_2(X_2^0) = 2928.2$. Величина целевой функции в четырехмерной системе координат $f_2^\Delta(X_2^0) = 3548.1$.

3. Координаты точки и функция второго критерия **при равнозначных критериях**: Координаты точки $X^0 = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$. Величина целевой функции $f_2(X^0) = 2308.6$. Относительная оценка в точке оптимума X^0 второго критерия:

$$\lambda_2(X^0) = \frac{f_2(X^0) - f_2^0}{f_2^* - f_2^0} = 0.5595.$$

4. В физических единицах величина второго критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{1,q=1}$ равна $f_2(X_{1,q=1}) = 2015.7$.

Линейная функция, соединяющая точки $f_2(X^0)$ и $f_2^\Delta(X_2^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_2(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$. А в целом отрезки $f_2^\Delta(X_2^*) - f_2(X^0) - f_2^\Delta(X_2^0)$ представляют геометрическую интерполяцию функции $f_2(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

3. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – третьей характеристики $f_3(X_{1,q=1})$ с приоритетом первого критерия – структуры материала при проектировании в физических единицах.

Представим геометрическую интерпретацию результатов решения по третьей характеристики (52) структуры материала:

$$\max f_3(X) \approx 39.7581 + 0.6598x_1 + 0.4493x_3 - 0.3094x_3 - 1.8334x_4 - 0.0110x_1x_2 - 0.0069x_1x_3 + 0.0161x_1x_4 - 0.0143x_2x_3 + 0.0134x_2x_4 - 0.0005x_3x_4 - 0.0003x_1^2 - 0.0002x_2^2 + 0.0279x_3^2 + 0.1033x_4^2\}.$$

Геометрическую интерпретацию функции $f_3(X)$ в физических единицах представим с переменными координатами $\{x_1, x_3\}$ и с постоянными координатами $\{x_2 = 49.54, x_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки X^0 на рис. 7.kl.

1. В точке оптимума X_3^* : при расчете **по четырем переменным** $x_1, \dots, x_4$ координаты точки и функция третьего критерия равны $X_3^* = \{x_1 = 70.0, x_3 = 2.0\}$, $f_3^* = f_3(X_3^*) = 83.95$. на рисунке 7.kl функция обозначена как $f_3^\Delta(X_3^*) = 83.95$; в двухмерной системе координат x_1, x_3 и двумя постоянными x_2, x_4 величина целевой функции равна $f_3^* = f_3(X_3^*) = 74.02$. (Черный цвет), обозначено как $f_3(X_3^*) = 74.02$.

2. Координаты точки и функция третьего критерия на **минимум**. В точке оптимума в **четырёхмерной** системе координат $X_3^0 = \{x_1 = 20.0, x_3 = 8.0\}$ величина целевой функции равна $f_3^0 = f_3(X_3^0) = 46.41$. В двухмерной системе координат x_1, x_3 величина целевой функции равна $F_{X3\min} = f_3(X_3^0) = 51.73$. (Черный цвет).

3. Координаты точки и функция третьего критерия при равнозначных критериях:

Координаты точки $X^0 = \{x_1 = 39.77, x_3 = 2.5139\}$. Величина целевой функции:

$$f_3(X^0) = 62.7. \text{ Относительная оценка в точке оптимума } X^0:$$

$$\lambda_3(X^0) = \frac{f_3(X^0) - f_3^0}{f_3^* - f_3^0} = 0.4206.$$

4. В точке оптимума $X_{1,q=1}$ величина третьего критерия с приоритетом первого критерия равна $f_3(X_{1,q=1}) = 58.42$.

Линейная функция, соединяющая точки $f_3(X^0)$ и $f_3^\Delta(X_3^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_3(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

А в целом отрезки $f_3^\Delta(X_3^*) - f_3(X^0) - f_3^\Delta(X_3^0)$ представляют геометрическую интерпретацию функции $f_3(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

4. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – четвертой характеристики $f_4(X_{1,q=1})$ с приоритетом первого критерия структуры материала при проектировании в физических единицах.

Представим геометрическую интерпретацию результатов решения четвертой характеристики (55) структуры материала:



$\min f_4(X) \equiv 21.004 - 0.0097x_1 - 0.841x_2 - 0.4326x_3 + 1.1723x_4 + 0.166x_1x_2 + 0.085x_1x_3 - 0.0001x_1x_4 + 0.0523x_2x_3 + 0.0002x_2x_4 + 0.0006x_3x_4 - 0.0022x_1^2 + 0.0035x_2^2 + 0.006x_3^2 - 0.0311x_4^2\}$ в физических единицах. Переменные координаты $\{x_1, x_3\}$, постоянные координаты $\{x_2 = 49.54, x_4 = 2.2\}$ взяты из точки X^0 (40) и представим $f_4(X)$ на рис. 8.kl.

1. Координаты точки и функция четвертого критерия на оптимум ($\min f_4(X)$): при расчете по четырем переменным (параметрам: $X_4^* = \{x_1 = 20, x_3 = 2.0\}$, функция $f_4^* = f_4(X_4^*) = 10.81$. На рисунке обозначена как $f_4^\Delta(X_4^*) = 10.81$. В двухмерной системе координат $\{x_1, x_3\}$ $X_4^* = \{x_1 = 20.0, x_3 = 2.0\}$ (на рис. 8.kl обозначена как X_4^*) величина целевой функции равна: $f_4^* = f_4(X_4^*) = 16.91$. (Черный цвет).

2. Координаты точки минимума (Наихудшее решение для критерия на $\min$ является максимальным числовым значением) в точке $X_4^0 = \{x_1 = 62.71, x_3 = 8.0\}$ величина целевой функции $F_4^0 = f_4(X_4^0) = 51.43$. Величина целевой функции в четырехмерной системе координат $f_4^\Delta(X_4^0) = 61.35$.

3. Координаты точки и функция четвертого критерия при равнозначных критериях: Координаты точки $X^0 = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$. Величина целевой функции $f_4(X^0) = 35.09$. Относительная оценка в точке оптимума X^0 четвертого критерия:

$$\lambda_4(X^0) = \frac{f_4(X^0) - f_4^0}{f_4^* - f_4^0} = 0.5196.$$

4. В физических единицах величина четвертого критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{1,q=1}$ равна $f_4(X_{1,q=1}) = 35.1$.

Линейная функция, соединяющая точки $f_4(X^0)$ и $f_4^\Delta(X_4^*)$, в физических единицах характеризует функцию $f_4(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

А в целом отрезки $f_4^\Delta(X_4^*) - f_4(X^0) - f_4^\Delta(X_4^0)$ представляют геометрическую интерполяцию функции $f_4(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

5. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – пятой характеристики $f_5(X_{1,q=1})$ с приоритетом первого критерия – структуры материала при проектировании в физических единицах.

Представим геометрическую интерпретацию результатов решения по пятой характеристики (56) структуры материала:

$$\min f_5(X) = 886.27 + 26.28x_1 + 33.95x_2 - 27.445x_3 - 49.5x_4 - 0.8451x_1x_2 + 0.5173x_1x_3 + 0.8219x_1x_4 - 0.1411x_2x_3 + 0.3593x_2x_4 - 0.0123x_3x_4 + 0.0438x_1^2 + 0.0401x_2^2 + 3.5281x_3^2 + 2.9103x_4^2\}.$$

Геометрическую интерпретацию функции $f_5(X)$ в физических единицах представим с переменными координатами $\{x_1, x_3\}$ и с постоянными координатами $\{x_2 = 49.54, x_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки X^0 на рис. 9.kl.

1. В точке оптимума X_5^* : при расчете по четырем переменным $x_1, \dots, x_4$ координаты точки и функция пятого критерия равны $X_5^* = \{x_1 = 25.24, x_3 = 4.803\}$, $f_5^* = f_5(X_5^*) = 1882.3$ на рисунке 9.kl функция обозначена как $f_5^\Delta(X_5^*) = 1882.3$; в двухмерной системе координат x_1, x_3 и двумя постоянными x_2, x_4 величина целевой функции равна $f_5^* = f_5(X_5^*) = 1704.7$. (Черный цвет), обозначено как $f_5(X_5^*) = 1704.7$.



2. Координаты точки и функция пятого критерия на **минимум**. В точке оптимума в *четырёхмерной* системе координат $X_5^0 = \{x_1 = 61.18 \ x_3 = 4.591\}$ величина целевой функции равна $f_5^0 = f_5(X_5^0) = f_5^\Delta(X_5^0) = 3921.8$. В *двухмерной* системе координат x_1, x_3 величина целевой функции равна $FX5omin = f_5(X_3^0) = 3240.0$. (Чёрный цвет).

3. Координаты точки и функция пятого критерия при равнозначных критериях:

Координаты точки $X^0 = \{x_1 = 61.18, x_3 = 4.591\}$. Величина целевой функции:

$f_5(X^0) = 2555.1$. Относительная оценка в точке оптимума X^0 :

$$\lambda_5(X^0) = \frac{f_5(X^0) - f_5^0}{f_5^* - f_5^0} = 0.6702.$$

4. В точке оптимума $X_{1,q=1}$ величина пятого критерия с приоритетом первого критерия равна $f_5(X_{1,q=1}) = 2235.2$

Линейная функция, соединяющая точки $f_5(X^0)$ и $f_5^\Delta(X_5^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_5(X)$ в *четырёхмерном* измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

А в целом отрезки $f_5^\Delta(X_5^*) - f_5(X^0) - f_5^\Delta(X_5^0)$ представляют геометрическую интерпретацию функции $f_5(X)$ в *четырёхмерном* измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

6. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – шестой характеристики $f_6(X_{1,q=1})$ с приоритетом первого критерия структуры материала при проектировании в физических единицах.

Представим геометрическую интерпретацию результатов решения шестой характеристики (53) структуры материала:

$\max f_6(X) = 41.758 + 0.6598x_1 + 0.4505x_2 - 0.3094x_3 - 1.8334x_4 - 0.011x_1x_2 - 0.0069x_1x_3 + 0.0161x_1x_4 - 0.0143x_2x_3 + 0.0134x_2x_4 - 0.0005x_3x_4 - 0.0003x_1^2 - 0.0002x_2^2 + 0.0279x_3^2 + 0.1033x_4^2\}$ в физических единицах. Переменные координаты $\{x_1 \ x_3\}$, постоянные координаты $\{x_2 = 49.54, x_4 = 2.2\}$ взяты из точки X^0 (40) и представим $f_6(X)$ на рис. 10.k1.

1. В точке оптимума X_6^* : при расчете **по четырем переменным** $x_1, \dots, x_4$ координаты точки и функция шестого критерия равны $X_6^* = \{x_1 = 80.0, x_3 = 2.0\}$, $f_6^* = f_6(X_6^*) = 93.25$ на рисунке 10.k1 функция обозначена как $f_6^\Delta(X_6^*) = 93.25$; в *двухмерной* системе координат x_1, x_3 и двумя постоянными x_2, x_4 величина целевой функции равна $f_6^* = f_6(X_6^*) = 85.03$. (Чёрный цвет), обозначено как $f_6(X_6^*) = 85.03$.

2. Координаты точки и функция шестого критерия на **минимум**. В точке оптимума в *четырёхмерной* системе координат $X_6^0 = \{x_1 = 61.18 \ x_3 = 4.591\}$ величина целевой функции равна $f_6^0 = f_6(X_6^0) = f_6^\Delta(X_6^0) = 52.60$. В *двухмерной* системе координат x_1, x_3 величина целевой функции равна $FX6omin = f_6(X_6^0) = 52.13$. (Чёрный цвет).

3. Координаты точки и функция шестого критерия при равнозначных критериях:

Координаты точки $X^0 = \{x_1 = 61.18, x_3 = 4.591\}$. Величина целевой функции:

$f_6(X^0) = 73.7$. Относительная оценка в точке оптимума X^0 :

$$\lambda_6(X^0) = \frac{f_6(X^0) - f_6^0}{f_6^* - f_6^0} = 0.5196.$$

4. В точке оптимума $X_{1,q=1}$ величина шестого критерия с приоритетом первого критерия равна $f_6(X_{1,q=1}) = 63.65$.



Линейная функция, соединяющая точки $f_6(X^0)$ и $f_6^\Delta(X_6^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_6(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

А в целом отрезки $f_6^\Delta(X_6^*) - f_6(X^0) - f_6^\Delta(X_6^0)$ представляют геометрическую интерпретацию функции $f_6(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

3.2.3. Блок k2. Выбор оптимальных параметров структуры материала по второму приоритетному критерию, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП, в относительных и физических единицах.

В разделе, в соответствии с техническим заданием, выполнен расчет для приоритета по второму критерию: $f_2(X_{2,q=2}) = 2000$.

В разделе представлены геометрическая интерпретация результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по второму приоритетному критерию в относительных и физических единицах, аналогично блоку k1.

1. На рис. 3.k2 представлены результаты решения λ -задачи в трехмерной системе координат x_1 x_3 и λ и цифровые данные для принятия решений по второму приоритетному критерию.

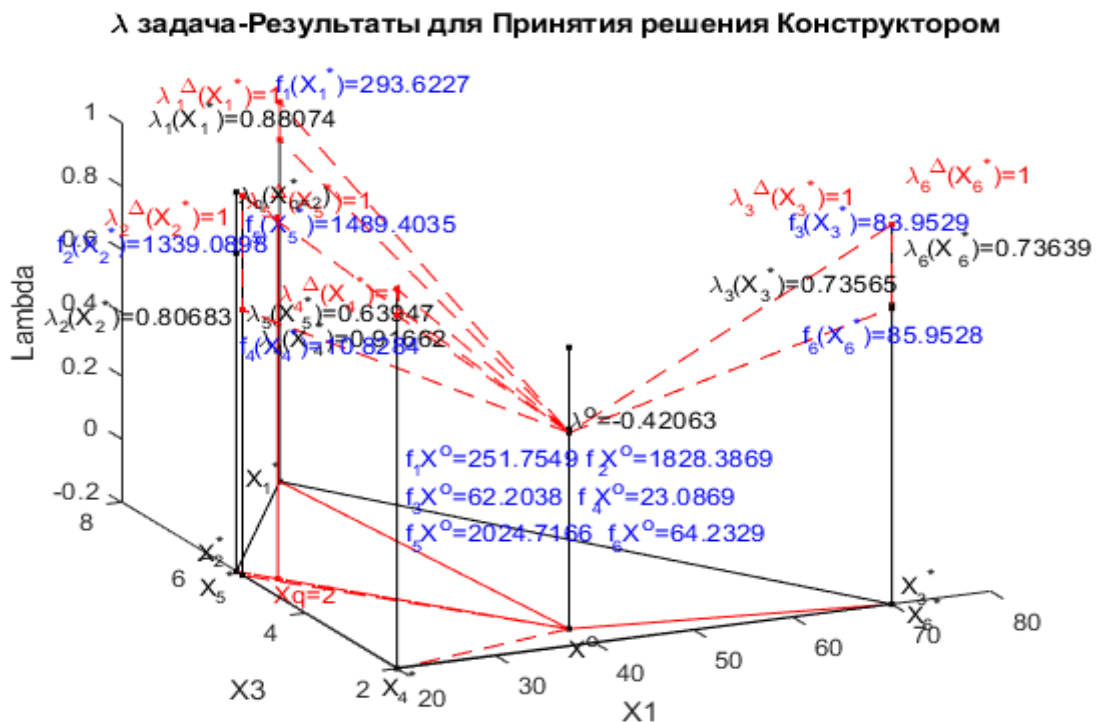


Рисунок. 3.k2. Результаты решения λ -задачи в трехмерной системе координат x_1 x_3 и λ .

Результаты решения в относительных единицах в двухмерной $\lambda_1(X), \dots, \lambda_6(X)$

и четырехмерной $\lambda_1^\Delta(X_1^*) = 1, \dots, \lambda_6^\Delta(X_6^*) = 1$ выделены красным цветом.

Результаты решения в физических единицах в двухмерной $f_1(X), \dots, f_6(X)$

и четырехмерной $f_1(X^0), \dots, f_6(X^0)$ выделены фиолетовым цветом.

2. На рис. 4.k2 представлены результаты решения λ -задачи в системе координат x_1 x_3 и λ . Числовые данные в относительных единицах шести критериев с приоритетом второго критерия $\lambda_k^\Delta(X_k^*), k = 1, K$ $q = 2$ – основа для построения шести критериев в физических единицах.

λ -zadacha Vector Optimization L1: N-Dimensional Optimization

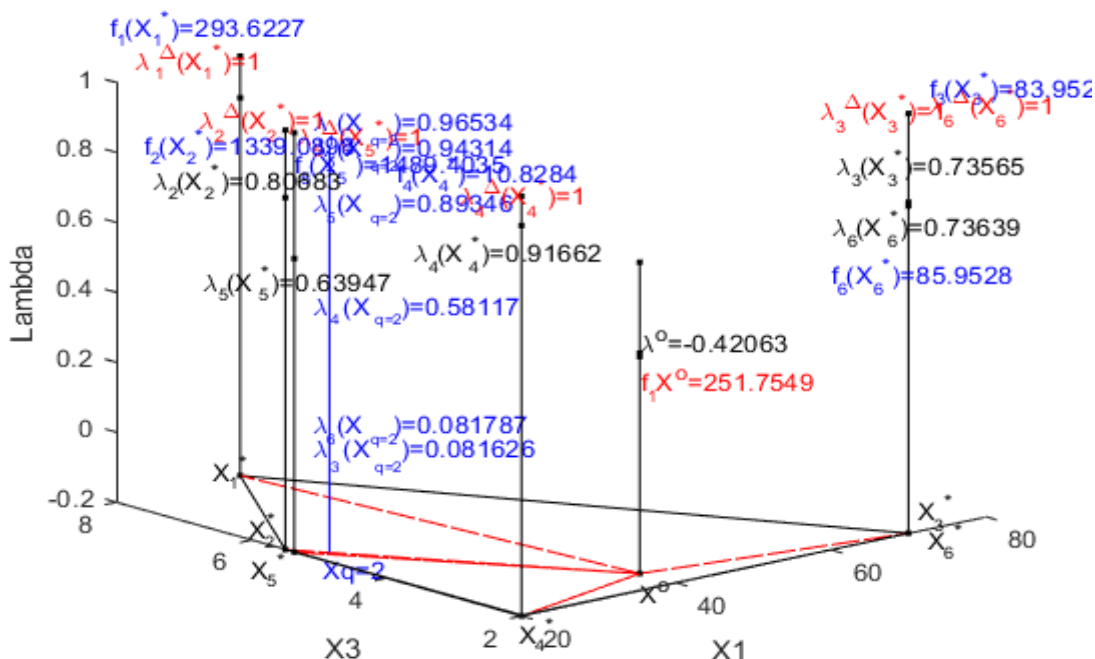


Рисунок. 4.k2. λ -задача в системе координат x_1 x_3 и λ . Результаты: $\lambda_k^\Delta(X_k^*) = 1, k = \overline{1, K}$; относительные оценки с приоритетом $q = 2$ критерия в точке $X_{q=2}$: $\lambda_k(X_{2,q=2}), k = \overline{1, K}$.

3. На рисунках 5.k2, ..., 10.k2 представлена геометрическая интерпретация и цифровые результаты решения шести функций $f_1(X), \dots, f_6(X)$ с приоритетом второго критерия в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ , а также геометрическая интерпретация функции $f_1(X_{2,q=2}), \dots, f_6(X_{2,q=2})$ в системе координат x_1 x_2 x_3 x_4 .

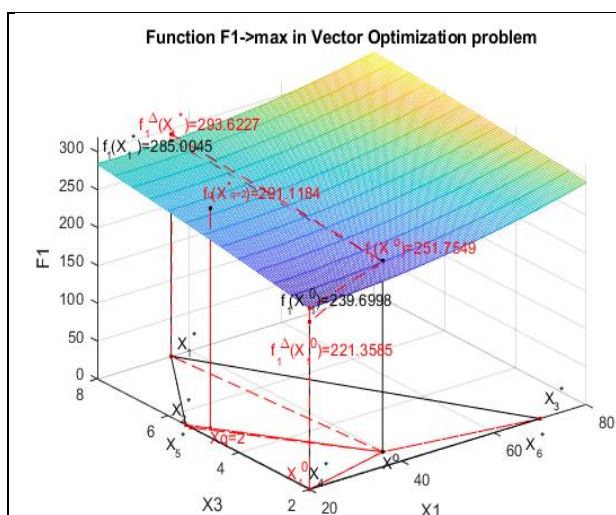


Рисунок. 5.k2. Функция $f_1(X)$ с приоритетом второго критерия в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ , геометрическая интерпретация функции $f_1(X_{2,q=2})$ в системе координат x_1 x_2 x_3 x_4 .

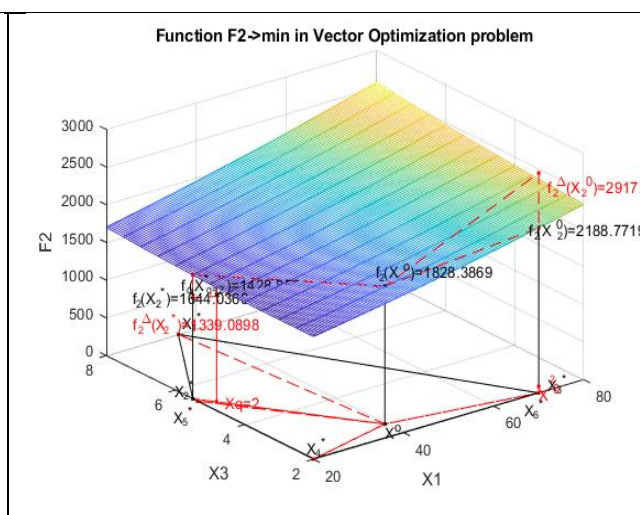


Рисунок. 6.k2. Функция $f_2(X)$ с приоритетом второго критерия в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ , геометрическая интерпретация функции $f_2(X_{2,q=2})$ в координатах x_1 x_2 x_3 x_4 .

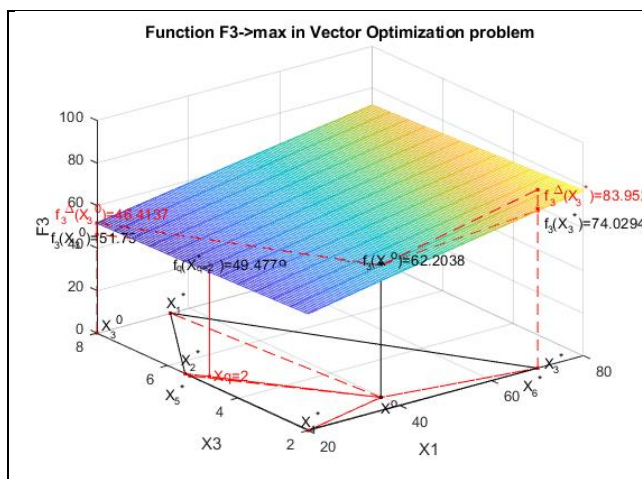


Рисунок. 7.k2. Функция $f_3(X)$ с приоритетом второго критерия в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ , геометрическая интерпретация функции $f_3(X_{2,q=2})$ в координатах $x_1, \dots, x_4$.

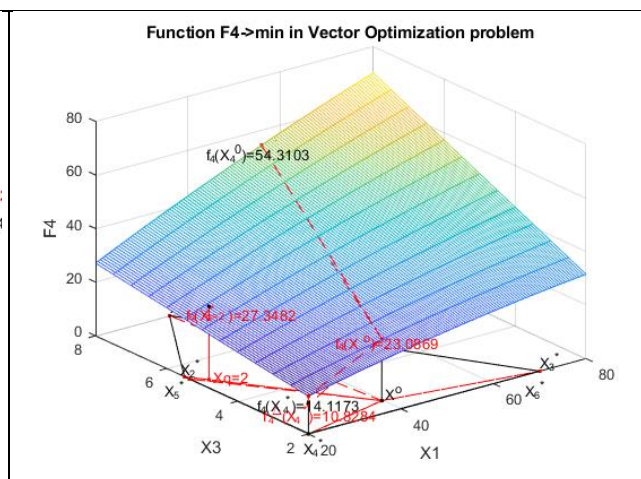


Рисунок. 8.k2. Функция $f_4(X)$ в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ геометрическая интерпретация функции $f_4(X_{2,q=2})$ с приоритетом второго критерия в системе координат $x_1, \dots, x_4$.

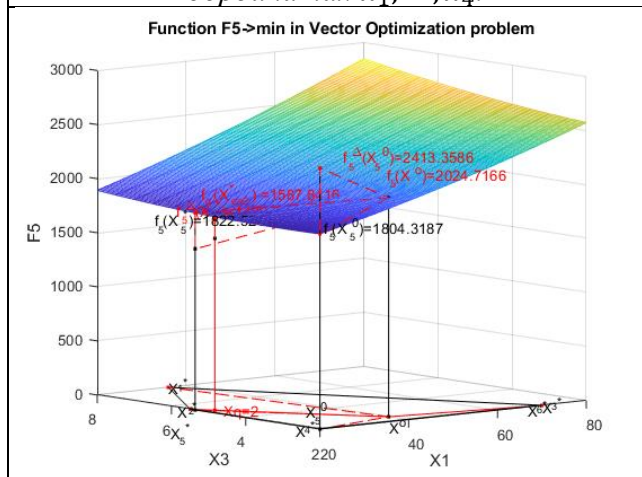


Рисунок. 9.k2. Функция $f_5(X)$ с приоритетом второго критерия в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ , геометрическая интерпретация функции $f_5(X_{2,q=2})$ в координатах $x_1, \dots, x_4$.

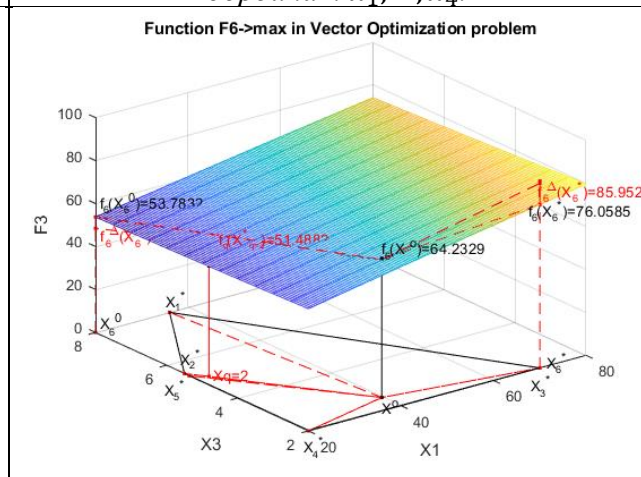


Рисунок. 10.k2. Функция $f_6(X)$ в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ геометрическая интерпретация функции $f_6(X_{2,q=2})$ с приоритетом второго критерия в системе координат $x_1, \dots, x_4$.

Конец блока k2.

3.2.4. Блок k3. Выбор оптимальных параметров структуры материала по третьему приоритетному критерию, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП, в относительных и физических единицах.

В разделе, в соответствии с техническим заданием, выполнен расчет для приоритета по третьему критерию: $f_3(X_{3,q=3}) = 80$.

В разделе представлены геометрическая интерпретация результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по третьему приоритетному критерию в относительных и физических единицах, аналогично блоку k1.

1. На рис. 3.k3 представлены результаты решения λ -задачи в трехмерной системе координат x_1 x_3 и λ и цифровые данные для принятия решений по третьему приоритетному критерию.

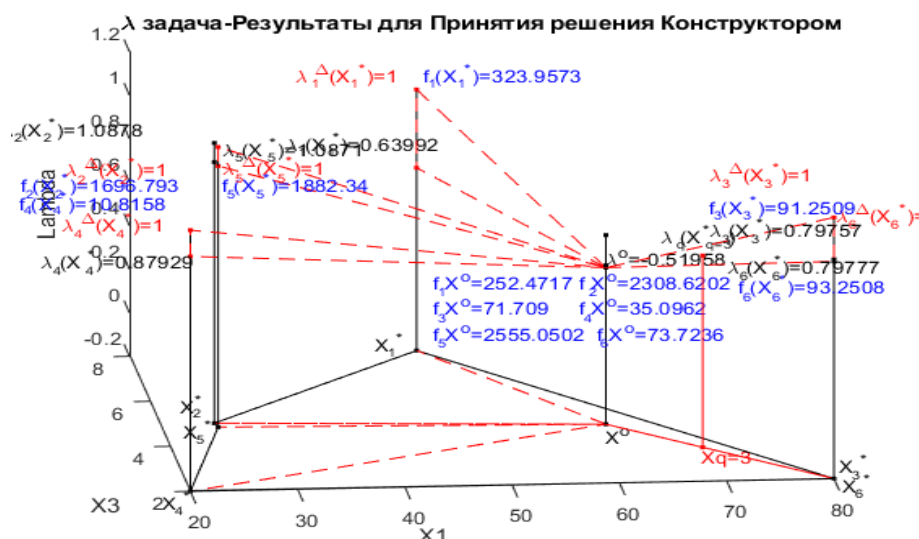


Рисунок. 3.k3. Результаты решения λ -задачи в трехмерной системе координат x_1 x_3 и λ .

Результаты решения в относительных единицах в двухмерной $\lambda_1(X), \dots, \lambda_6(X)$

и четырехмерной $\lambda_1^A(X_1^*) = 1, \dots, \lambda_6^A(X_6^*) = 1$ выделены красным цветом.

Результаты решения в физических единицах в двухмерной $f_1(X), \dots, f_6(X)$

и четырехмерной $f_1(X^0), \dots, f_6(X^0)$ выделены фиолетовым цветом.

2. На рис. 4.k3 представлены результаты решения λ -задача в системе координат x_1 x_3 и λ . Числовые данные в относительных единицах шести критериев с приоритетом третьего критерия $\lambda_k^A(X_k^*), k = \overline{1, K}$ $q = 3$ – основа для построения шести критериев в физических единицах.

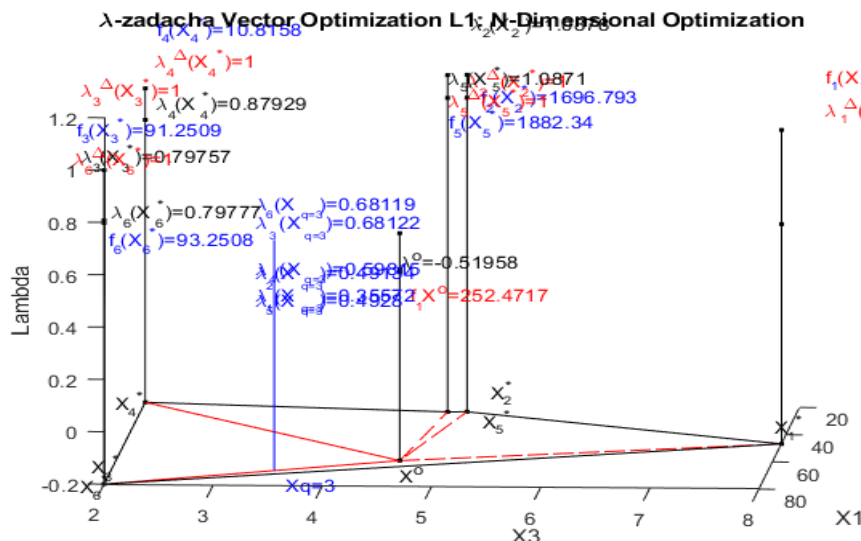


Рисунок. 4.k3. λ -задача в системе координат x_1 x_3 и λ . Результаты: $\lambda_k^A(X_k^*) = 1, k = \overline{1, K}$;

относительные оценки с приоритетом $q = 3$ критерия в точке $X_{q=3}$: $\lambda_k(X_{3,q=3}), k = \overline{1, K}$.

3. На рисунках 5.k3, ..., 10.k3 представлена геометрическая интерпретация и цифровые результаты решения шести функций $f_1(X), \dots, f_6(X)$ с приоритетом третьего критерия в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ , а также геометрическая интерпретация функции $f_1(X_{3,q=3}), \dots, f_6(X_{3,q=3})$ в системе координат x_1 x_2 x_3 x_4 .

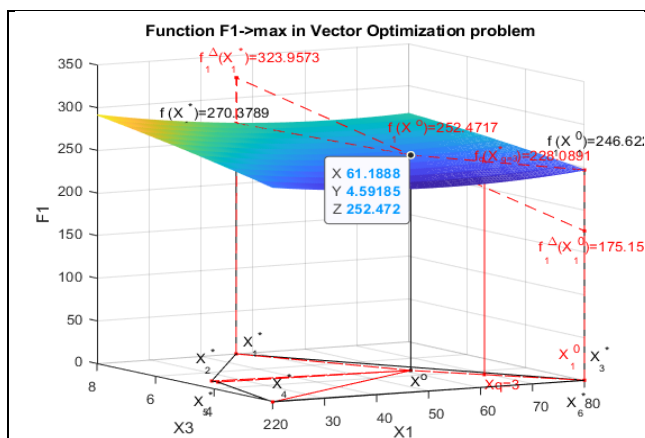


Рисунок 5.k3. Функция $f_1(X)$ с приоритетом третьего критерия в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ , геометрическая интерпретация функции $f_1(X_{3,q=3})$ в системе координат x_1 x_2 x_3 x_4

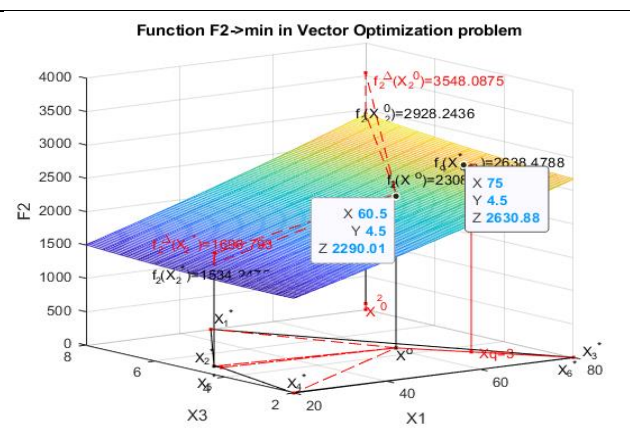


Рисунок 6.k3. Функция $f_2(X)$ с приоритетом третьего критерия в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ , геометрическая интерпретация функции $f_2(X_{3,q=3})$ в координатах x_1 x_2 x_3 x_4

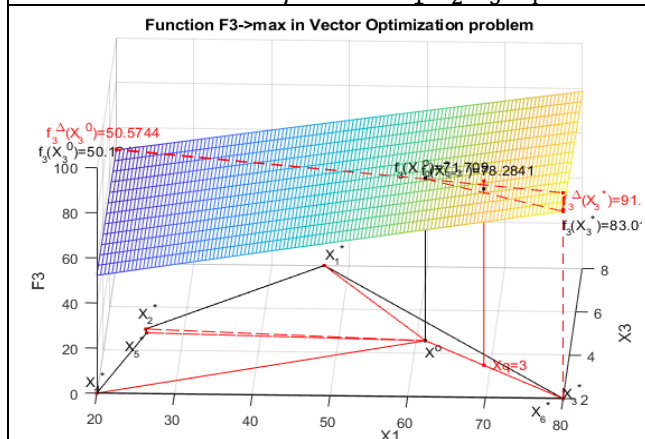


Рисунок 7.k3. Функция $f_3(X)$ в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ , геометрическая интерпретация функции $f_3(X_{3,q=3})$ с приоритетом третьего критерия в системе координат $x_1, \dots, x_4$.

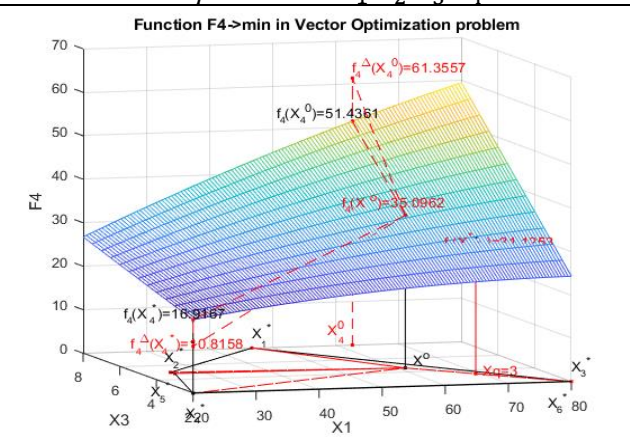


Рисунок 8.k3. Функция $f_4(X)$ в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ геометрическая интерпретация функции $f_4(X_{3,q=3})$ с приоритетом третьего критерия в системе координат $x_1, \dots, x_4$.

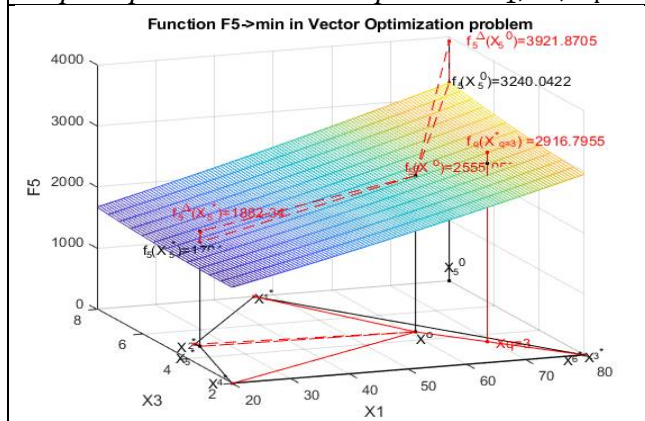


Рисунок 9.k3. Функция $f_5(X)$ в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ , геометрическая интерпретация функции $f_5(X_{3,q=3})$ с приоритетом третьего критерия в системе координат $x_1, \dots, x_4$.

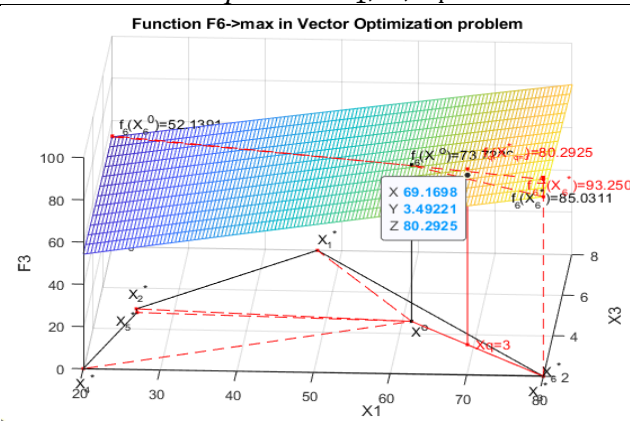


Рисунок 10.k3. Функция $f_6(X)$ в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ геометрическая интерпретация функции $f_6(X_{3,q=3})$ с приоритетом второго критерия в системе координат $x_1, \dots, x_4$.

Конец блока k3.

3.2.5. Блок k4. Выбор оптимальных параметров структуры материала по четвертому приоритетному критерию, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП, в относительных и физических единицах.

В разделе, в соответствии с техническим заданием, выполнен расчет для приоритета по четвертому критерию: $f_4(X_{4,q=4}) = 20$.

В разделе представлены геометрическая интерпретация результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по четвертому приоритетному критерию в относительных и физических единицах, аналогично блоку k1.

1. На рис. 3.k4 представлены результаты решения λ -задачи в трехмерной системе координат x_1 x_3 и λ и цифровые данные для принятия решений по четвертому приоритетному критерию.



Рисунок 3.k4. Результаты решения λ -задачи в трехмерной системе координат x_1 x_3 и λ .

Результаты решения в относительных единицах в двухмерной $\lambda_1(X), \dots, \lambda_6(X)$

и четырехмерной $\lambda_1^A(X_1^*) = 1, \dots, \lambda_6^A(X_6^*) = 1$ выделены красным цветом.

Результаты решения в физических единицах в двухмерной $f_1(X), \dots, f_6(X)$

и четырехмерной $f_1(X^0), \dots, f_6(X^0)$ выделены фиолетовым цветом.

2. На рис. 4.k4 представлены результаты решения λ -задачи в системе координат x_1 x_3 и λ . Числовые данные в относительных единицах шести критериев с приоритетом четвертого критерия $\lambda_k^A(X_k^*), k = \overline{1, K} q = 4$ – основа для построения шести критериев в физических единицах.

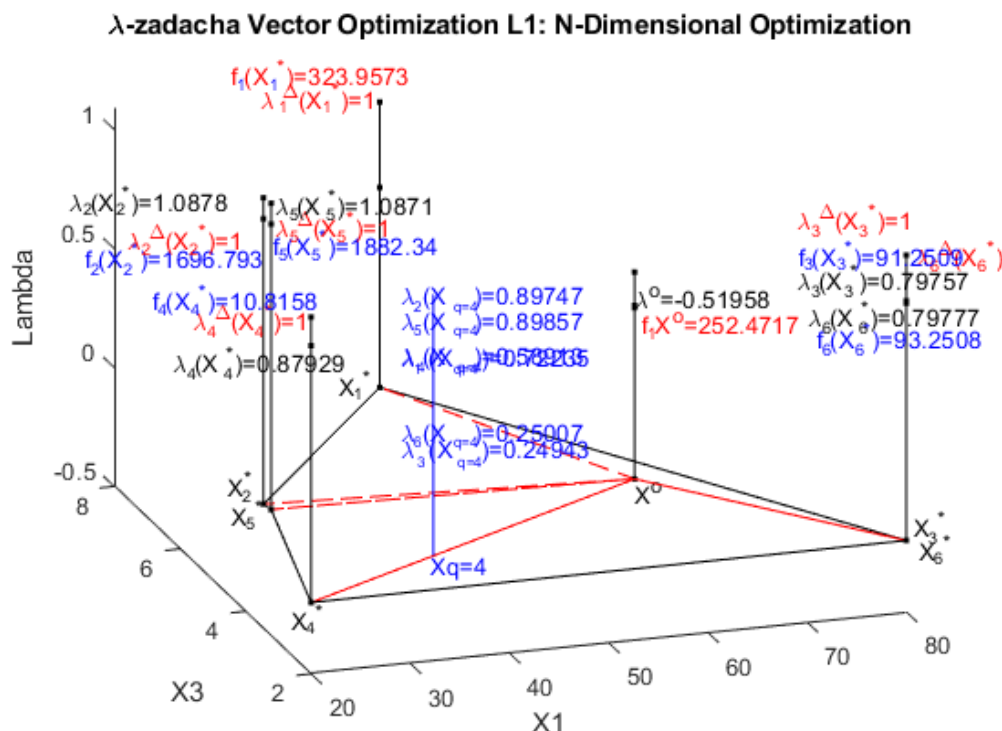


Рисунок. 4.k4. λ -задача в системе координат x_1 x_3 и λ . Результаты: $\lambda_k^A(X_k^*) = 1, k = \overline{1, K}$; относительные оценки с приоритетом $q = 4$ критерия в точке $X_{q=4}$: $\lambda_k(X_{4,q=4}), k = \overline{1, K}$.

3. На рисунках 5.k5, ..., 10.k5 представлена геометрическая интерпретация и цифровые результаты решения шести функций $f_1(X), \dots, f_6(X)$ с приоритетом четвертого критерия в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ , а также геометрическая интерпретация функции $f_1(X_{3,q=3}), \dots, f_6(X_{3,q=3})$ в системе координат x_1 x_2 x_3 x_4 .

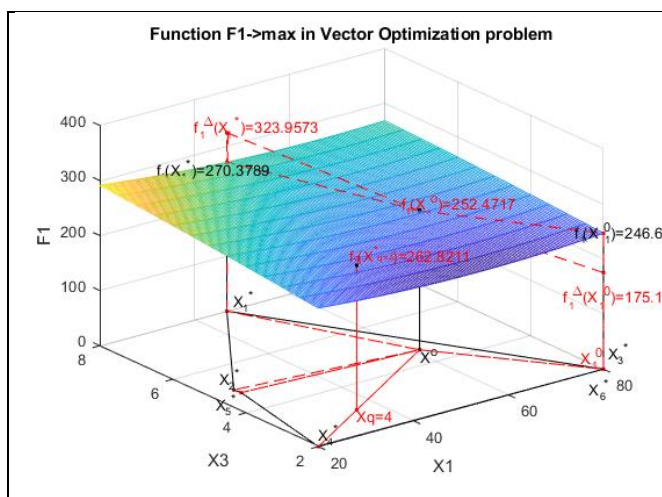


Рисунок 5.k4. Функция $f_1(X)$ с приоритетом четвертого критерия в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ , геометрическая интерпретация функции $f_1(X_{4,q=4})$ в системе координат x_1 x_2 x_3 x_4

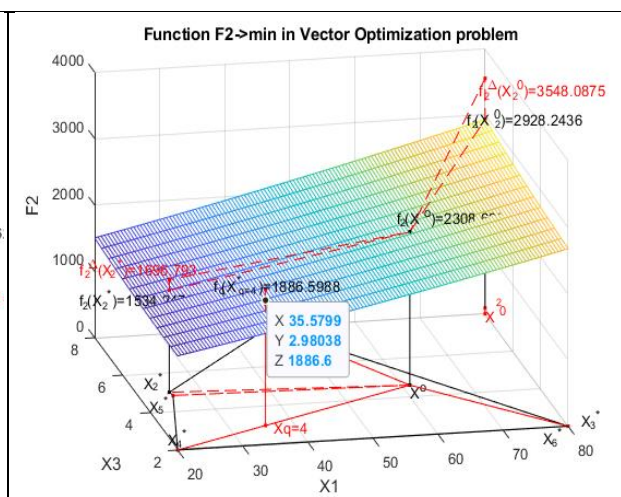


Рисунок 6.k4. Функция $f_2(X)$ с приоритетом четвертого критерия в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ , геометрическая интерпретация функции $f_2(X_{4,q=4})$ в координатах x_1 x_2 x_3 x_4

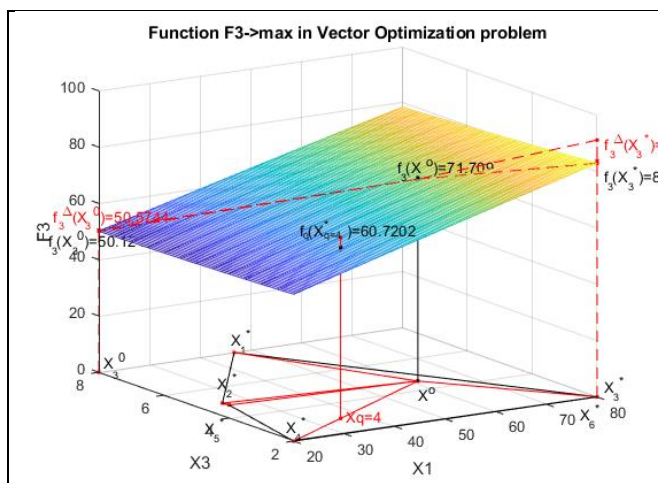


Рисунок 7.k4. Функция $f_3(X)$ в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ , геометрическая интерпретация функции $f_3(X_{4,q=4})$ с приоритетом четвертого критерия в системе координат $x_1, \dots, x_4$.

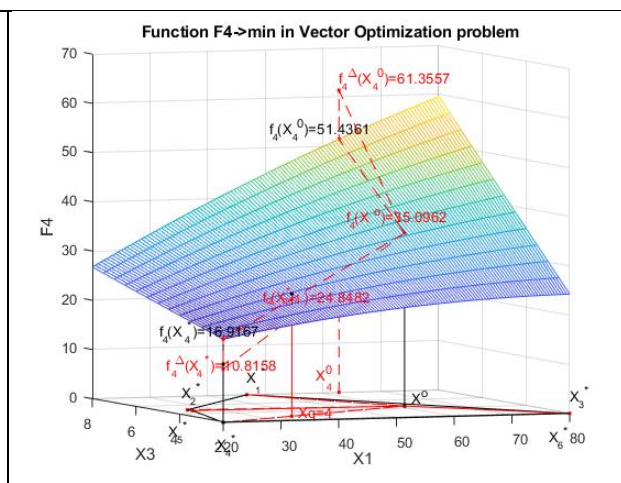


Рисунок 8.k4. Функция $f_4(X)$ в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ , геометрическая интерпретация функции $f_4(X_{4,q=4})$ с приоритетом четвертого критерия в системе координат $x_1, \dots, x_4$.

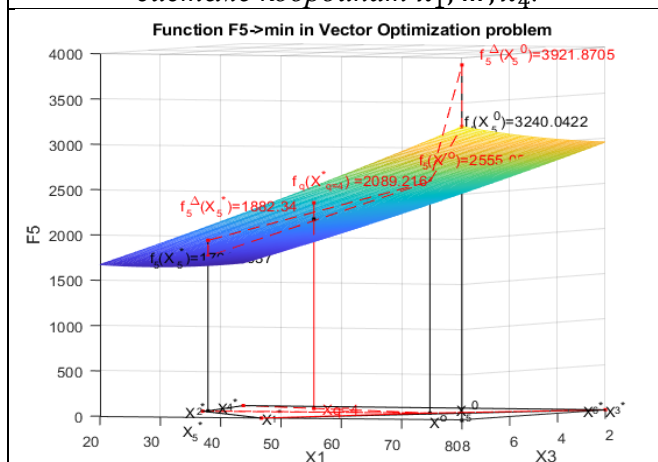


Рисунок 9.k4. Функция $f_5(X)$ в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ , геометрическая интерпретация функции $f_5(X_{4,q=4})$ с приоритетом четвертого критерия в системе координат $x_1, \dots, x_4$.

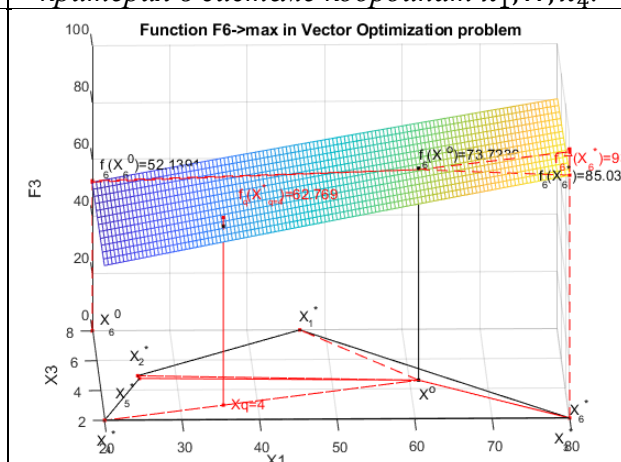


Рисунок 10.k4. Функция $f_6(X)$ в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ , геометрическая интерпретация функции $f_6(X_{4,q=4})$ с приоритетом четвертого критерия в системе координат $x_1, \dots, x_4$.

Конец блока 4.

3.2.6. Блок k5. Выбор оптимальных параметров структуры материала по пятому приоритетному критерию, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП, в относительных и физических единицах.

В разделе, в соответствии с техническим заданием, выполнен расчет для приоритета по четвертому критерию: $f_5(X_{5,q=5}) = 2100$.

В разделе представлены геометрическая интерпретация результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по пятому приоритетному критерию в относительных и физических единицах, аналогично блоку k1.

1. На рис. 3.k5 представлены результаты решения λ -задачи в трехмерной системе координат x_1 x_3 и λ и цифровые данные для принятия решений по пятому приоритетному критерию.

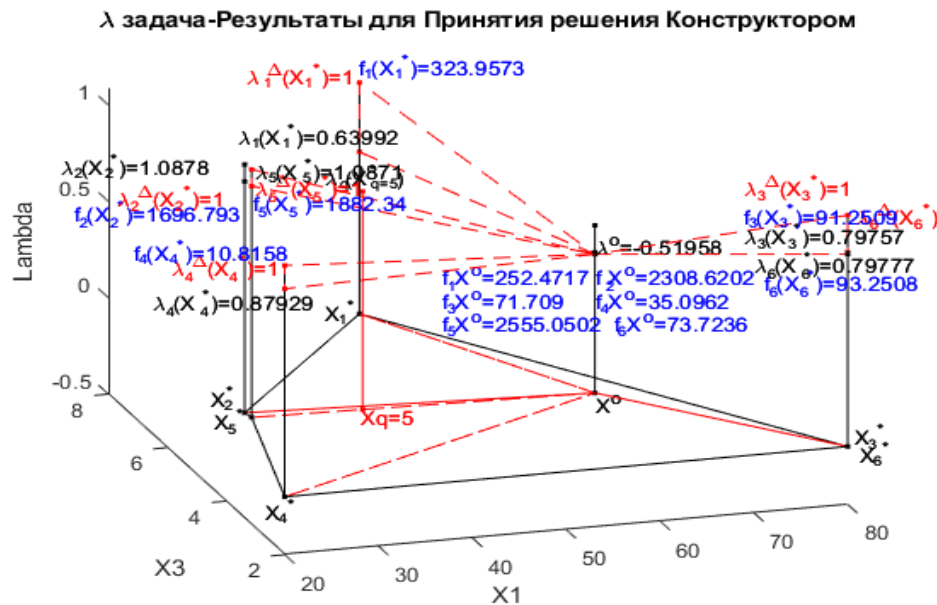


Рисунок. 3.k5. Результаты решения λ -задачи в трехмерной системе координат x_1 x_3 и λ .

Результаты решения в относительных единицах в двухмерной $\lambda_1(X), \dots, \lambda_6(X)$

и четырехмерной $\lambda_1^A(X_1^*) = 1, \dots, \lambda_6^A(X_6^*) = 1$ выделены красным цветом.

Результаты решения в физических единицах в двухмерной $f_1(X), \dots, f_6(X)$

и четырехмерной $f_1(X^0), \dots, f_6(X^0)$ выделены фиолетовым цветом.

2. На рис. 4.k5 представлены результаты решения λ -задачи в системе координат x_1 x_3 и λ . Числовые данные в относительных единицах шести критериев с приоритетом пятого критерия $\lambda_k^A(X_k^*), k = \overline{1, K}$ $q = 4$ – основа для построения шести критериев в физических единицах.

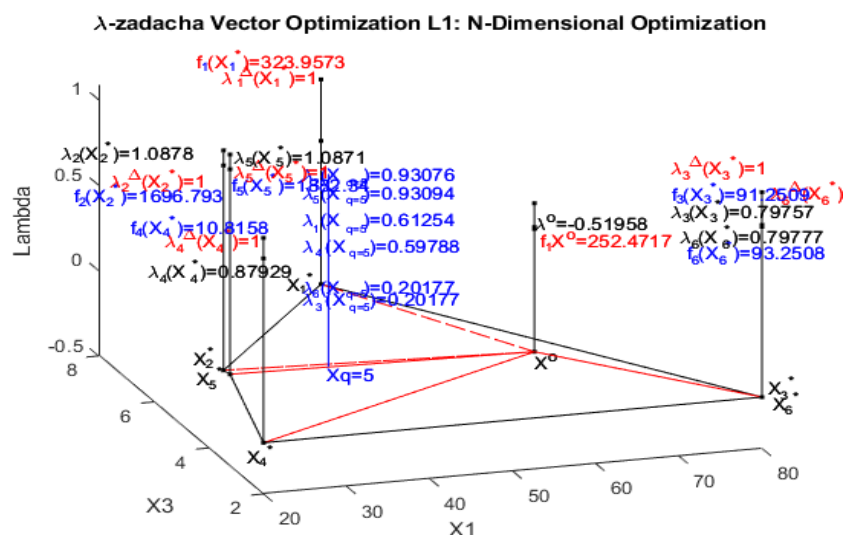


Рисунок 4.k5. λ -задача в системе координат x_1 x_3 и λ . Результаты: $\lambda_k^A(X_k^*), k = \overline{1, K}$;

относительные оценки с приоритетом $q = 5$ критерия в точке $X_{q=5}: \lambda_k(X_{5,q=5}), k = \overline{1, K}$.

3. На рисунках 5.k5, ..., 10.k5 представлена геометрическая интерпретация и цифровые результаты решения шести функций $f_1(X), \dots, f_6(X)$ с приоритетом пятого критерия в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ , а также геометрическая интерпретация функции $f_1(X_{5,q=5}), \dots, f_6(X_{5,q=5})$ в системе координат x_1 x_2 x_3 x_4 .

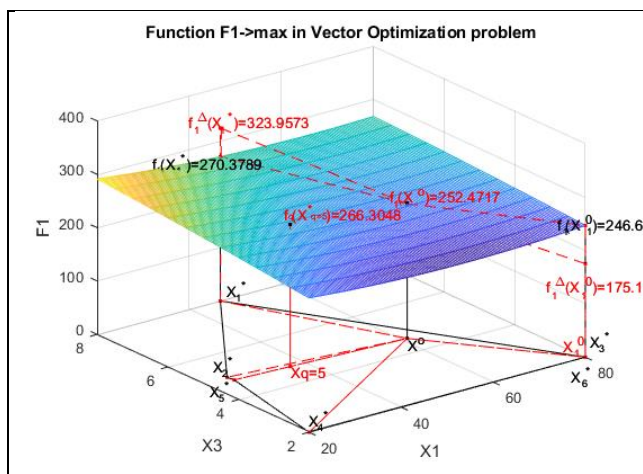


Рисунок 5.k5. Функция $f_1(X)$ с приоритетом пятого критерия в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ , геометрическая интерпретация функции $f_1(X_{5,q=5})$ в системе координат x_1 x_2 x_3 x_4

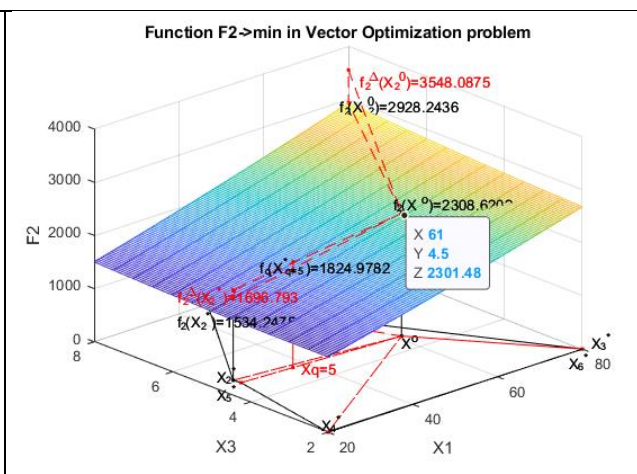


Рисунок 6.k5. Функция $f_2(X)$ с приоритетом пятого критерия в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ , геометрическая интерпретация функции $f_2(X_{5,q=5})$ в координатах x_1 x_2 x_3 x_4

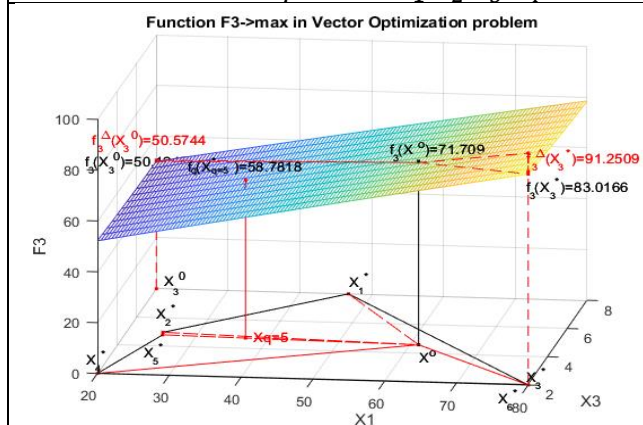


Рисунок 7.k5. Функция $f_3(X)$ в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ , геометрическая интерпретация функции $f_3(X_{5,q=5})$ с приоритетом пятого критерия в системе координат $x_1, \dots, x_4$.

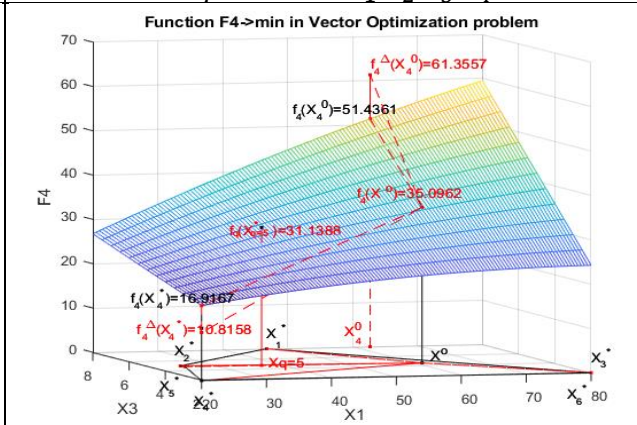


Рисунок 8.k5. Функция $f_4(X)$ в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ геометрическая интерпретация функции $f_4(X_{5,q=5})$ с приоритетом пятого критерия в системе координат $x_1, \dots, x_4$.

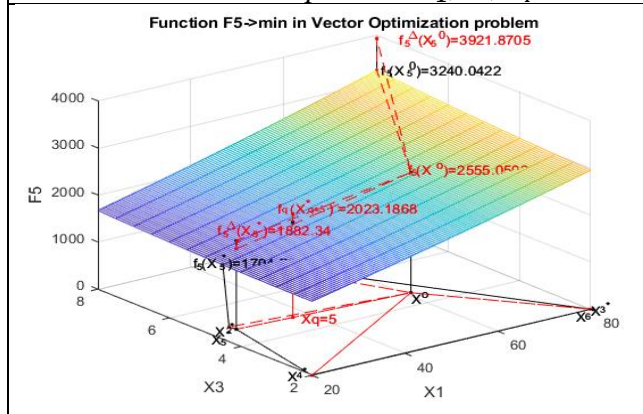


Рисунок 9.k5. Функция $f_5(X)$ в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ , геометрическая интерпретация функции $f_5(X_{5,q=5})$ с приоритетом пятого критерия в системе координат $x_1, \dots, x_4$.

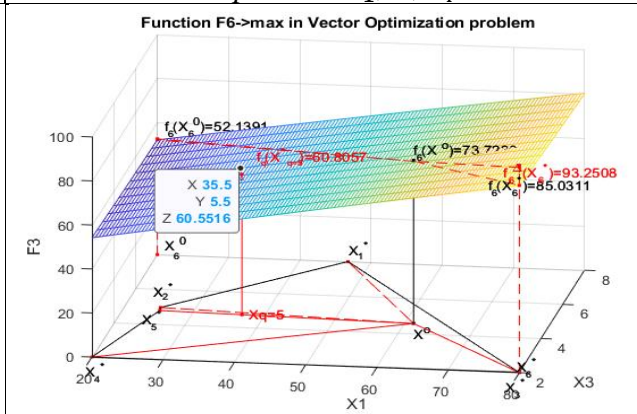


Рисунок 10.k5. Функция $f_6(X)$ в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ геометрическая интерпретация функции $f_6(X_{5,q=5})$ с приоритетом пятого критерия в системе координат $x_1, \dots, x_4$.

Конец блока 5.

3.2.7. Блок к6. Выбор оптимальных параметров структуры материала по шестому приоритетному критерию, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП, в относительных и физических единицах.

В разделе, в соответствии с техническим заданием, выполнен расчет для приоритета по шестому критерию: $f_6(X_{6,q=6}) = 80$.

В разделе представлены геометрическая интерпретация результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по шестому приоритетному критерию в относительных и физических единицах, аналогично блоку *k1*.

1. На рис. 3.к6 представлены результаты решения λ -задачи в трехмерной системе координат x_1 x_3 и λ и цифровые данные для принятия решений по шестому приоритетному критерию.



Рисунок 3.к6. Результаты решения λ -задачи в трехмерной системе координат x_1 x_3 и λ .

Результаты решения в относительных единицах в двухмерной $\lambda_1(X), \dots, \lambda_6(X)$ и четырехмерной $\lambda_1^A(X_1^*), \dots, \lambda_6^A(X_6^*)$ выделены красным цветом.

Результаты решения в физических единицах в двумерной $f_1(X), \dots, f_6(X)$ и четырехмерной $f_1(X^o), \dots, f_6(X^o)$ выделены фиолетовым цветом.

2. На рис. 4.6б представлены результаты решения λ -задача в системе координат x_1 x_3 и λ . Числовые данные в относительных единицах шести критериев с приоритетом шестого критерия $\lambda_k^A(X_k^*), k = \overline{1, K}$ $q = 4$ – основа для построения шести критериев в физических единицах.

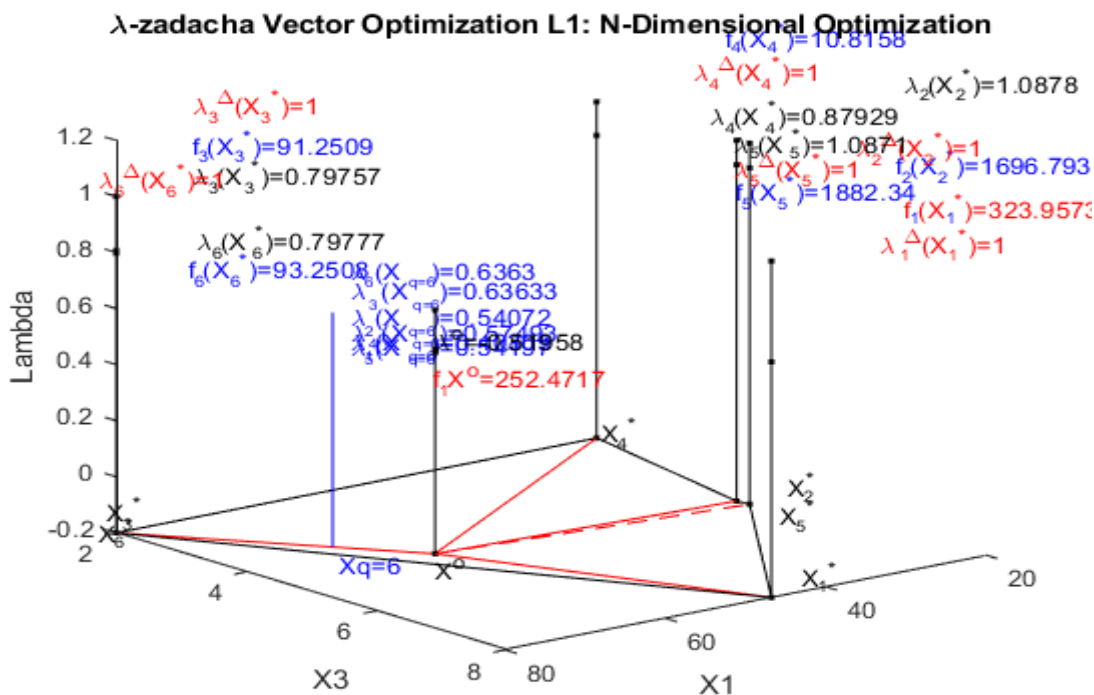


Рисунок 4.к6. λ -задача в системе координат x_1 x_3 и λ . Результаты: $\lambda_k^A(X_k^*), k = \overline{1, K}$;
относительные оценки с приоритетом $q = 6$ критерия в точке $X_{q=6}$: $\lambda_k(X_{6,q=6}), k = \overline{1, K}$.

3. На рисунках 5.к6, ..., 10.к6 представлена геометрическая интерпретация и цифровые результаты решения шести функций $f_1(X)$, ..., $f_6(X)$ с приоритетом шестого критерия в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ , а также геометрическая интерпретация функции $f_1(X_{6,q=6})$, ..., $f_6(X_{6,q=6})$ в системе координат x_1 x_2 x_3 x_4 .

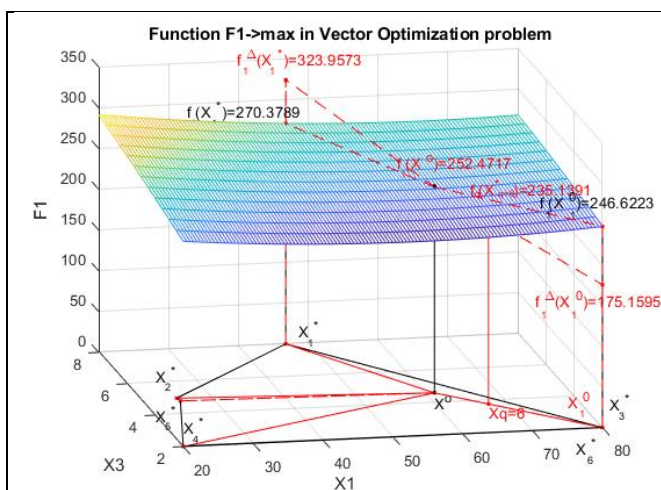


Рисунок 5.к6. Функция $f_1(X)$ с приоритетом шестого го критерия в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ , геометрическая интерпретация функции $f_1(X_{6,q=6})$ в системе координат x_1 x_2 x_3 x_4

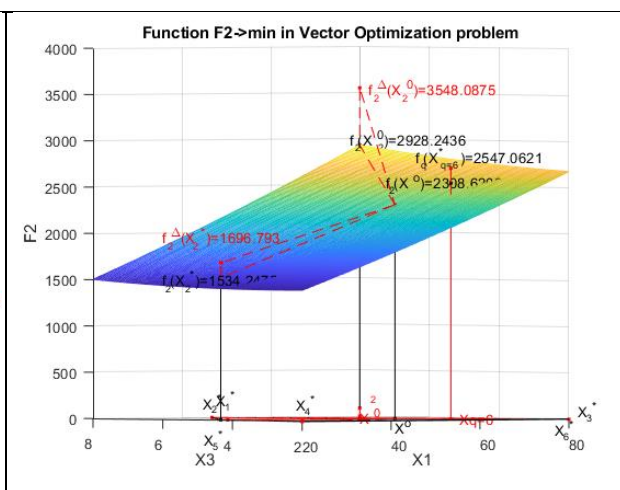
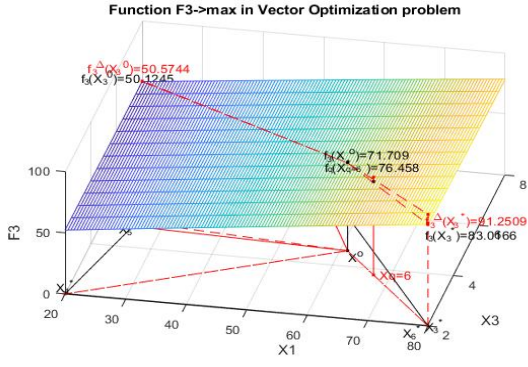
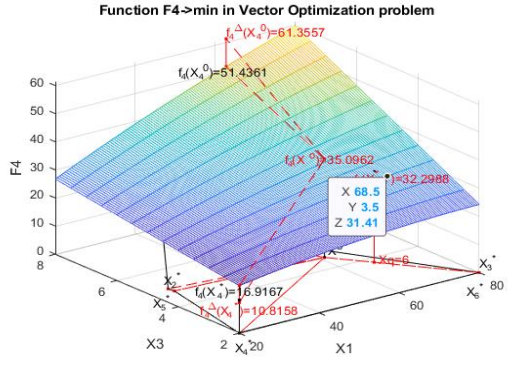
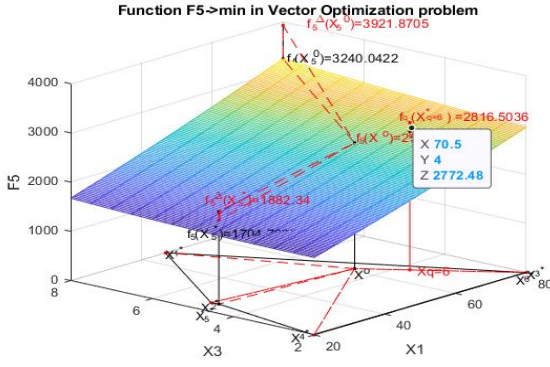
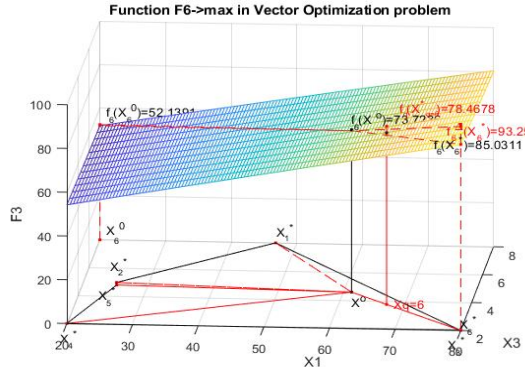


Рисунок 6.к6. Функция $f_2(X)$ с приоритетом шестого критерия в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ , геометрическая интерпретация функции $f_2(X_{6,q=6})$ в координатах x_1 x_2 x_3 x_4

	
Рисунок 7.k6. Функция $f_3(X)$ в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ, геометрическая интерпретация функции $f_3(X_{6,q=6})$ с приоритетом четвертого критерия в системе координат $x_1, \dots, x_4$.	Рисунок 8.k6. Функция $f_4(X)$ в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ геометрическая интерпретация функции $f_4(X_{6,q=6})$ с приоритетом шестого критерия в системе координат $x_1, \dots, x_4$.
	
Рисунок 9.k6. Функция $f_5(X)$ в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ, геометрическая интерпретация функции $f_5(X_{6,q=6})$ с приоритетом шестого критерия в системе координат $x_1, \dots, x_4$.	Рисунок 10.k6. Функция $f_6(X)$ в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ геометрическая интерпретация функции $f_6(X_{6,q=6})$ с приоритетом шестого критерия в системе координат $x_1, \dots, x_4$.

Конец блока 6.

1. Сравнение прикладных методов многомерной математики с методами искусственного интеллекта.

Оценим прикладные методы многомерной математики - {аксиоматика Машунин Ю.К., принципы оптимальности и методы решения векторных задач математического программирования}, и сравним их с методами искусственного интеллекта.

Используя теорию векторной оптимизации, для инженерной системы (в частности, структуры материала) мы получили.

1. Оптимальное решение при равнозначных критериях, которое включает:

Точки оптимума – параметры инженерной системы — $X^o = (x_j^o, j = \overline{1, N})$;

Характеристики (критерии) при равнозначных критериях – $F(X^o) = \{f_k(X^o), k = \overline{1, K}\}$;

Относительные оценки при равнозначных критериях – $\lambda(X^o) = \{\lambda_k(X^o), k = \overline{1, K}\}$, которые лежат в пределах $\{0 \leq \lambda_k(X^o) \leq 1 (100\%), k = \overline{1, K}\}$, и легко переводится в натуральные (физические) данные.

Может ли эти результаты получить искусственные интеллектуальные системы (ИИС), функционирующий, как правило, по принципу перебора. Ответим: «Нет». Искусственный

интеллект может получить только приближительный результат, который задал человек, но чем этот результат лучше других результатов также должен оценить человек на основе интуиции. При поиске приемлемого решения ИИС должна решить проблемы: сравнения критериев, измеренных в различных единицах, и направления оптимизации (max, min).

2. Оптимальное решение при заданной числовой величине (приоритете) любого критерия (характеристики). Числовая величина критерия формируется на интеллекте конструктора системы. Решение при заданной величине приоритетного критерия (характеристики) включает:

Точки оптимума – параметры инженерной системы – при заданном приоритете **любого** критерия (характеристики): $X^q = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \forall q = \{1, 2, 3, 4\}$.

Формирование главных показателей (характеристик) при заданном приоритете **любого** критерия в точке оптимума X^q : $f_k(X^q) = \{f_1(X^q), f_2(X^q), f_3(X^q), f_4(X^q)\}, \forall k = \overline{1, K}$.

Формирование относительных оценок при заданном приоритете **любого** критерия в точке оптимума X^q : $\lambda^q = \{\lambda_k^q, k = \overline{1, K}, \lambda_k(X^q) = \frac{f_k(X^q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}$:

$$\lambda_k(X^q) = \{\lambda_1(X^q), \lambda_2(X^q), \lambda_3(X^q), \lambda_4(X^q), \forall k = \overline{1, K}\}.$$

Может ли эти результаты получить ИИС, функционирующий, как правило, по принципу перебора. Ответим: «Нет». Искусственный интеллект может получить только приближительный результат, который задал человек, но чем этот результат лучше других результатов также должен оценить человек на основе интуиции.

Таким образом, разработанная теория многомерной математики может являться математическим аппаратом вычислительного процесса искусственного интеллекта.

2. Заключение

Проблема разработки математических методов многомерной математики и принятия оптимального решения на их основе в сложной инженерной системе по некоторому набору функциональных характеристик и экспериментальных данных является одной из важнейших задач системного анализа и проектирования инженерно-технических и структуры материала систем.

В работе представлена теория, методы многомерной математики в системе принятия оптимальных решений в задачах, возникающих при исследовании, проектировании и выборе параметров в многопараметрических и многофункциональных инженерных системах, к которым относятся технические системы, технологические процессы, материалы. На базе многомерной математики в работе разработана и представлена методология автоматизации проектирования путем: построения математической модели инженерной системы в условиях определенности и неопределенности. Представлено построение математической и численной модели выбора оптимальных параметров структуры материала с четырьмя параметрами и четырьмя характеристиками. Моделирование и выбор оптимальных параметров инженерных систем реализованы в две стадии. Первая стадия работы направлена на решение выбора оптимальных параметров инженерной системы в условиях определенности и неопределенности при равнозначных критериях. Вторая стадия работы направлена на решение выбора оптимальных параметров инженерной системы в условиях неопределенности, при этом использованы интеллектуальные знания конструктора системы.

Решена задача и показана геометрическая интерпретация результатов решения N-мерной инженерной системы параметров в двухмерную систему параметров. mashunin@mail.ru



ПРИЛОЖЕНИЕ

2. Многомерная математика. Теория, Методы.

Математические модели в условиях определенности и неопределенности: технической системы, технологического процесса, структуры материала (в том числе) представлены векторными задачами математического программирования (ВЗМП). Дальнейшее развитие исследования работ по теории векторной оптимизации привело к формированию "Многомерной математики". В этом аспекте мы представим четыре раздела:

Векторная задача математического программирования;

Аксиоматика, принцип оптимальности и конструктивные методы векторной оптимизации с равнозначными критериями;

Аксиоматика, принцип оптимальности и конструктивные методы векторной оптимизации с заданным приоритетом критерия;

Прикладная многомерная математика: Векторная задача нелинейного программирования – модель развития инженерных систем.

2.1. Векторная задача математического программирования.

2.1.1. Введение в многомерную математику.

В качестве представителя многомерной математики мы сформулируем задачу математического программирования, представленную множеством функций, которые определяют многомерность исследуемого объекта. Каждая функция этого множества функций имеет различную целевую направленность: максимизации или минимизации, которые в совокупности изменяются на определенном (не пустом и замкнутом) множестве переменных (параметров). Не нарушая общности множество функций можно представить в виде вектора функций. В итоге получаем векторную задачу математического программирования (ВЗМП). На базе векторной задачи оптимизации представим теоретические проблемы необходимые для ее решения, которые включают аксиоматику (теоретические основы), принцип оптимальности и конструктивные методы решения векторных задач с равнозначными критериями и заданным приоритетом критерия, [6, 15, 29, 31, 33].

2.1.2. Векторная задача математического программирования

Векторная задача математического программирования (ВЗМП) – это стандартная задача математического программирования, имеющая некоторое множество критериев, которые в совокупности представляют вектор критериев.

ВЗМП подразделяются на однородные и неоднородные ВЗМП.

Однородные ВЗМП максимизации – это векторная задача, у которой каждая компонента множества критериев направлена на максимизацию.

Однородные ВЗМП минимизации – это векторная задача, у которой каждая компонента множества критериев направлена на минимизацию.

Неоднородные ВЗМП – это векторная задача, у которой множество критериев разделено на два подмножества (вектора) критериев – максимизации и минимизации соответственно, т. е. неоднородные ВЗМП – это объединение двух видов однородных задач.

В соответствии с этими определениями представим выпуклую векторную задачу математического программирования с неоднородными критериями [6, 20, 22].

$$\text{Opt } F(X) = \{\max F_1(X) = \{\max f_k(X), k = \overline{1, K_1}\}, \quad (1)$$

$$\min F_2(X) = \{\min f_k(X), k = \overline{1, K_2}\} \quad (2)$$

$$f_k^{\min} \leq f_k(X) \leq f_k^{\max}, k = \overline{1, K}, G(X) \leq B, \quad (3)$$

$$X^{\min} \leq X \leq X^{\max} \quad (4)$$



где $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ - вектор переменных, т.е. это вектор из N -мерного евклидова $\mathbf{R}^N$, $X^{\min} \leq X \leq X^{\max}$ - параметрические ограничения;

$F(X)$ - вектор-функция (векторный критерий), имеющая K – компонент-функций, (K – мощность множества $\mathbf{K}$), $F(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K}\}$. Множество $\mathbf{K}$ состоит из подмножества $\mathbf{K}_1$ компонент максимизации и подмножества $\mathbf{K}_2$ минимизации; $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 \cup \mathbf{K}_2$, для оценки совокупности критериев вводится обозначение операция «opt», которое включает $\max$ и $\min$;

$F_1(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K_1}\}$ – это векторный критерий, каждая компонента которого максимизируется, K_1 – число критериев, а $K_1 = \overline{1, K_1}$ - множество критериев максимизации (задача (1), (3), (4) представляют собой ВЗМП с однородными критериями максимизации). В дальнейшем будем предполагать, что $f_k(X), k = \overline{1, K_1}$ - непрерывные вогнутые функции (иногда будем их называть критериями максимизации);

$F_2(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K_2}\}$ - векторный критерий, каждая компонента которого минимизируется, $K_2 = \overline{K_1 + 1, K} = \overline{1, K_2}$ - множество критериев минимизации, K_2 – число, (задача (2) -(4) это ВЗМП с однородными критериями минимизации). Предполагаем, что $f_k(X), k = \overline{1, K_2}$ - непрерывные выпуклые функции:

$$K_1 \cup K_2 = K, K_1 \subset K, K_2 \subset K \quad (5)$$

$f_k^{\min}, f_k^{\max}$ – минимальная и максимальная величина k -го критерия в ограничениях,

$G(X) \leq B, X \geq 0$ - стандартные ограничения, $g_i(X) \leq b_i, i = 1, \dots, M$, где b_i - набор вещественных чисел, а функции $g_i(X)$ предполагаются непрерывными и выпуклыми.

$$S = \{X \in \mathbf{R}^n | X \geq 0, G(X) \leq B, X^{\min} \leq X \leq X^{\max}\} \neq \emptyset, \quad (6)$$

это допустимое множество точек (или более кратко - допустимое множество), задающиеся стандартными ограничениями (3)-(4) и тривиальными ограничениями $X \geq 0$. Предполагаем, что допустимое множество точек не пусто и представляет собой компакт.

Векторная функция (критерий) минимизации $F_2(X)$ может быть преобразован в векторную функцию (критерий) максимизации умножением каждой компоненты $F_2(X)$ на минус единицу. Векторный критерий $F_2(X)$ введен в ВЗМП (1)-(4) для того, чтобы показать, что в задаче имеется два подмножества критериев $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$ с принципиально различными направлениями оптимизации. Предполагаем, что точки оптимума, полученные по каждому критерию, не совпадают хотя бы для двух критериев. Если все точки оптимума совпадают между собой для всех критериев, то считаем решение тривиально.

2.1.3. Аксиомы и Аксиоматические методы

Аксиома — это утверждение, не требующее логического доказательства. На основе этих утверждений (исходных положений) строится та или иная теория.

Аксиоматический метод — это способ построения научной теории, при котором в основу теории кладутся некоторые исходные положения, называемые Аксиомами теории. В итоге все остальные положения теории получаются как логические следствия аксиом, [1, 2].

В математике Аксиоматический метод зародился в работах древнегреческих геометров. Образцом аксиоматического метода является древнегреческий ученый Евклид, аксиомы которого были заложены в его знаменитом сочинении «Начала». Дальнейшее развитие аксиоматического метода получил в работах Д. Гильберта в виде так называемого метода формализма системы. Общая схема построения произвольной формальной системы («S») включает:

1. Язык системы («S»), в том числе алфавит – это перечень элементарных символов; правила образования (синтаксис), по которым строится формулы «S».
2. Аксиомы системы «S», которые представляют некоторое множество формул.



3. Правила вывода системы «S» [2].

В приложении к решению задачи векторной оптимизации (многомерной математики) аксиоматика подразделяется на два раздела:

1. Аксиоматика решения задачи векторной оптимизации с равнозначными критериями;
2. Аксиоматика решения задачи векторной оптимизации с заданным приоритетом критериев.

Только при построении первоначальной аксиоматики возможно в дальнейшем построение принципа оптимальности и вытекающих из него алгоритмов решения векторных задач математического программирования.

2.2. Аксиоматика, принцип оптимальности и конструктивные методы векторной оптимизации с равнозначными критериями

2.2.1. Аксиоматика решения векторной задачи оптимизации с равнозначными критериями

В соответствии с вышеизложенной трактовкой Язык системы многомерной математики включает: во-первых, нормализацию критериев, во-вторых, относительную оценку критериев (функций), и, в-третьих, минимальный относительный уровень.

Определение 1. (Нормализация критерия).

Нормализация критериев (математическая операция: сдвиг плюс нормирование) представляет однозначное отображение функции $f_k(X) \forall k \in K$, в одномерное пространство $\mathbf{R}^1$ (сама функция $f_k(X) \forall k \in K$ представляет собой функцию преобразования из N -мерного евклидова пространства $\mathbf{R}^N$ в $\mathbf{R}^1$). Для нормализации критериев в векторных задачах будут использоваться линейные преобразования:

$$f_k(X) = a_k f'_k(X) + c_k \forall k \in K, \text{ или } f_k(X) = (f'_k(X) + c_k) / a_k \forall k \in K, \quad (7)$$

где $f'_k(X), k = \overline{1, K}$ - старое (до нормализации) значение критерия; $f_k(X), k = \overline{1, K}$ - нормализованное значение, a_k, c_k - постоянные.

Нормализация критериев $f_k(X) = (f'_k(X) + c_k) / a_k \forall k \in K$ представляет простое (линейное) инвариантное преобразование полинома, в результате которого структура полинома остается неизменной. В оптимизационной задаче нормализация критериев $f_k(X) = (f'_k(X) + c_k) / a_k \forall k \in K$ не влияет на результат решения. Действительно, если решается выпуклая оптимизационная задача:

$$\max_{X \in S} f(X), \text{ то в точке оптимума } X^* \in S: \frac{df(X^*)}{dX} = 0. \quad (8)$$

В общем случае (в том числе с нормализацией критерия (1)) решается задача:

$$\max_{X \in S} (a_k f'_k(X) + c_k) \quad (9)$$

то в точке оптимума $X^* \in S$:

$$\frac{d(a_k f(X^*) + c_k)}{dX} = a_k \frac{d(f(X^*))}{dX} + \frac{d(c_k)}{dX} = 0. \quad (10)$$

Результат идентичен, т.е. точка оптимума $X^*, k = \overline{1, K}$ является одной и той же для ненормализованных и нормализованных задач.

Определение 2. (Относительная оценка функции (критерия)).

В векторной задаче (1)-(4) выполним нормализацию (7) вида:

$$\lambda_k(X) = \frac{f_k(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, \forall k \in K \quad (11)$$

это относительная оценка k -го критерия в точке $X \in S$, где f_k^* наилучшая величина k -го критерия, полученная при решении ВЗМП (1)-(4) отдельно по k -му критерию;



f_k^0 - наихудшая величина k -го критерия (анти оптимум) в точке X_k^0 (верхний индекс 0 - ноль) на допустимом множестве S ;

в задаче на $\max$ (1), (3), (4) величина f_k^0 является наименьшим значением k -го критерия:
 $f_k^0 = \min_{X \in S} f_k(X) \forall k \in K_1$,

а в задаче на $\min$ (2), (3), (4) величина f_k^0 является наибольшим значением k -го критерия:
 $f_k^0 = \max_{X \in S} f_k(X) \forall k \in K_2$.

Относительная оценка $\lambda_k(X) \forall k \in K$, во-первых, измеряется в относительных единицах; во-вторых, относительная оценка $\lambda_k(X) \forall k \in K$: на допустимом множестве меняется с нуля в точке X_k^0 : $\forall k \in K \lim_{X \rightarrow X_k^0} \lambda_k(X) = 0$, к единице в точке оптимума X_k^* :

$$\forall k \in K \lim_{X \rightarrow X_k^*} \lambda_k(X) = 1: \forall k \in K 0 \leq \lambda_k(X) \leq 1, X \in S. \quad (12)$$

В результате такой нормализации все критерии ВЗМП (1)-(4) соизмеримы в относительных единицах, что позволяет, сравнивать их друг с другом их при совместной оптимизации.

Определение 3. Операция сравнения относительных оценок критерия между собой.

Так как, любая функция (критерий) представлен в относительных оценках функций $\lambda_k(X) \forall k \in K$, которые лежат пределах (2.8), то возможно сравнение относительных оценок по числовой величине. Для сравнения используется операция «вычитания». Если сравнивается две функции (критерия), измеренные в относительных оценках $\lambda_{k=1}(X)$ и $\lambda_{k=2}(X) \forall k \in K$, то возможны три ситуации:

первая, когда $\lambda_{k=1}(X) > \lambda_{k=2}(X)$;

вторая, когда $\lambda_{k=1}(X) = \lambda_{k=2}(X)$;

третья, когда $\lambda_{k=1}(X) < \lambda_{k=2}(X)$.

Первая и третья ситуация исследуется в разделе 2.3. В этом разделе исследуется вторая ситуация.

2.2.2. Аксиоматика векторной оптимизации с равнозначными критериями

Аксиома 1. (О равнозначности критериев в допустимой точке векторной задачи математического программирования)

В векторной задаче два критерия с индексами $k \in K, q \in K$ будем считать равнозначными в точке $X \in S$, если относительные оценки по k -му и q -му критерию равны между собой в этой точке, т. е. $\lambda_k(X) = \lambda_q(X), k, q \in K$.

Пояснение. Если в точке $X \in S$ функции (критерии) будут равны:

$\lambda_l(X) = 0,45 \ l \in K$ и $\lambda_q(X) = 0,45, q \in K$ (т.е. 45% от своей оптимальной величины, которая в относительных единицах равна 1), то такие критерии не «равны» друг другу, а равнозначны по своему числовому значению. И каждый из них несет свой функциональный смысл, который может быть получен, используя нормализацию критериев (11).

Определение 4. (Определение минимального уровня среди всех относительных оценок критериев). Относительный уровень λ в векторной задаче представляет нижнюю оценку точки $X \in S$ среди всех относительных оценок $\lambda_k(X), k = \overline{1, K}$:

$$\forall X \in S \lambda \leq \lambda_k(X), k = \overline{1, K}. \quad (13)$$

нижний уровень для выполнения условия (13) в точке $X \in S$ определяется формулой

$$\forall X \in S \lambda = \min_{k \in K} \lambda_k(X). \quad (14)$$

Соотношения (13) и (14) являются взаимосвязанными. Они служат переходом от операции (14) определения $\min$ к ограничениям (13) и наоборот. Уровень λ позволяет



объединить все критерии в векторной задаче одной числовой характеристикой λ и производить над ней определенные операции, тем самым, выполняя эти операции над всеми критериями, измеренными в относительных единицах. Уровень λ функционально зависит от переменной $X \in S$, изменяя X , можем изменять нижний уровень - λ .

2.2.3. Принцип оптимальности векторной оптимизации с равнозначными критериями

Определение 5. (Принцип оптимальности 1 с равнозначными критериями).

Векторная задача математического программирования при равнозначных критериях решена, если найдена точка $X^o \in S$ и максимальный уровень λ^o (верхний индекс o - оптимум) среди всех относительных оценок такой, что

$$\lambda^o = \max_{X \in S} \min_{k \in K} \lambda_k(X). \quad (15)$$

Используя взаимосвязь выражений (13) и (14), преобразуем максиминную задачу (15) в экстремальную задачу:

$$\lambda^o = \max_{X \in S} \lambda, \quad (16)$$

$$\text{at restriction } \lambda \leq \lambda_k(X), k = \overline{1, K} \quad (17)$$

Полученную задачу (16)-(17) назовем λ -задачей. λ -задача (16)-(17) имеет $(N+1)$ размерность, как следствие результат решения λ -задачи (16)-(17) представляет собой оптимальный вектор $X^o \in R^{N+1}$, $(N+1)$ -я компонента которого суть величина λ^o , т. е. $X^o = \{x_1^o, x_2^o, \dots, x_N^o, x_{N+1}^o\}$, при этом $x_{N+1}^o = \lambda^o$, $(N+1)$ компонента вектора X^o выделена в λ^o .

Полученная пара $\{\lambda^o, X^o\} = X^o$ характеризует оптимальное решение λ -задачи (16)-(17) и соответственно векторной задачи математического программирования (1)-(4) с равнозначными критериями, решенную на основе нормализации критериев и принципе гарантированного результата. Назовем в оптимальном решении $X^o = \{\lambda^o, X^o\}$, X^o - оптимальной точкой, а λ^o - максимальным уровнем.

Важным результатом алгоритма решения векторной задачи с равнозначными критериями (1)-(4) является следующая теорема.

Теорема 1. (Теорема о двух наиболее противоречивых критериях в векторной задаче математического программирования с равнозначными критериями).

В выпуклой векторной задаче математического программирования (1)-(4) при эквивалентных критериях, решенной на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата, в оптимальной точке $X^o = \{\lambda^o, X^o\}$ всегда имеется два критерия - обозначим их индексами $q \in K, p \in K$ (которые являются самыми противоречивыми из множества критериев $k = \overline{1, K}$), и для которых выполняется равенство:

$$\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_p(X^o), q, p \in K, X \in S, \quad (18)$$

и другие критерии определяются неравенством:

$$\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), \forall k \in K, q \neq p \neq k. \quad (19)$$

Впервые доказательство теоремы 1 представлено в [6, стр.22], в дальнейшем повторено в работе [10, стр.234]. Вместе с тем, что точка X^o является оптимальным решением ВЗМП.

2.2.4. Математический алгоритм решения задачи векторной оптимизации с равнозначными критериями

Для решения векторной задачи математического программирования (1)-(4) разработан метод, основанный на нормализации критериев (7), аксиоматике и принципе максимина (гарантированного результата) (11). Конструктивный метод решения векторной задачи оптимизации с равнозначными критериями включает два блока: 1-й блок «Системный анализ» - разделен на три шага; 2-й блок «Принятие оптимального решения», включающий два шага: построения λ -задачи и ее решения.



Блок 1. Системный анализ.

Шаг 1. Решается задача (1)-(4) по каждому критерию отдельно, т.е. для $\forall k \in K_1$ решается на максимум, а для $\forall k \in K_2$ решается на минимум.

В результате получим:

X_k^* - точка оптимума по соответствующему критерию, $k = \overline{1, K}$;

$f_k^* = f_k(X_k^*)$ – величина k -го критерия в этой точке, $k = \overline{1, K}$.

Шаг 2. Определяем наихудшую величину каждого критерия (антиоптимум):

f_k^0 , $k = \overline{1, K}$. Для чего решается задача (1)-(4) для каждого критерия $k = \overline{1, K_1}$ на минимум:

$f_k^0 = \min f_k(X), G(X) \leq B, X \geq 0, k = \overline{1, K_1}$

для каждого критерия $k = \overline{1, K_2}$ на максимум:

$$f_k^0 = \max f_k(X), G(X) \leq B, X \geq 0, k = \overline{1, K_2}. \quad (20)$$

В результате решения получим: $X_k^0 = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ - точка оптимума по соответствующему критерию, $k = \overline{1, K}$; $f_k^0 = f_k(X_k^0)$ – величина k -го критерия в точке, $X_k^0, k = \overline{1, K}$.

Шаг 3. Выполняется системный анализ множества точек, оптимальных по Парето. В точках $X^* = \{X_k^*, k = \overline{1, K}\}$ определяются величины целевых функций $F(X^*)$, относительных оценок $\lambda(X^*)$: $\lambda_k(X) = \frac{f_k(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, \forall k \in K$.

$$F(X^*) = \{f_k(X_k^*), q = \overline{1, K}, k = \overline{1, K}\} = \begin{vmatrix} f_1(X_1^*), \dots, f_K(X_1^*) \\ \dots \\ f_1(X_K^*), \dots, f_K(X_K^*) \end{vmatrix}, \quad (21)$$

$$\lambda(X^*) = \{\lambda_q(X_k^*), q = \overline{1, K}, k = \overline{1, K}\} = \begin{vmatrix} \lambda_1(X_1^*), \dots, \lambda_K(X_1^*) \\ \dots \\ \lambda_1(X_K^*), \dots, \lambda_K(X_K^*) \end{vmatrix}. \quad (22)$$

В целом по задаче относительная оценка (22) $\lambda_k(X), k = \overline{1, K}$ лежит в пределах:

$$0 \leq \lambda_k(X) \leq 1, k = \overline{1, K}.$$

Блок 2. Принятие оптимального решения в ВЗМП. Включает два шага – 4, 5.

Шаг 4. Построение λ -задачи. Создание λ -задачи осуществляется в два этапа: первоначально строится максиминная задача оптимизации с эквивалентными критериями, которые на втором этапе преобразуются в стандартную задачу математического программирования, названной λ -задачей. Для построения максиминная задача используем определение 2: $\forall X \in S \quad \lambda = \min_{k \in K} \lambda_k(X)$.

Нижний уровень λ максимизируем по $X \in S$. В результате сформулируем максиминную задачу оптимизации с нормализованными критериями:

$$\lambda^0 = \max_{X \in S} \min_{k \in K} \lambda_k(X). \quad (23)$$

На втором этапе задача (23) преобразуется в стандартную задачу математического программирования, названную λ -задача:

$$\lambda^0 = \max_{X \in S} \lambda, \quad \rightarrow \quad \lambda^0 = \max_{X \in S} \lambda, \quad (24)$$

$$\lambda - \lambda_k(X) \leq 0, k = \overline{1, K}, \quad \rightarrow \quad \lambda - \frac{f_k(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0} \leq 0, k = \overline{1, K}, \quad (25)$$

$$G(X) \leq B, X \geq 0, \quad \rightarrow \quad G(X) \leq B, X \geq 0, \quad (26)$$

где вектор неизвестных X имеет размерность $N + 1$: $X = \{\lambda, x_1, \dots, x_N\}$.

Шаг 5. Решение λ -задачи. λ -задача (24)-(26) – стандартная задача выпуклого программирования и для ее решения используются стандартные методы, в результате решения λ -задачи получим

$$X^0 = \{X^0, \lambda^0\} - \text{an optimum point}; \quad (27)$$



$$f_k(X^o), k = \overline{1, K} \text{ are values of the criteria in this point;} \quad (28)$$

$$\lambda_k(X^o) = \frac{f_k(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K} \text{ are sizes of relative estimates.} \quad (29)$$

λ^o - максимальная относительная оценка, которая является максимальным нижним уровнем для всех относительных оценок $\lambda_k(X^o)$, гарантированным результатом в относительных единицах. λ^o гарантирует, что в точке X^o относительные оценки $\lambda_k(X^o)$ больше или равны λ^o :

$$\lambda_k(X^o) \geq \lambda^o, k = \overline{1, K} \text{ or } \lambda^o \leq \lambda_k(X^o), k = \overline{1, K}, X^o \in S, \quad (30)$$

и в соответствии с теоремой 1 точка оптимума $X^o = \{\lambda^o, x_1, \dots, x_N\}$ является оптимальной по Парето.

2.3. Аксиоматика и принцип оптимальности векторной оптимизации с заданным приоритетом критерия

В определении 3 указано, что если сравнивать две функции (критерия), измеренных в относительных оценках $\lambda_{k=1}(X)$ и $\lambda_{k=2}(X) \forall k \in K$, то возможны три ситуации. Вторая ситуация, когда $\lambda_{k=1}(X) = \lambda_{k=2}(X)$ исследована в разделе 2.2 (равнозначные критерии). Ситуации: первая, когда $\lambda_{k=1}(X) > \lambda_{k=2}(X)$, и третья, когда $\lambda_{k=1}(X) < \lambda_{k=2}(X)$, исследуются в этом разделе. Такие ситуации определяются, как задачи с приоритетом критерия.

Для построения методов решения проблемы векторной оптимизации с приоритетом критерия мы введем следующие определения: О приоритете одного критерия над другим; О числовом выражении приоритета критерия над другим; О заданном числовом выражении приоритета одного критерия над другим; О нижнем уровне среди всех относительных оценок с приоритетом критерия; О подмножестве точек, приоритетных по критерию; Принцип оптимальности 2 - Решение векторной задачи с заданным приоритетом критерия, [20, 22].

2.3.1. Аксиоматика решения векторной задачи оптимизации с заданным приоритетом критерия

Язык системы аксиоматики решения векторной задачи с заданным приоритетом критерия включает определения: 1) Приоритет одного критерия над другим; 2) Числовое значение приоритета критерия; 3) Нижний уровень критерия среди всех относительных оценок с приоритетом критерия.

Определение 6. (О приоритете одного критерия над другим).

Критерий $q \in K$ в векторной задаче в точке $X \in S$ имеет приоритет над другими критериями $k = \overline{1, K}$, если относительная оценка $\lambda_q(X)$ по этому критерию больше или равна относительных оценок $\lambda_k(X)$ других критериев, т. е.:

$$\lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), k = \overline{1, K}, \quad (31)$$

и строгий приоритет, если хотя бы для одного критерия $t \in K: \lambda_q(X) > \lambda_t(X), t \neq q$, а для остальных критериев $\lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), k = \overline{1, K}, k \neq t \neq q$.

Введением определения приоритета критерия $q \in K$ в ВЗМП (1)-(4) выполнено переопределение раннего понятия приоритета. Если раньше в него вкладывалось интуитивное понятие о важности этого критерия, то сейчас эта "важность" определяется математически: чем больше относительная оценка q -го критерия над другими, тем он важнее (приоритетнее), и наиболее высокий приоритет в точке оптимума $X_k^*, \forall q \in K$.

Из определения выражения приоритета критерия $q \in K$ в векторной задаче в уравнениях (1)-(4) следует, что возможная область, соответствующая множеству точек $S_q \subset S$, которое характеризуется как $\lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), \forall k \neq q, \forall X \in S_q$. Однако, вопрос на сколько критерий $q \in K$ в точке множества S_q имеет больший приоритет относительно другого критерия остается

открытым. Для ответа на этот вопрос, мы вводим коэффициент связи между парой относительных оценок q и k , что, в целом, представляет вектор:

$$P^q(X) = \{p_k^q(X) \mid k = \overline{1, K}, q \in K \forall X \in S_q\}.$$

Определение 7. (О числовом выражении приоритета критерия над другим).

В векторной задаче с приоритетом критерия q -го над другими критериями $k = \overline{1, K}$, для $\forall X \in S_q$, вектор $P^q(X)$ показывает во сколько раз относительная оценка $\lambda_q(X)$, $q \in K$, больше остальных относительных оценок $\lambda_k(X)$, $k = \overline{1, K}$:

$$P^q(X) = \{p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}, k = \overline{1, K}, p_k^q(X) \geq 1, \forall X \in S_q \subset S, k = \overline{1, K}, \forall q \in K\}. \quad (32)$$

Такое отношение $p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}$ назовем *числовым выражением приоритета q -го критерия над остальными критериями $k = \overline{1, K}$* .

Определение 7а. (О заданном числовом выражении приоритета одного критерия над другими). В векторной задаче (1)–(4) с приоритетом критерия $q \in K$ для $\forall X \in S$ вектор $P^q = \{p_k^q, k = \overline{1, K}\}$, считается заданным лицом, принимающим решения, (ЛПР), если задана каждая компонента этого вектора. Заданная ЛПР компонента p_k^q , с точки зрения ЛПР, показывает во сколько раз относительная оценка $\lambda_q(X)$, $q \in K$ больше остальных относительных оценок $\lambda_k(X)$, $k = \overline{1, K}$. Вектор $p_k^q, k = \overline{1, K}$ является заданным числовым выражением приоритета q -го критерия над остальными критериями $k = \overline{1, K}$:

$$P^q(X) = \{p_k^q(X), k = \overline{1, K}, p_k^q(X) \geq 1, \forall X \in S_q \subset S, k = \overline{1, K}, \forall q \in K\}. \quad (33)$$

Векторная задача (1)–(4), в которой задан приоритет какого-либо из критериев, называют векторной задачей с заданным приоритетом критерия. Проблема задачи вектора приоритетов возникает тогда, когда необходимо определить точку $X^0 \in S$ по заданному вектору приоритетов.

При операции сравнения относительных оценок с приоритетом критерия $q \in K$, аналогично, как и в задаче с эквивалентными критериями, введем дополнительную числовую характеристику λ , которую назовем *уровнем*.

Определение 8. О нижнем уровне среди всех относительных оценок с приоритетом критерия.

Уровень λ является нижним среди всех относительных оценок с приоритетом критерия $q \in K$, таким, что

$$\lambda \leq p_k^q \lambda_k(X), k = \overline{1, K}, q \in K, \forall X \in S_q \subset S. \quad (34)$$

нижний уровень для выполнения условия (34) определяется

$$\lambda = \min_{k \in K} p_k^q \lambda_k(X), q \in K, \forall X \in S_q \subset S. \quad (35)$$

Соотношения (34) и (35) являются взаимосвязанными и служат в дальнейшем переходом от операции определения $\min$ к ограничениям и наоборот. В разделе 4 мы дали определение точки $X^0 \in S$, оптимальной по Парето, с эквивалентными критериями. Рассматривая данное определение как исходное, мы построим ряд аксиом деления допустимого множества точек S , во-первых, как подмножество точек, оптимальных по Парето S^0 , и, во-вторых, на подмножество точек $S_q \subset S$, $q \in K$, приоритетным на q -му критерию.

2.3.2. Аксиома векторной оптимизации с приоритетными критериями

Аксиома 2. (О подмножестве точек, приоритетных по критерию).

В векторной задаче (1)–(4) подмножество точек $S_q \subset S$ называется областью приоритета критерия $q \in K$ над другими критериями, если

$$\forall X \in S_q \forall k \in K \lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), q \neq k.$$



Это определение распространяется и на множество точек S^o , оптимальных по Парето, что дается следующим определением.

Аксиома 2а. (О подмножестве точек, приоритетных по критерию, на множестве точек оптимальных по Парето).

В векторной задаче (1)-(4) подмножество точек $S_q^o \subset S^o \subset S$ называется областью приоритета критерия $q \in K$ над другими критериями, если $\forall X \in S_q^o \forall k \in K \lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), q \neq k$.

Дадим некоторые пояснения.

Аксиома 2 и 2а позволила представить в векторной проблеме (1)–(4) допустимое множество точек S , включая подмножество точек, оптимальных по Парето, $S^o \subset S$, в подмножества:

одно подмножество точек $S' \subset S$, где критерии эквивалентны, и подмножество точек S' , пересекаясь с подмножеством точек S^o , выделяет подмножество точек, оптимальных по Парето, в подмножество с эквивалентными критериями $S^{oo} = S' \cap S^o$, которое, как это показано далее, состоит из одной точки $X^o \in S$, т.е. $X^o = S^{oo} = S' \cap S^o, S' \in S, S^o \subset S$;

« K » подмножеств точек, где у каждого критерия $q = \overline{1, K}$ имеется приоритет над другими критериями $k = \overline{1, K}, q \neq k$. Таким образом, выполнено разделение, во-первых, множества всех допустимых точек S , на подмножества $S_q \subset S, q = \overline{1, K}$, и, во-вторых, разделение подмножества точек, оптимальных по Парето, S^o , на подмножества $S_q^o \subset S_q \subset S, q = \overline{1, K}$. Отсюда верны следующие соотношения:

$$S' \cup (\cup_{q \in K} S_q^o) \equiv S^o, S_q^o \subset S^o \subset S, q = \overline{1, K}.$$

Мы заметим, что подмножество точек S_q^o , с одной стороны, включено в область (подмножество точек), имеющих приоритет критерия $q \in K$ над другими критериями: $S_q^o \subset S_q \subset S$, и с другой стороны, на подмножество точек, оптимальных по Парето: $S_q^o \subset S^o \subset S$.

Аксиома 2 и числовое выражение приоритета критерия (Определение 5) позволяет определять каждую допустимую точку $X \in S$ (посредством вектора:

$$P^q(X) = \{p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}, k = \overline{1, K}\}, \text{ формироваться и выбирать:}$$

подмножество точек по приоритетному критерию S_q , который включен в множество точек $S, \forall q \in K X \in S_q \subset S$, (такое подмножество точек может использоваться в проблемах кластеризации, но это вне статьи);

подмножество точек по приоритетному критерию S_q^o , который включен в ряд точек S^o , оптимальных по Парето, $\forall q \in K, X \in S_q^o \subset S^o$.

Множество допустимых точек $X \in S$ →	Подмножества точек оптимума по Парето, $X \in S^o \subset S$ →	Подмножество точек, оптимума по Pareto $X \in S_q^o \subset S^o \subset S$ →	Отдельная точка, $\forall X \in S$ $X \in S_q^o \subset S^o \subset S$
---	---	---	---

Это самый важный результат, который позволит вывести принцип оптимальности и построить методы выбора любой точки из множества точек, оптимальных по Парето.

2.3.3. Принцип оптимальности решения векторной задачи с заданным приоритетом критерия



Определение 8. (Принцип оптимальности 2. Решение векторной задачи с заданным приоритетом критерия). Векторная задача (1)–(4) с заданным приоритетом q -го критерия $p_k^q \lambda_k(X), k = \overline{1, K}$ считается решенной, если найдена точка X^0 и максимальный уровень λ^0 среди всех относительных оценок такой, что

$$\lambda^0 = \max_{X \in S} \min_{k \in K} p_k^q \lambda_k(X), q \in K. \quad (36)$$

Используя взаимосвязь (34) и (35), преобразуем максиминную задачу (36) в задачу:

$$\lambda^0 = \max_{X \in S} \lambda, \quad (37)$$

$$\text{at restriction } \lambda \leq p_k^q \lambda_k(X), k = \overline{1, K}. \quad (38)$$

Задачу (37)–(38) назовем λ -задачей с приоритетом q -го критерия.

Результатом решения λ -задачи будет точка $X^0 = \{X^0, \lambda^0\}$ – она же является и результатом решения ВЗМП (1)–(4) с заданным приоритетом критерия, решенной на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата.

В оптимальном решении $X^0 = \{X^0, \lambda^0\}$, X^0 – оптимальная точка, а λ^0 – максимальный нижний уровень. Точка X^0 и уровень λ^0 соответствуют ограничениям (4), которые можно записать как: $\lambda^0 \leq p_k^q \lambda_k(X^0), k = \overline{1, K}$.

Эти ограничения являются основой оценки правильности результатов решения в практических векторных задачах оптимизации.

Определение 1 и 2 «Принципы оптимальности» дают возможность сформулировать понятие операции «opt».

Определение 9. (Математическая операция «opt»).

В векторной задаче (1)–(4), которая представлена критериями «max» и «min», математическая операция «opt» состоит в определении точки X^0 и максимального нижнего уровня λ^0 , в котором все критерии измеряются в относительных единицах:

$$\lambda^0 \leq \lambda_k(X^0) = \frac{f_k(X^0) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}, \quad (39)$$

т.е. все критерии $\lambda_k(X^0), k = \overline{1, K}$ равны или больше максимального уровня λ^0 , (поэтому λ^0 также называется гарантированным результатом).

Теорема 2. (Теорема о наиболее противоречивых критериях в векторной задаче с заданным приоритетом).

Если в выпуклой векторной задаче математического программирования максимизации (1)–(4) задан приоритет q -го критерия $p_k^q, k = \overline{1, K}, \forall q \in K$ над другими критериями, в точке оптимума $X^0 \in S$, полученной на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата, всегда найдется два критерия с индексами $r \in K, t \in K$, для которых выполняется строгое равенство из:

$$\lambda^0 = p_k^r \lambda_r(X^0) = p_k^t \lambda_t(X^0), r, t \in K, \quad (40)$$

и другие критерии определяются неравенствами:

$$\lambda^0 \leq p_k^q \lambda_k(X^0), k = \overline{1, K}, \forall q \in K, q \neq r \neq t. \quad (41)$$

Критерии с индексами $r \in K, t \in K$, для которых выполняется равенство (41), называются наиболее противоречивыми.

Доказательство. Аналогично теореме 2 [20].

Заметим, что в (40) и (41) индексы критериев $r \in K, t \in K$ могут совпадать с индексом $q \in K$.

Следствие теоремы 1. О равенстве оптимального уровня и относительных оценок в векторной задаче с двумя критериями с приоритетом одного из них.



В выпуклой векторной задаче математического программирования с двумя эквивалентными критериями, решаемой на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата, в оптимальной точке X^o всегда выполняется равенство: при приоритете первого критерия над второй:

$$\lambda^o = \lambda_1(X^o) = p_1^1(X^o)\lambda_2(X^o), X^o \in S, \quad (42)$$

где $p_1^1(X^o) = \lambda_1(X^o)/\lambda_2(X^o)$, при приоритете второго критерия над первым:

$$\lambda^o = \lambda_2(X^o) = p_1^2(X^o)\lambda_1(X^o), X^o \in S, \text{ где } p_1^2(X^o) = \lambda_2(X^o)/\lambda_1(X^o).$$

2.3.4. Метод решения задачи векторной оптимизации с заданным приоритетом критерия

Шаг 1. Мы решаем векторную задачу с равнозначными критериями. Алгоритм решения представлен в разделе 4.4.

В результате решения получаем:

оптимальные точки по каждому критерию отдельно $X_k^*, k = \overline{1, K}$ и размеры критериальных функций в этих точках $f_k^* = f_k(X_k^*), k = \overline{1, K}$, которые представляют граница множества точек, оптимальных по Парето;

точки антиоптимума по каждому критерию $X_k^0 = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ и наихудшей неизменной части каждого критерия $f_k^0 = f_k(X_k^0), k = \overline{1, K}$;

$X^o = \{X^o, \lambda^o\}$ оптимальная точка, как результат решения VPMP с эквивалентными критериями, т.е. результат решения максиминной задачи, λ -задачи, построенной на ее основе;

λ^o - максимальная относительная оценка, которая является максимальным нижним уровнем для всех относительных оценок $\lambda_k(X^o)$, или гарантированный результат в относительных единицах, λ^o гарантирует, что все относительные оценки $\lambda_k(X^o)$ равны или больше λ^o :

$$\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), k = \overline{1, K}, X^o \in S. \quad (43)$$

Лицо, принимающее решение, проводит анализ результатов решения векторной задачи с эквивалентными критериями.

Если полученные результаты удовлетворяют лицу, принимающее решение, то конец, иначе выполняются последующие расчеты.

Дополнительно вычислим: в каждой точке $X_k^*, k = \overline{1, K}$ определим величины всех критериев $f_k^* = f_k(X_k^*), k = \overline{1, K}$, которые представляют границу множества Парето, и относительных оценок: $\lambda(X^*) = \{\lambda_q(X_k^*), q = \overline{1, K}, k = \overline{1, K}\}$, $\lambda_k(X) = \frac{f_k(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, \forall k \in K$:

$$(X^*) = \begin{bmatrix} f_1(X_1^*) & \dots & f_K(X_1^*) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1(X_K^*) & \dots & f_K(X_K^*) \end{bmatrix}, \lambda(X^*) = \begin{bmatrix} \lambda_1(X_1^*) & \dots & \lambda_K(X_1^*) \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1(X_K^*) & \dots & \lambda_K(X_K^*) \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Матрицы критериев $F(X^*)$ и относительных оценок $\lambda(X^*)$ показывают величины каждого критерия $k = \overline{1, K}$ при переходе от точки оптимума $X_k^*, k \in K$ к другой $X_q^*, q \in K$;

в точке оптимума при равнозначных критериях X^o вычислим величины критериев и относительных оценок:

$$f_k(X^o), k = \overline{1, K}; \lambda_k(X^o), k = \overline{1, K}, \quad (45)$$

которые удовлетворяют неравенству (43). В других точках $X \in S^o$ меньший из критериев в относительных единицах $\lambda = \min_{k \in K} \lambda_k(X)$ всегда меньше λ^o . Запоминаются данные λ -задачи (24)-(26). Эта информация и является основой для дальнейшего изучения множества Парето.

Шаг 2. Выбор приоритетного критерия $q \in K$.



Из теории (см. теорему 1) известно, что в оптимальной точке X^o всегда имеется два наиболее противоречивых критерия $q \in K$ и $v \in K$, для которых в относительных единицах выполняется точное равенство:

$$\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_v(X^o), q, v \in K, X \in S, \text{ а для остальных выполняется неравенства:}$$

$$\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), \forall k \in K, q \neq v \neq k.$$

Как правило, из этой пары выбирается критерий, который ЛППР хотел бы улучшить, такой критерий называется «приоритетным критерием», обозначим его $q \in K$.

Шаг 3. Определяются числовые пределы изменения величины приоритета критерия $q \in K$. Для приоритетного критерия $q \in K$ из матрицы (40) определим числовые пределы изменения величины критерия: в натуральных единицах $f_q(X)$ и в относительных единицах $\lambda_q(X)$, которые лежат в следующих пределах:

$$\text{in physical units of } f_k(X^o) \leq f_q(X) \leq f_q(X_q^*), k \in K, \quad (46)$$

где $f_q(X_q^*)$ выводится из матрицы уравнения $F(X^*)$ (44), все критерии показывают размеры, измеренные в физических единицах, $f_k(X^o), k = \overline{1, K}$ из (45), и, в относительных единицах:

$$\text{in relative units of } \lambda_k(X^o) \leq \lambda_q(X) \leq \lambda_q(X_q^*), k \in K, \quad (47)$$

где $\lambda_q(X_q^*)$ выводится из матрицы $\lambda(X^*)$, все критерии показывают размеры, измеренные в относительных единицах (отметим, что $\lambda_q(X_q^*) = 1$), $\lambda_q(X^o)$ из уравнения (64).

Как правило, Выражения (46) и (47) выдаются на дисплей для анализа.

Шаг 4. Выбор величины приоритетного критерия (Принятие решения).

Лицо, принимающее решение, проводит анализ результатов расчетов (44) и из неравенства в натуральных единицах (46) выбирает числовую величину $f_q, q \in K$:

$$\text{in relative units of } \lambda_k(X^o) \leq \lambda_q(X) \leq \lambda_q(X_q^*), k \in K, \quad (48)$$

Для выбранной величины критерия f_q необходимо определить вектор неизвестных X^{oo} , для этого проводим последующие вычисления.

Шаг 5. Расчет относительной оценки.

Для выбранной величины приоритетного критерия f_q вычисляется относительная оценка:

$\lambda_q = \frac{f_q - f_q^o}{f_q^* - f_q^o}$, которая при переходе от точки X^o к X_q^* , в соответствии с (43) лежит в пределах: $\lambda_q(X^o) \leq \lambda_q \leq \lambda_q(X_q^*) = 1$.

Шаг 6. Вычисление коэффициента линейной аппроксимации.

Предполагая линейный характер изменения критерия $f_q(X)$ в (48) и соответственно относительной оценки $\lambda_q(X)$, используя стандартные приемы линейной аппроксимации, вычислим коэффициент пропорциональности ρ между $\lambda_q(X^o), \lambda_q$:

$$\rho = \frac{\lambda_q - \lambda_q(X^o)}{\lambda_q^* - \lambda_q^o}, q \in K.$$

Шаг 7. Вычисление координат приоритетного критерия с величиной f_q .

В соответствии с (44) координаты точки приоритетного критерия X_q лежат в следующих пределах: $X^o \leq X_q \leq X_q^*, q \in K$

Предполагая линейный характер изменения вектора $X_q = \{x_1^q, \dots, x_N^q\}$ определим координаты точки приоритетного критерия с величиной f_q с относительной оценкой (45):

$$\begin{aligned} X_q &= \{x_1^q = x_1^o + \rho(x_q^*(1) - x_1^o), \dots, \\ x_N^q &= x_N^o + \rho(x_q^*(N) - x_N^o)\}, \end{aligned} \quad (49)$$

где $X^o = \{x_1^o, \dots, x_N^o\}, X_q^* = \{x_q^*(1), \dots, x_q^*(N)\}$.

Шаг 8. Вычисление основных показателей точки x^q .



Для полученной точки x^q (49), вычислим:

все критерии в натуральных единицах: $F^q = \{f_k(x^q), k = \overline{1, K}\}$;

все относительные оценки критериев:

$$\lambda^q = \{\lambda_k^q, k = \overline{1, K}\}, \lambda_k^q(x^q) = \frac{f_k(x^q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}; \quad (50)$$

вектор приоритетов: $P^q = \{p_k^q = \frac{\lambda_k^q(x^q)}{\lambda_k(x^q)}, k = \overline{1, K}\}$;

максимальную относительную оценку: $\lambda^{oq} = \min(p_k^q \lambda_k(x^q), k = \overline{1, K})$.

Аналогично (50) может быть рассчитана любая точка из множества Парето: $X_t^o = \{\lambda_t^o, X_t^o\} \in S^o$.

Анализ результатов. Рассчитанная величина критерия $f_q(X_t^o)$, $q \in K$ обычно не равна заданной Δf_q . Ошибка выбора $\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q|$ определяется ошибкой линейной аппроксимации. Результаты исследования симметрии в ВЗМП с заданным приоритетом аналогичны, как и для ВЗМП с равнозначными критериями, но центр симметрии смещен в сторону приоритетного критерия.

2.3.5. Теоретический анализ максиминной задачи, Сравнение λ -критерия с весовыми коэффициентами при решении векторной задачи

Теоретический анализ максиминной задачи: по своей структуре максиминная задача (15, 36) внешне не отличается от аналогичной задачи, рассмотренной в ряде работ¹:

$$\lambda^o = \max_{X \in S} \min_{k \in K} \{w_k, \lambda_k(X)\}, X \in S, X \geq 0, \quad (\text{П. 1})$$

где $\lambda_k(X) = \frac{f_k(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}$ – относительная оценка (11) по k -му критерию, f_k^*, f_k^0 – оптимальное

и наихудшее соответственно значения k -го критерия, т.е. исследование осуществляется в относительных единицах $\lambda_k(X)$; w_k – весовые коэффициенты, удовлетворяющие обычным условиям $w_k > 0$, $w_1 + \dots + w_k = 1$ и выражающие предпочтение критериев. Предпочтение определяется тем, что предпочтительному (приоритетному) критерию присваивается больший вес.

Но внутренне задачи (36) и (П. 1) полностью отличаются друг от друга. Покажем это отличие на двух критериальной задачи максимизации:

$$f_1(X) \rightarrow \max, f_2(X) \rightarrow \max, \quad (\text{П. 2})$$

$$g(X) \leq b, X \geq 0, X = \{x_1, x_2\}, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \quad (\text{П. 3})$$

где множество допустимых точек S описанными ограничениями (П. 3) не пусто, $S \neq \emptyset$ и представляет собой компакт. Построим на основе векторной задачи (П. 2), (П. 3) максиминную задачу с нормализованными критериями:

$$\lambda^o = \max_{X \in S} \min_{k \in K} (\lambda_1(X), \lambda_2(X)), X \in S, X \geq 0,$$

где $\lambda_1(X), \lambda_2(X)$ – относительные оценки по первому и второму критериям, X_1^*, X_2^* точки оптимума, полученные при решении ВЗМП (П. 2), (П. 3) по первому и второму критериям соответственно. Максиминную задачу преобразуем в λ -задачу:

$$\lambda^o = \max_{X \in S} \lambda, \lambda - \lambda_1(X) \leq 0, \lambda - \lambda_2(X) \leq 0, X \in S, X \geq 0.$$

¹ Михайлевич В.С., Волкович В. Л. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. М.: Наука, 1979. 319 с.

Михайлевич В. С., Волкович В. Л., Коленов Г. В. Алгоритм согласования решений в распределенной системе взаимосвязанных задач с линейными моделями // Кибернетика. 1988. № 3. С. 1–8, 22.



Представим последние неравенства в виде равенств, добавив переменные x', x'' , и вычтем одно из них из другого: $\lambda_1(X) - x' = \lambda_2(X) - x''$. Дополнительные переменные x' и x'' для двухкритериальной задачи сбалансированы и в оптимальной точке равны нулю

(и это равенство подтверждает вышеприведенная теорема на этапе 2), в итоге

$$\lambda_1(X^0) = \lambda_2(X^0) \quad (\text{П. 4})$$

Поэтому алгоритм и называется “при равнозначных критериях”.

Рассмотрим, как изменится равенство (П. 4) при введении вектора приоритета и вектора весовых коэффициентов. Примем, что первый критерий имеет приоритет над вторым в 2 раза, тогда вектор приоритетов будет выглядеть следующим образом:

$P^1 = \{p_1^1 = 1, p_2^1 = 2\}$, а вектор весовых коэффициентов:

$$w = \{w_1 = 2/3, w_2 = 1/3\}, w_1 + w_2 = 1.$$

Тогда равенство (П. 4) с вектором приоритетов P^1 приобретёт следующий вид:

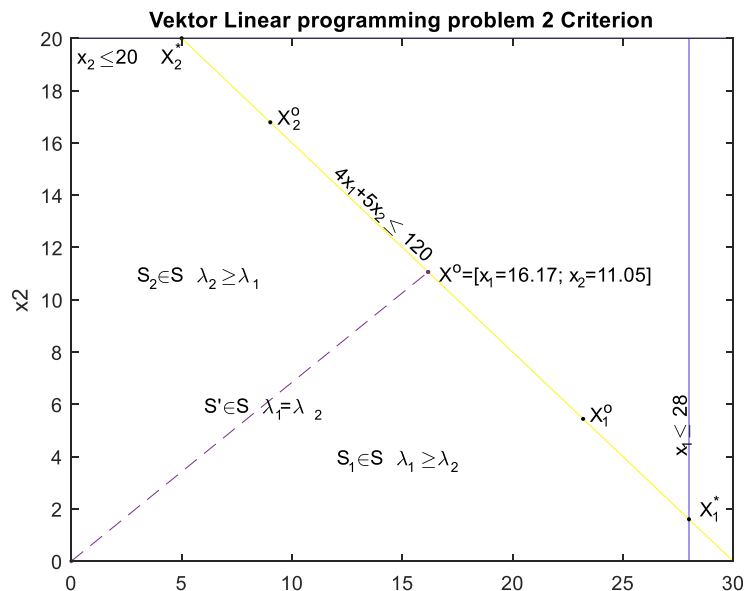
$$p_1^1 \lambda_1(X^0) = p_2^1 \lambda_2(X^0) \text{ или } \lambda_1(X^0) = 2\lambda_2(X^0), \quad (\text{П. 5})$$

а с вектором весовых коэффициентов – с точностью наоборот:

$$w_1 \lambda_1(X^0) = w_2 \lambda_2(X^0) \text{ или } 2\lambda_1(X^0)/3 = \lambda_2(X^0)/3 \text{ или } 2\lambda_1(X^0) = \lambda_2(X^0). \quad (\text{П. 6})$$

В результате решения ВЗМП (П. 2), (П. 3) с вектором приоритетов (П. 5) относительная оценка по первому критерию $\lambda_1(X^0)$ будет в 2 раза выше относительной оценки по второму критерию $\lambda_2(X^0)$, что и требовалось по условиям задачи.

При решении ВЗМП (П. 2), (П. 3) с вектором весовых коэффициентов (П. 6) относительная оценка по первому критерию $\lambda_1(X^0)$ будет в 2 раза меньше относительной оценки по второму критерию $\lambda_2(X^0)$, что полностью противоречит условиям задачи.



Покажем этот анализ на примере векторной задачи линейного программирования с двумя критериями.

Пример. Рассмотрим однородную векторную задачу линейного программирования – максимизации (ВЗЛП): $f_1(X) = 5x_1 + x_2 \rightarrow \max, f_2(X) = 20x_1 + 80x_2 \rightarrow \max,$ (П. 7)

$$5x_1 + 5x_2 \leq 125, x_1 \leq 28, x_2 \leq 20, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad (\text{П. 8})$$

Вид допустимого множества решений, определяемых ограничениями (П. 8), показан на рис. 1.



Решение векторной задачи линейного программирования (П. 7), (П. 8) в соответствии с алгоритмом решения ВЗЛП на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата представим в системе Matlab.

Для решения по каждому критерию используется функция `linprog`, которая решает задачу линейного программирования.

Рис. П.1. Решение ВЗЛП (П. 7)-(П. 8)

Шаг 1. Решение ВЗЛП (П. 7) -(П. 8) по каждому критерию отдельно. В результате расчета получим точки оптимума, X_k^* и f_k^* , $k = \overline{1,2}$, показанные на рис. П.1:

$$X_1^* = \{x_1 = 28, x_2 = 1.6\}, f_1^* = f_1(X_1^*) = 141.6;$$

$$X_2^* = \{x_1 = 5, x_2 = 20\}, f_2^* = f_2(X_2^*) = 2500.$$

Шаг 2. Не выполняется. Для ВЗЛП с нестрогими ограничениями наихудшие значения критериев $f_1^0 = f_2^0 = 0$. Нормализация примет вид $\lambda_k(X) = f_k(X)/f_k^*$, $k = \overline{1,2}$.

Шаг 3. Выполняется анализ критериев, для чего в оптимальных точках X_1^* , X_2^* определяются матрицы целевых функций и относительных оценок

$$F(X^*) = \begin{vmatrix} 141.6 & 752.0 \\ 45.0 & 2500 \end{vmatrix}, \lambda(X^*) = \begin{vmatrix} 1.0 & 0.3008 \\ 0.0450 & 1.0 \end{vmatrix}.$$

Шаг 4. Строится λ -задача:

$$\lambda^0 = \max \lambda,$$

$$\lambda - (5x_1 + 1x_2)/141.6 \leq 0, \lambda - (20x_1 + 80x_2)/2500 \leq 0, \quad (\text{П. 9})$$

$$x_1 + 5x_2 \leq 125, x_1 \leq 28, x_2 \leq 20, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

которая решается обращением к функции `linprog`. Результаты:

оптимальные значения переменных $\lambda^0 = \{\lambda = 0.6547, x_1 = 16.3585, x_2 = 10.9132\}$;

оптимальное значение целевой функции: $\lambda^0 = 0.6547$. Получившееся $\{\lambda_1(X^0), \lambda_2(X^0)\}$, а также точки оптимума X^0 и λ^0 на их пересечении, представлены на рис. 2.

Выполним проверку: $f_1(X^0) = 92.7$, $\lambda_1(X^0) = 0.6547$; $f_2(X^0) = 1636.8$, $\lambda_2(X^0) = 0.6547$, т. е. $\lambda^0 \leq \lambda_k(X^0)$, $k = \overline{1,2}$. Эти результаты показывают, что в точке X^0 оба критерия в относительных единицах достигли уровня $\lambda^0 = 0.6547$ от своих оптимальных величин. Любое увеличение одного из критериев выше этого уровня приводит к уменьшению другого критерия, т.е. точка X^0 оптимальна по Парето (рис. П.2).

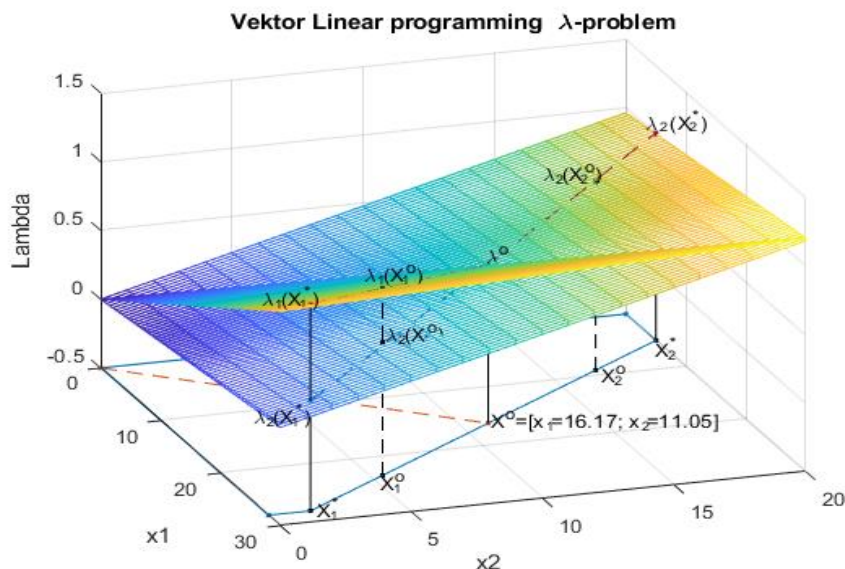


Рисунок П.2. Решение ВЗЛП (П. 7), (П. 8) с приоритетом первого критерия

Решим ВЗЛП (П. 7) и соответственно λ -задачу (П. 9) с заданным вектором приоритетов:

$P^1 = \{p_1^1 = 1, p_2^1 = 2\}$ и вектором весовых коэффициентов:

$w = \{w_1 = 2/3, w_2 = 1/3\}$.

В этом случае λ -задача примет вид:

$$\begin{aligned} \lambda^0 &= \max \lambda, \\ \lambda - p_1^1(5x_1 + 1x_2)/f_1^* &\leq 0, \lambda - p_2^1(20x_1 + 80x_2)/f_2^* \leq 0, \\ x_1 + 5x_2 &\leq 125, x_1 \leq 28, x_2 \leq 20, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{aligned} \quad (\text{П. 9})$$

Для данной задачи при переходе от точки X^0 , полученной при равнозначных критериях λ -задачи (П. 9), к точке оптимума X_1^* , полученной при решении по первому критерию, приоритет первого критерия лежит в пределах:

$$p_1^1(X) \leq p_2^1 \leq p_2^1(X^0). \quad (\text{П. 11})$$

Понятие приоритета критерия вытекает из аксиоматики, которая показывает, что допустимое множество точек S , в том числе множество точек, оптимальных по Парето, S^0 , лежащее между точками X_1^* и X_2^* , подразделяется на три подмножества точек:

подмножества S_1 и S_1^0 являются областью приоритета первого критерия над вторым (характеризуется тем $\lambda_1(X) \geq \lambda_2(X)$, $\forall X \in S_1^0 \subset S_1 \subset S$), в примере S_1^0 лежит между точками X_1^* и X^0 ;

подмножества S_2 и S_2^0 являются областью приоритета второго критерия над первым $\lambda_2(X) \geq \lambda_1(X)$, $\forall X \in S_2^0 \subset S_2 \subset S$, в примере S_2^0 лежит между точками X_2^* и X^0 ;

подмножество точек $S' \in S$, где критерии равнозначны $\lambda_1(X) = \lambda_2(X)$, $\forall X \in S' \subset S$.

Подмножеству S' принадлежит точка X^0 , в которой λ^0 – максимальный уровень, причем $\lambda^0 = \lambda_1(X^0) = \lambda_2(X^0)$ в соответствии с теоремой. X^0 также принадлежит и множеству точек, оптимальных по Парето, S^0 (рис. П.1, П.2).

В задаче (П. 7) неравенства (П. 11) примут вид $p_1^1(X_1^*) = 3.3245 \leq p_2^1 \leq p_2^1(X^0)$, из него выбирается p_2^1 , который вводится в λ -задачу (П. 10).

В результате решения λ -задачи (П. 10) с заданным вектором приоритетов получим:

точку оптимума $X_1^0 = \{\lambda_1 = 0.8694, x_1 = 23.5959, x_2 = 5.1233\}$ Рис. П.2:

оптимальное значение целевой функции: $\lambda^0 = 0.8694$.

Выполним проверку: $f_1(X^0) = 123.1$, $\lambda_1(X_1^0) = 0.8694$; $f_2(X_1^0) = 1086.7$, $\lambda_2(X_1^0) = 0.4347$, т.е. $\lambda^0 \leq \lambda_1(X_1^0) = 2\lambda_2(X_1^0) = 0.8694$.

Эти результаты показывают, что в точке оптимума X_1^0 , относительная оценка $\lambda_1(X_1^0)$ в 2 раза больше относительной оценки $\lambda_2(X_1^0)$. Это соответствует условиям задачи: о приоритете первого критерия над вторым, при этом плоскость, определяемая функцией $2\lambda_2(X)$ в области Парето в точке X_1^0 , достигла уровня $\lambda^0 = 0.8694 = 2\lambda_2(X_1^0)$.

В результате решения λ -задачи (П. 10) с заданным вектором весовых коэффициентов получим: точку оптимума $X_2^0 = \{\lambda_1 = 0.2922, x_1 = 9.0615, x_2 = 16.7508\}$ (Рис. П.1, П.2); оптимальное значение целевой функции: $\lambda^0 = 0.2922$.

Выполним проверку: $f_1(X_2^0) = 62.1$, $\lambda_1(X_2^0) = 0.4383$; $f_2(X_2^0) = 2191.3$, $\lambda_2(X_2^0) = 0.8765$, т.е. $\lambda^0 \leq 2\lambda_1(X_2^0)/3 = \lambda_2(X_2^0)/3 = 0.2922$.

Эти результаты показывают, что в точке оптимума X_2^0 , относительная оценка $\lambda_1(X_2^0)$ в 2 раза меньше относительной оценки $\lambda_2(X_2^0)$, что полностью противоречит исходному заданию. Таким образом, метод, основанный на нормализации критериев и принципе гарантированного результата, дает точные ответы на поставленные условия ВЗМП.

Анализ результатов решения. (Дадим два пояснения).

1. Впервые в отечественной и зарубежной практике построены аксиомы 1, 2 и 2а, которые позволили представить в векторной (многокритериальной) проблеме (1)–(4) (и частности в задаче П.7-П.8) допустимое множество точек S , включающее:

Во-первых, подмножество точек, оптимальных по Парето, $S^o \subset S$, которое лежит между точками оптимума $X_k^o, k = \overline{1, K}$. (В нашем примере $X_k^o, k = \overline{1, 2} - X_1^*, X_2^*$).

Во-вторых, одно подмножество точек $S' \subset S$, где критерии эквивалентны: подмножество точек S' , пересекаясь с подмножеством точек S^o , выделяет подмножество точек, оптимальных по Парето, в подмножество с эквивалентными критериями $S^{oo} = S' \cap S^o$, которое, как это показано далее (и в нашем примере X^o), состоит из одной точки $X^o \in S$, т.е.

$$X^o = S^{oo} = S' \cap S^o, S' \in S, S^o \subset S.$$

В-третьих, создано « K » подмножеств точек, где у каждого критерия $q = \overline{1, K}$ имеется приоритет над другими критериями $k = \overline{1, K}, q \neq k$. В итоге, выполнено разделение:

1) множества всех допустимых точек S , на подмножества $S_q \subset S, q = \overline{1, K}$; В нашем примере: область точек, лежащая между $X_1^* - 0 - X^o$ является областью приоритета первого критерия $S_{q=1} \subset S$; область точек, лежащая между $X_2^* - 0 - X^o$ является областью приоритета второго критерия $S_{q=2} \subset S$;

2) разделение подмножества точек, оптимальных по Парето, $S^o \subset S$, на подмножества $S_q^o \subset S_q \subset S, q = \overline{1, K}$. Отсюда верны следующие соотношения:

$$S' \cup (\cup_{q \in K} S_q^o) \equiv S^o, S_q^o \subset S^o \subset S, q = \overline{1, K}.$$

В нашем примере: область точек, лежащая между $X_1^* - X^o$ является областью приоритета первого критерия $S_{q=1}^o \subset S^o \subset S$; область точек, лежащая между $X_2^* - X^o$ является областью приоритета второго критерия $S_{q=2}^o \subset S^o \subset S$;

2. Мы заметим, что подмножество точек S_q^o , с одной стороны, включено в область (подмножество точек), имеющих приоритет критерия $q \in K$ над другими критериями: $S_q^o \subset S_q \subset S$, и с другой стороны, на подмножество точек, оптимальны по Парето: $S_q^o \subset S^o \subset S$.

Аксиома 2 и числовое выражение приоритета критерия (Определение 5) позволяет определять каждую допустимую точку $X \in S$ (посредством вектора приоритетов:

$$P^q(X) = \{p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}, k = \overline{1, K}\}, \text{ формироваться и выбирать: подмножество точек по}$$

приоритетному критерию S_q , который включен в множество точек $S, \forall q \in K X \in S_q \subset S$, (такое подмножество точек может использоваться в проблемах кластеризации, но это вне статьи);

подмножество точек по приоритетному критерию S_q^o , который включен в ряд точек S^o , оптимальных по Парето, $\forall q \in K, X \in S_q^o \subset S^o$.

Множество допустимых точек $X \in S$ →	Подмножества точек оптимума по Парето, $X \in S^o \subset S$ →	Подмножество точек, оптимума по Pareto $X \in S_q^o \subset S^o \subset S$ →	Отдельная точка, $\forall X \in S$ $X \in S_q^o \subset S^o \subset S$
---	---	---	---

Это самый важный результат, который позволит вывести принцип оптимальности и построить методы выбора любой точки из множества точек, оптимальных по Парето.



2.4. Прикладная многомерная математика: Векторная задача нелинейного программирования – модель развития инженерных систем.

В этом разделе мы рассматриваем отдельную задачу многомерной математики: векторную задачу нелинейного программирования. Математическое и программное обеспечение решения векторной задачи нелинейного программирования, алгоритмы решения которой при равнозначных критериях представлен в разделе 3 и при заданном приоритете критерия в разделе 4, [20, 22, 43, 45].

2.4.1. Векторная задача нелинейного программирования (ВЗНП)

Векторная задача нелинейного программирования (ВЗНП) – это стандартная задача математического программирования, имеющая некоторое множество критериев, которые в совокупности представляют вектор критериев. ВЗНП подразделяются на однородные и неоднородные ВЗНП. В соответствии с этими определениями представим векторную задачу нелинейного программирования с неоднородными критериями.

$$Opt F(X) = \{ \max F_1(X) = \{ \max f_k(X) = c_{0k} + c_{1k}x_1 + \dots + c_{N+1,k}x_1x_2 + \dots + c_{n1,k}x_1^2 + \dots + c_{nnk}x_n^2, k = \overline{1, K_1}, \quad (51)$$

$$\min F_2(X) = \{ \min f_k(X) = c_{0k} + c_{1k}x_1 + \dots + c_{N+1,k}x_1x_2 + \dots + c_{n1,k}x_1^2 + \dots + c_{nnk}x_n^2, k = \overline{1, K_2} \}, \quad (52)$$

$$a_{0i} + a_{1i}x_1 + \dots + a_{N+1,i}x_1x_2 + \dots + a_{n1,i}x_1^2 + \dots + a_{nni}x_n^2 \leq b_i, i = \overline{1, M}, \quad (53)$$

$$\sum_{j=1}^N c_j^k x_j(t) \geq b_k(t), k \in K, \quad 0 \leq x_j(t) \leq u_j, j = \overline{1, N}, \quad (54)$$

где $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ – вектор переменных, т.е. это вектор из N -мерного евклидова пространства R^N , (обозначение $j = \overline{1, N}$ эквивалентно $j = (1, \dots, N)$);

$F(X)$ - вектор-функция (векторный критерий), имеющая K – компонент-функций. Функция представляет квадратичный полином.

Множество критериев (полиномов) K состоит из подмножества K_1 компонент максимизации и подмножества K_2 минимизации: $K = K_1 \cup K_2$, для оценки совокупности критериев вводится обозначение операция « opt », которое включает в себя $\max$ и $\min$;

$F_1(X) = \{ \max f_k(X), k = \overline{1, K_1} \}$ – это векторный критерий (51), каждая компонента которого максимизируется, K_1 – число критериев, а $K_1 \equiv \overline{1, K_1}$ – множество критериев максимизации (задача (51), (53)-(54) представляют собой ВЗНП с однородными критериями максимизации);

$F_2(X) = \{ \min f_k(X), k = \overline{1, K_2} \}$ – векторный критерий, каждая компонента которого минимизируется, $K_2 \equiv \overline{1, K_2}$ – множество критериев минимизации, K_2 – число критериев, (задача (52), (53)-(54) это ВЗНП с однородными критериями минимизации):

$$K_1 \cup K_2 = K, K_1 \subset K, K_2 \subset K.$$

(53) – стандартные нелинейные ограничения (в виде полиномов).

(54) – ограничения, накладываемые на критерии.

$S = \{X \in R^n | G(X) \leq 0, X^{\min} \leq X \leq X^{\max}\} \neq \emptyset$ — это допустимое множество точек, задающиеся стандартными ограничениями (53)-(54) и тривиальными ограничениями $0 \leq x_j(t) \leq u_j, j = \overline{1, N}$. Предполагаем, что допустимое множество точек не пусто и представляет собой компакт. Векторная функция (критерий) минимизации $F_2(X)$ может быть преобразован в векторную функцию (критерий) максимизации умножением каждой компоненты $F_2(X)$ на минус единицу. Векторный критерий $F_2(X)$ введен в ВЗНП (51)-(54) для того, чтобы показать, что в задаче имеется два подмножества критериев K_1, K_2 с принципиально различными направлениями оптимизации. Векторная задача нелинейного программирования (51)-(54)



может рассматриваться как K - мерная задача оптимизации, где размерность критериев $K = K_1 \cup K_2$, с множеством параметров N .

2.4.2. Структура программного обеспечения решения векторной задачи нелинейного программирования

Программное обеспечение решения векторной задачи нелинейного программирования (51)-(54) при равнозначных критериях реализовано на основе алгоритма решения ВЗНП, изложенного в разделе 3 и использования программы FMINCON(...), представленной в системе MATLAB. При использовании программы FMINCON(...) необходимо разработать две подпрограммы – функции: Первая функция включает два блока: первый блок предназначен для оценки в точке X критерия $f_k(X) \forall k \in K$; второй блок для расчета первой производной в этой точке $\frac{df_k(X)}{dx} \forall k \in K$. Вторая функция включает те же два блока только для ограничений: для оценки в точке X ограничения $g_i(X) \forall i \in M$; второй блок для расчета первой производной в этой точке $\frac{dg_i(X)}{dx} \forall i \in M$. Программа FMINCON(...) используется на первом шаге алгоритма решения ВЗНП раздела 2.2.3 и на втором шаге этого алгоритма.

В дальнейшем Программа FMINCON(...) используется в соответствии с алгоритмом раздела 2.2.3 на 4 и 5 шаге, где решается λ -задача.

В целом при нелинейных ограничениях программное обеспечение решения ВЗНП включает: $K*2(1 \text{ шаг}) + K*2(2 \text{ шага}) + 2$ (λ -задача) обращений к функции FMINCON(...).

Так как критерии и ограничения ВЗНП индивидуальны, то для каждой ВЗНП пишется индивидуальное программное обеспечение, но по структуре аналогично представленному программному обеспечению. Для решения ВЗНП (51)-(54) разработанная программа в [33] представляет программу – шаблон для написания и решения других ВЗНП – математических моделей инженерных систем.

2.4.3. Математическая подготовка для решения векторной задачи нелинейного программирования

Пример 1. Дано. Рассматривается векторная задача нелинейного (выпуклого) программирования с четырьмя однородными критериями. В качестве критериев используем окружность, а на переменные наложены линейные ограничения.

$$\text{opt } F(X) = \{ \min F_2(X) = \min f_1(X) \equiv (x_1 - 80)^2 + (x_2 - 80)^2, \quad (55)$$

$$\min f_2(X) \equiv (x_1 - 80)^2 + (x_2 - 20)^2, \quad (56)$$

$$\min f_3(X) \equiv (x_1 - 20)^2 + (x_2 - 20)^2, \quad (57)$$

$$\min f_4(X) \equiv (x_1 - 20)^2 + (x_2 - 80)^2, \quad (58)$$

$$\text{при ограничениях } 0 \leq x_1 \leq 100, 0 \leq x_2 \leq 100, \quad (59)$$

Требуется. Найти неотрицательное решение x_1, x_2 в системе неравенств (59), при котором функции $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$ принимают минимальное значение.

Software for solving the vector problem of nonlinear programming (VPNP)

To solve the vector problem of nonlinear programming - a model of an engineering system, a program has been developed in the MATLAB system, which implements an algorithm for solving VPNP with equivalent criteria. The following is the result of the VPNP decision obtained by the program.

Recording the program in MATLAB format

```
% Программа "Решение векторной задачи нелинейного программирования":  
function [x,f] = VPNP_2_4Krit_100(x)  
% Автор: Машунин Юрий Константинович (Mashunin Yu. K.)  
% Алгоритм и программа предназначена для использования в образовании  
и научных  
% исследованиях, для коммерческого использования обращаться:  
Mashunin@mail.ru  
% Algorithm VPNP: 4Kritery + L-zadaha  
%[X,Fval,EXITFLAG,OUTPUT,LAMBDA,GRAD,HESSIAN]=  
%                               FMINCON(FUN,Xo,A,b,Aeq,beq,  
lb,ub,nonlcon,options,P1,P2,...)  
disp('*** Блок Исходных данных. ВЗНП:***')  
disp('opt F(X)={max F1(X)={min f1=(x1-80).^2+(x2-80).^2; '  
disp('                min f2=(x1-80).^2+(x2-20).^2; '  
disp('                min f3=(x1-20).^2+(x2-20).^2; '  
disp('                min f4=(x1-20).^2+(x2-80).^2; '  
disp('                0<=x1<=100, 0<=x2<=100 ')  
lb=[0. 0.];  
ub=[100. 100.]; Xo=[0. 0.];  
options=optimset('LargeScale','off');  
options=optimset(options,'GradObj','on','GradConst','off');  
A=[1 0;  
    0 1];  
b=[100 100];  
Aeq=[]; beq=[];  
XoK1max=[0. 0.];  
disp('*** Шаг 1. Решение по каждому критерию (наилучшее) ***') %  
[x1max,f1max]=  
fmincon('VPNP_2_Krit1max',XoK1max,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)  
[f1X1max] = VPNP_2_Krit1min(x1max)  
[f2X1max] = VPNP_2_Krit2min(x1max)  
[f3X1max] = VPNP_2_Krit3min(x1max)  
[f4X1max] = VPNP_2_Krit4min(x1max)  
XoK2max=[0. 0.];  
[x2max,f2max]=  
fmincon('VPNP_2_Krit2max',XoK2max,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)  
[f1X2max] = VPNP_2_Krit1min(x2max)  
[f2X2max] = VPNP_2_Krit2min(x2max)  
[f3X2max] = VPNP_2_Krit3min(x2max)  
[f4X2max] = VPNP_2_Krit4min(x2max)  
XoK3max=[0. 0.];  
[x3max,f3max]=  
fmincon('VPNP_2_Krit3max',XoK3max,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
```



```
[f1X3max] = VPNP_2_Krit1min(x3max)
[f2X3max] = VPNP_2_Krit2min(x3max)
[f3X3max] = VPNP_2_Krit3min(x3max)
[f4X3max] = VPNP_2_Krit4min(x3max)
XoK4max=[0. 0.];
[x4max,f4max]=
fmincon('VPNP_2_Krit4max',XoK4max,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X4max] = VPNP_2_Krit1min(x4max)
[f2X4max] = VPNP_2_Krit2min(x4max)
[f3X4max] = VPNP_2_Krit3min(x4max)
[f4X4max] = VPNP_2_Krit4min(x4max)
disp('*** Шаг 2. Решение по каждому критерию (наихудшее) ***')%
XoK1min=[0. 0.];
[x1min,f1min]=
fmincon('VPNP_2_Krit1min',XoK1min,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X1min] = VPNP_2_Krit1min(x1min)
[f2X1min] = VPNP_2_Krit2min(x1min)
[f3X1min] = VPNP_2_Krit3min(x1min)
[f4X1min] = VPNP_2_Krit4min(x1min)
[x2min,f2min] =
fmincon('VPNP_2_Krit2min',Xo,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X2min] = VPNP_2_Krit1min(x2min)
[f2X2min] = VPNP_2_Krit2min(x2min)
[f3X2min] = VPNP_2_Krit3min(x2min)
[f4X2min] = VPNP_2_Krit4min(x2min)
[x3min,f3min] =
fmincon('VPNP_2_Krit3min',Xo,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X3min] = VPNP_2_Krit1min(x3min)
[f2X3min] = VPNP_2_Krit2min(x3min)
[f3X3min] = VPNP_2_Krit3min(x3min)
[f4X3min] = VPNP_2_Krit4min(x3min)
[x4min,f4min] =
fmincon('VPNP_2_Krit4min',Xo,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X4min] = VPNP_2_Krit1min(x4min)
[f2X4min] = VPNP_2_Krit2min(x4min)
[f3X4min] = VPNP_2_Krit3min(x4min)
[f4X4min] = VPNP_2_Krit4min(x4min)
disp('*** Шаг 3. Системный анализ результатов ***')%
disp('Оценка критериев в точках оптимума: X1min,X2min,X3min,X4min')%
F=[f1X1min f2X1min f3X1min f4X1min;
    f1X2min f2X2min f3X2min f4X2min;
    f1X3min f2X3min f3X3min f4X3min;
    f1X4min f2X4min f3X4min f4X4min]
d1=f1X1min-f1X1max
```



```
d2=f2X2min-f2X2max
d3=f3X3min-f3X3max
d4=f4X4min-f4X4max
disp('Оценка критериев в относительных единицах:
X1min,X2min,X3min,X4min')%
L=[(f1X1min-f1X1max)/d1 (f2X1min-f2X2max)/d2 (f3X1min-f3X3max)/d3
(f4X1min-f4X4max)/d4;
(f1X2min-f1X1max)/d1 (f2X2min-f2X2max)/d2 (f3X2min-f3X3max)/d3
(f4X2min-f4X4max)/d4;
(f1X3min-f1X1max)/d1 (f2X3min-f2X2max)/d2 (f3X3min-f3X3max)/d3
(f4X3min-f4X4max)/d4;
(f1X4min-f1X1max)/d1 (f2X4min-f2X2max)/d2 (f3X4min-f3X3max)/d3
(f4X4min-f4X4max)/d4]
disp('*** Шаг 4. Построение L-задачи ***')%
Ao=[1 0 0;
0 1 0];
bo=[100 100]; Aeq=[]; beq=[];
Xoo=[0 0 0]
lbo=[0. 0. 0.]
ubo=[100. 100. 1]
disp('*** Шаг 5. Решение L-задачи ***')%
[Xo,Lo]=fmincon('VPNP_2_L',Xoo,Ao,bo,Aeq,beq,lbo,ubo,'VPNP_2_LConst')
%,options)
disp('Оценка критериев в точке оптимума Xo')%
[f1Xo] = VPNP_2_Krit1min(Xo(1:2))
[f2Xo] = VPNP_2_Krit2min(Xo(1:2))
[f3Xo] = VPNP_2_Krit3min(Xo(1:2))
[f4Xo] = VPNP_2_Krit4min(Xo(1:2))
disp('Оценка критериев в точке оптимума Xo в относительных
единицах')%
L1Xo=(f1Xo+f1max)/d1
L2Xo=(f2Xo+f2max)/d2
L3Xo=(f3Xo+f3max)/d3
L4Xo=(f4Xo+f4max)/d4
% ****Конец*****
% [Программа "Расчет 1 критер. - max"] файл: VPNP_2_Krit1max
function [f,G] = VPNP_2_Krit1max(x)
f=-(x(1)-80).^2-(x(2)-80).^2; %Расчет функции - критерий 1
G=[-2*(x(1)-80), -2*(x(2)-80)];%Расчет 1 производной критерия 1
% [Программа "Расчет 1 критер. - min"] Файл: VPNP_2_Krit1min
function [f,G] = VPNP_2_Krit1min(x);
f=(x(1)-80).^2+(x(2)-80).^2;
G=[2*(x(1)-80); 2*(x(2)-80)];
% [Программа "Расчет 2 критер. - max"] Файл: VPNP_2_Krit2max
```



```
function [f,G] = VPNP_2_Krit2max(x);
f=-(x(1)-80).^2-(x(2)-20).^2;
G=[-2*(x(1)-80);    -2*(x(2)-20)];
% [Программа "Расчет критер. 2 - min"] Файл: VPNP_2_Krit2min
function [f,G] =VPNP_2_Krit2min(x);
f=(x(1)-80).^2+(x(2)-20).^2;
G=[2*(x(1)-80);    2*(x(2)-20)];
% [Программа "Расчет 3 критер. - max"] Файл: VPNP_2_Krit3max
function [f,G] = VPNP_2_Krit3max(x);
f=-(x(1)-20).^2-(x(2)-20).^2;
G=[-2*(x(1)-20);    -2*(x(2)-20)];
% [Программа "Расчет 3 критер. - min"] Файл: VPNP_2_Krit3min
function [f,G] = VPNP_2_Krit3min(x);
f=(x(1)-20).^2+(x(2)-20).^2;
G=[2*(x(1)-20);    2*(x(2)-20)];
% [Программа "Расчет 4 критер. - max"] Файл:VPNP_2_Krit4max
function [f,G] = VPNP_2_Krit4max(x);
f=-(x(1)-20).^2-(x(2)-80).^2;
G=[-2*(x(1)-20);    -2*(x(2)-80)];
% [Программа "Расчет 4 критер. - max"] Файл:VPNP_2_Krit4max
function [f,G] = VPNP_2_Krit4max(x);
f=-(x(1)-20).^2-(x(2)-80).^2;
G=[-2*(x(1)-20);    -2*(x(2)-80)];
%[Программа "Расчет критер. L-задачи"] файл: VPNP_2_L
function [f,G] = VPNP_2_L(x)
f=-x(3);
G=[0;    0;   -1];
% [Программа "Расчет ограничений L-задачи"] файл: VPNP_1_LConst
function [c,ceq,DC,DCEq]= VPNP_2_LConst(x)
d1=12800;d2=12800;d3=12800;d4=12800;
f1X1max=12800;f2X2max=12800;f3X3max=12800;f4X4max=12800;
c(1)=(x(1)-80).^2+(x(2)-80).^2/d1+x(3)-f1X1max/d1;
c(2)=(x(1)-80).^2+(x(2)-20).^2/d2+x(3)-f2X2max/d2;
c(3)=(x(1)-20).^2+(x(2)-20).^2/d3+x(3)-f3X3max/d3;
c(4)=(x(1)-20).^2+(x(2)-80).^2/d4+x(3)-f4X4max/d4;
G1=[2*(x(1)-80)/d1, 2*(x(1)-80)/d2, 2*(x(1)-20)/d3, 2*(x(1)-20)/d4;
    2*(x(2)-80)/d1, 2*(x(2)-20)/d2, 2*(x(2)-20)/d3, 2*(x(2)-80)/d4;
    1.0,                1.0,                1.0,                1.0];
ceq=[]; DCEq=[]; % *****Конец*****
% *****Конец*****
```



Решение векторной задачи нелинейного программирования.

Для решения задачи (55)-(59) по каждому критерию, а в дальнейшем и λ -задачи, используется система MATLAB (функция `fmincon(...)` - решение нелинейной задачи оптимизации) [23]. Решение представлено, как последовательность шагов.

Шаг 1. Решается векторная задача (55)-(59) на `max` по каждому критерию отдельно. Результаты решения ВЗМП (55)-(59) по каждому критерию:

- 1 критерий $X_1^* = \{x_1 = 0, x_2 = 0\}, f_1^* = f_1(X_1^*) = -12800$;
- 2 критерий $X_2^* = \{x_1 = 0, x_2 = 100\}, f_2^* = f_2(X_2^*) = -12800$;
- 3 критерий $X_3^* = \{x_1 = 100, x_2 = 100\}, f_3^* = f_3(X_3^*) = -12800$;
- 4 критерий $X_4^* = \{x_1 = 100, x_2 = 0\}, f_4^* = f_4(X_4^*) = -12800$;

Шаг 2. Решается векторная задача (55)-(59) на `min` по каждому критерию отдельно. Результаты решения ВЗМП (55)-(59) по каждому критерию: $X_1^0 = \{x_1 = 80, x_2 = 80\}, f_1^0 = f_1(X_1^0) = 0, \dots, X_4^0 = \{x_1 = 20, x_2 = 80\}, f_4^0 = f_4(X_4^0) = 0$. Рис. 1.

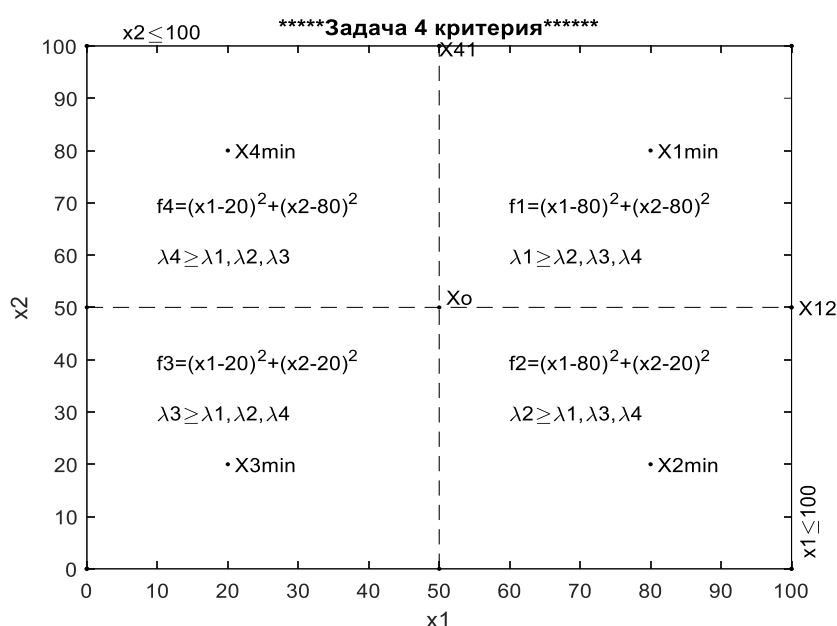


Рисунок 1. Ограничения ВЗМП (55)-(59), точки оптимума $X_1^0 = X1min, X_2^0 = X2min, X_3^0 = X3min, X_4^0 = 4min$ и относительные оценки.

Шаг 3. Выполняется системный анализ множества точек Парето.

В точках оптимума $X^* = \{X_k^*, k = \overline{1, K}\}$, определяются величины целевых функций $F(X^*)$ и относительных оценок $\lambda(X^*)$:

$$F(X^*) = \{f_q(X_k^*), q = \overline{1, K}, k = \overline{1, K}\}, \lambda(X^*) = \{\lambda_q(X_k^*), q = \overline{1, K}, k = \overline{1, K}\},$$

В системе MATLAB в точках оптимума: X1min, X2min, X3min, X4min вычисление этих

$$\text{функций будет следующим: } F(X^*) = \begin{bmatrix} f_1(X_1^*) & f_2(X_1^*) & f_3(X_1^*) & f_4(X_1^*) \\ f_1(X_2^*) & f_2(X_2^*) & f_3(X_2^*) & f_4(X_2^*) \\ f_1(X_3^*) & f_2(X_3^*) & f_3(X_3^*) & f_4(X_3^*) \\ f_1(X_4^*) & f_2(X_4^*) & f_3(X_4^*) & f_4(X_4^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3600 & 7200 & 3600 \\ 3600 & 0 & 3600 & 7200 \\ 7200 & 3600 & 0 & 3600 \\ 3600 & 7200 & 3600 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda(X^*) = \begin{bmatrix} \lambda_1(X_1^*) & \lambda_2(X_1^*) & \lambda_3(X_1^*) & \lambda_4(X_1^*) \\ \lambda_1(X_2^*) & \lambda_2(X_2^*) & \lambda_3(X_2^*) & \lambda_4(X_2^*) \\ \lambda_1(X_3^*) & \lambda_2(X_3^*) & \lambda_3(X_3^*) & \lambda_4(X_4^*) \\ \lambda_1(X_4^*) & \lambda_2(X_4^*) & \lambda_3(X_4^*) & \lambda_4(X_4^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.7188 & 0.4375 & 0.7188 \\ 0.7188 & 1.0 & 0.7188 & 0.4375 \\ 0.4375 & 0.7188 & 1.0 & 0.7188 \\ 0.7188 & 0.4375 & 0.7188 & 1.0 \end{bmatrix}.$$

В точках оптимума $X_k^*, k = \overline{1, K}$ все относительные оценки (нормализованные критерии) равны единице: $\lambda_k(X_k^*) = \frac{f_k(X_k^*) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0} = 1, k = \overline{1, K}, K = 4$.

В точках оптимума $X_k^0, k = \overline{1, K}$ все относительные оценки равны нулю:

$$\lambda_k(X_k^0) = \frac{f_k(X_k^0) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0} = 0, k = \overline{1, K}, K = 4. \text{ Отсюда } \forall k \in K, \forall X \in S, 0 \leq \lambda_k(X) \leq 1.$$

Шаг 4. Строится λ -задача.

$$\lambda^0 = \max_{X \in S} \lambda, \quad (60)$$

$$\text{При ограничениях: } \lambda - \frac{f_1(X) - f_1^0}{f_1^* - f_1^0} \leq 0, \lambda - \frac{f_2(X) - f_2^0}{f_2^* - f_2^0} \leq 0, \lambda - \frac{f_3(X) - f_3^0}{f_3^* - f_3^0} \leq 0, \lambda - \frac{f_4(X) - f_4^0}{f_4^* - f_4^0} \leq 0,$$

$$0 \leq x_1 \leq 100, 0 \leq x_2 \leq 100.$$

Шаг 5. Решение λ -задачи. Результаты решения λ -задачи:

$$X^0 = \{x_1 = 50.0, x_2 = 50.0, x_3 = 0.8594\}.$$

$X^0 = \{x_1 = 50.0, x_2 = 50.0, x_3 = 0.8594\}$ – точка оптимума, где

$x_3 = \lambda^0$; а x_1, x_2 соответствует x_1, x_2 задачи (41)-(45);

$\lambda^0 = 0.8594$ представляет оптимальное значение целевой функции.

Функции $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3(X), \lambda_4(X)$, а также точки оптимума X^0 и λ^0 , которые получены на пересечении, в трехмерной системе координат x_1, x_2, λ показаны на рис. 2.

На рис. 1, 2 видно, что область (множество точек), ограниченная функцией $f_1 = (x_1 - 80)^2 + (x_2 - 80)^2$ - характеризуется тем, что $\lambda_1(X) \geq \lambda_k(X), k = \overline{2, 4}, X \in S_1$, (на рис. 3 показано, как $\lambda_1 > \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$), т. е. область S_1 приоритетна по первому критерию. В этой области приоритет первого критерия относительно остальных всегда больше или равен единице: $p_k^1(X) = \lambda_1(X) / \lambda_k(X) \geq 1, \forall X \in S_1$.

Аналогично показаны множества точек приоритетных по соответствующему критерию, в совокупности они дают множество точек, оптимальных по Парето, S^0 , а оно (для данного примера) равно множеству допустимых точек: $S^0 = S_1^0 \cup S_2^0 \cup S_3^0 \cup S_4^0 \cup X^0 = S$.

2.4.4. Исследование результатов решения векторной задачи нелинейного программирования как математическую модель инженерной системы

Под понятием инженерной системы мы понимаем: технические системы, технологические процессы, структура материала. В качестве математической модели инженерной системы рассматривается векторная задача нелинейного (выпуклого) программирования с четырьмя однородными критериями (55)-(59) и соответствующая λ -задача (60). Функции в относительных единицах $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3(X), \lambda_4(X)$, а также точки оптимума X^0 и λ^0 , которые получены на пересечении, в трех мерной системе координат x_1, x_2, λ показаны на рис. 2. В ВЗМП (55)-(59) множество точек, лежащих в координатах (параметры) $0 \leq x_1 \leq 100, 0 \leq x_2 \leq 100$, является допустимым множеством параметров инженерной системы. В ВЗМП (55)-(59) на рис. 2 множество точек, лежащих в координатах $X1min = X2min - X3min - X4min$, является множеством Парето. Множество Парето характеризуется тем, что нельзя улучшить один из критериев, не ухудшая другие критерии.

Представим на рис. 2 точки оптимума по каждому критерию: $X_1^* = \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$, $X_2^* = \{x_1 = 0, x_2 = 100\}$, $X_3^* = \{x_1 = 100, x_2 = 100\}$, $X_4^* = \{x_1 = 100, x_2 = 0\}$.

Решение при равнозначных критериях в относительных единицах представлено λ -задачей.



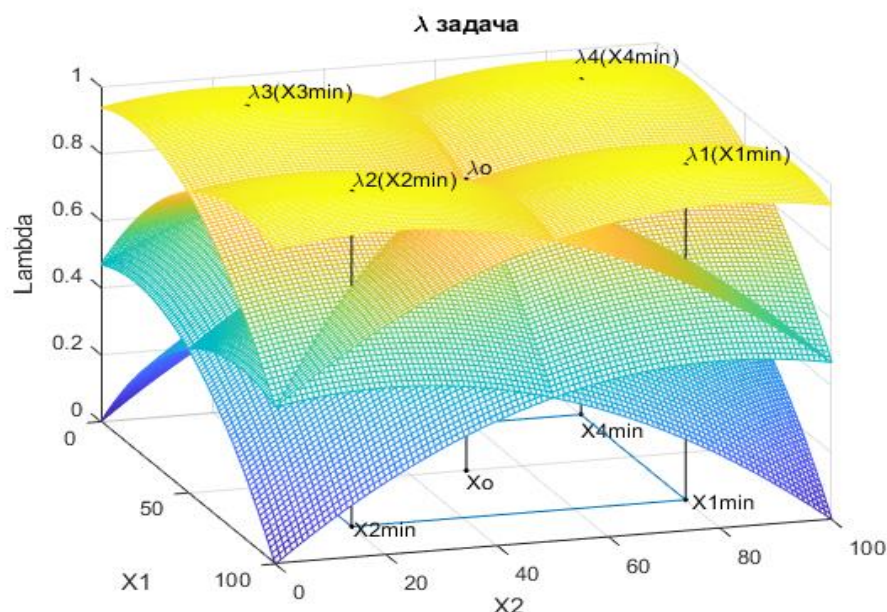


Рисунок 2. Результаты решения ВЗМП (55)-(59),(60):
Функции $\lambda_1(X), \dots, \lambda_4(X)$, точки оптимума X^0, λ^0 .

В результате решения при равнозначных критериях λ -задачи получили точку оптимума:
 $X^0 = \{x_1 = 50.0, x_2 = 50.0, x_3 = 0.8594\}$, где $x_3 = \lambda^0 = 0.8594$.

$\lambda^0 = 0.8594$ – это гарантированный результат в относительных единицах, который показывает, что улучшение по любому критерию приводит к ухудшению других критериев.

Относительные единицы легко переводятся в физические единицы по каждому критерию (характеристике инженерной системы).

На третьем шаге решения ВЗМП с равнозначными критериями в точках оптимума $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$ (на рис. 2: $X1min, X2min, X3min, X4min$) получены величины всех относительных оценок:

$$L(Y^*) = \begin{Bmatrix} L(X_1^*) \\ L(X_2^*) \\ L(X_3^*) \\ L(X_4^*) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0 & 0.7188 & 0.4375 & 0.7188 \\ 0.7188 & 1.0 & 0.7188 & 0.4375 \\ 0.4375 & 0.7188 & 1.0 & 0.7188 \\ 0.7188 & 0.4375 & 0.7188 & 1.0 \end{Bmatrix}.$$

Представим из рис. 2 величины относительных оценок в точке оптимума, например X_2^* :
 $L(X_2^*) = \{\lambda_1(X_2^*) = 0.7188, \lambda_2(X_2^*) = 1.0, \lambda_3(X_2^*) = 0.7188, \lambda_4(X_2^*) = 0.4375\}$.

Линейная функция, соединяющая точки $\lambda^0 = 0.8594$ и $\lambda_2(X_2^*) = 1$ в относительных единицах характеризует функцию $f_2(X)$ в относительных единицах в двухмерном измерении параметров x_1, x_2 . Эта линейная функция представляет геометрическую интерполяцию функций $f_2(X)$ в относительных единицах из N -мерного (в этом примере 2-мерного) в двухмерную систему координат. Предположим, что для проектировщика функция $f_2(X)$ является наиболее важной -приоритетной. При исследовании приоритетной функцию $f_2(X)$, мы можем задавать различные числовые значения $f_2(X)$ из соотношения: $f_2(X^0) \leq f_2(X) \leq f_2(X_2^*)$ и в итоге можем получать соответствующие параметры.

Таким же образом можно проводить исследование других критериев (функций инженерной системы): $f_1(X), f_3(X), f_4(X)$. Численное решение такого исследования представлено на четырехмерной системе.

Список литературы:

1. Pareto V. Cours d'Economie Politique. Lausanne: Rouge, 1896.
2. Математическая энциклопедия. Редакционная коллегия: И.М. Виноградов и другие. - М.: «Советская энциклопедия», 1977. – 1152 с.
3. Carlin S. Mathematical methods in a game theory, programming and economy. - М.: World, 1964, p. 837.
4. Zak Yu. A. Multistage decision-making processes in the problem of vector optimization // A.iT. 1976. No. 6, pp. 41-45.
5. Mikhailevich V. S., Volkovich V. L. Computational methods of research and design of complex systems. М.: Science, 1979, p. 319.
6. Машунин Ю.К. Методы и модели векторной оптимизации. М.: Наука, 1986. 141.
7. Машунин Ю. К. , Левицкий В. Л. Методы векторной оптимизации в анализе и синтезе технических систем: монография. - Владивосток: ДВГАЭУ, 1996. 131 с.
8. Машунин Ю.К. Решение композиционных и декомпозиционных задач синтеза сложных технических систем методами векторной оптимизации//Изв. РАН. ТиСУ. 1999. №3. С. 88-93.
- Yu. K. Mashunin, "Solving composition and decomposition problems of synthesis of complex engineering systems by vector_optimization methods," Comput. Syst. Sci. Int. 38, 421 (1999). (Scopus)
9. Машунин Ю.К., Машунин К.Ю. Моделирование технических систем в условиях неопределенности и принятие оптимального решения //Изв. РАН. ТиСУ. 2013. №4. С. 19-35.
- Mashunin K. Yu., and Mashunin Yu. K. Simulation Engineering Systems under Uncertainty and Optimal Descision Making. Journal of Comput. Syst. Sci. Int. Vol. 52. No. 4. 2013. 519-534. (Scopus)
10. Машунин Ю.К. Теория управления. Математический аппарат управления в экономических системах. – М.: Логос. 2013. 448 с. (Новая университетская библиотека)
11. Mashunin Yu.K. Mashunin K.Yu. Modeling of technical systems on the basis of vector optimization (1. At equivalent criteria) / International Journal of Engineering Sciences & Research Technology. 3(9): September, 2014. P. 84-96 .
12. Mashunin Yu.K. Mashunin K.Yu. Modeling of technical systems on the basis of vector optimization (2. with a Criterion Priority) / International Journal of Engineering Sciences & Research Technology. 3(10): October, 2014. P. 224-240.
13. Yu. K. Mashunin, K. Yu. Mashunin. Simulation and Optimal Decision Making the Design of Technical Systems // American Journal of Modeling and Optimization. 2015. Vol. 3. No 3, 56-67.
14. Yu. K. Mashunin, K. Yu. Mashunin. Simulation and Optimal Decision Making the Design of Technical Systems (2. The Decision with a Criterion Priority) // American Journal of Modeling and Optimization. 2016. Vol. 4. No 2, 51-66.
- 15] Yu. K. Mashunin, "Methodology of the Choice of Optimum Parameters of Technological Process on Experimental to Data."American Journal of Modeling and Optimization, vol. 7, no. 1 (2019): 20-28. doi: 10.12691/ajmo-7-1-4.
16. Yu. K. Mashunin. Vector optimization in the system optimal Decision Making the Design in economic and technical systems // International Journal of Emerging Trends & Technology in Computer Science. 2017. Vol. 7. No 1, 42-57.
17. Mashunin, Yu. K, Optimal designing in the interrelation Technical system – Materials (Theory) // Mathematical methods in engineering and technology: proceedings of international.



Science. Conf.: 12 tons 4 /under General Ed. A. A. Bolshakova. –SPb.: Publishing house of Polytechnical Institute. Un-t, 2018. P. 40-46.

18. Yu. K. Mashunin. Concept of Technical Systems Optimum Designing (Mathematical and Organizational Statement)// International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2017 Proceedings 8076394. Saint Petersburg. Russia/ WOS: 000414282400287 ISBN:978-1-5090-5648-4. (Web of science)

19. Yu. K. Mashunin. Optimum Designing of the Technical Systems Concept (Numerical Realization) // International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2017 Proceedings 8076395. Saint Petersburg. Russia/ WOS: 000414282400288 ISBN:978-1-5090-5648-4. (Web of science)

20. Mashunin K. Yu., and Mashunin Yu. K. Vector Optimization with Equivalent and Priority Criteria. Journal of Comput. Syst. Sci. Int., 2017, Vol. 56. No. 6. pp. 975-996. <https://rdcu.be/bhZ8i> (Scopus)

21. Mashunin Yu.K. Mathematical Apparatus of Optimal Decision-Making Based on Vector Optimization,” Appl. Syst. Innov. 2019, 2, 32. <https://doi.org/10.3390/asi2040032>

22. Mashunin Yu.K. Theory and Methods Vector Optimization (Volume One), Cambridge Scholars Publishing. 2020, 183 p. ISBN (10): 1-5275-4831-7

23. Торгашов А.Ю., Кривошеев В.П., Машунин Ю.К., Холланд Ч.Д. Расчет и многокритериальная оптимизация статических режимов массообменных процессов на примере абсорбции в производстве газоразделения // Изв. ВУЗов. Нефть и газ, 2001, №3, с. 82-86.

24. Кетков Ю. Л., Кетков А.Ю., Шульц М. М. МАТЛАБ 6.x.: программирование численных методов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. - 672 с.

25. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения: Пер. с англ./Под ред. И. Ф. Шахнова. - М.: Радио и связь, 1981. – 560 с.

26. Jahn Johannes. Vector Optimization: Theory, Applications, and Extensions. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York. 2010. 460 p.

27. Qamrul Hasan Ansari, Jen-Chih Yao. Recent Developments in Vector Optimization. Springer Heidelberg Dordrecht. London. New York. 2010. 550 p.

28. Nakayama Hirotaka, Yun Yeboon, Yoon Min. Sequential Approximate Multiobjective Optimization Using Computational Intelligence. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg . 2009. 197 p.

29. Shankar R. Decision Making in the Manufacturing Environment: Using Graft Theory and fuzzy Multiple Attribute Decision Making Methods. Springer; 2007. 373 p.

30. Cooke T., Lingard H., Blismas N. The development end evaluation of a decision support tool for health and safety in construction design // Engineering, Construction and Architectural Management. 2008. V. 15. №4. P. 336-351.

31. Walras L. 1874. Elements of Pure Economies, or the theory of social wealth, Lausanne.

32. Samuelson P. 1964. Economics. Part 1. -M: Progress.

33. Marshall A. 1993. Principles of economic science. Tom 2. -M: Progress, 145 p.

34. Coase, Ronald. The Institutional Structure of Production // The American Economic Review, vol.82, n°4, pp. 713-719, 1992. (Nobel Prize lecture) Gilbert, J., 1976. Economic theory and goals of the society. - M: Progress. - 230 p.

35. Saimone, G., 1995. Theory of decision making in economic theory and the behavioral Sciences. // In the book: The theory of the firm. St. Petersburg.



36. Seo, K.K., 2000. Managerial Economics: Text, Problems, and Short cases. Per. from English. - M: INFA-M. - 671 p.
37. Khan K. 2004. Controlling. - M: INFA-M. - 671 p.
38. Fayol A. (1992). General and industrial management. - M: Controlling.
39. Mashunin Yu. K., 2010. Theory and modeling of the market on the basis of vector optimization. - M: University book. - 352 p.
40. Mashunin, Yu. K., Mashunin, K., Yu. Numerical realization of innovative development of the industrial enterprise//Global challenges in economy and development of the industry (INDUSTRY-2016): proceedings of scientific – practical Konf. with foreign participation on March 21-23 2016/under the editorship of the Dr. of economic Sciences, prof. A. V. Babkin. – SPb.: Publishing house Politekhn. University, 2016. 455-484. (rus.).
41. Mashunin, Yu. K., 2016. Modeling and software implementation of innovative development of the industrial enterprise. St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Economics, no. 3(245), pp. 78-92. (rus)
42. Mashunin, Yu. K., Mashunin, K., Yu., 2017. Analysis of the organization of control, optimization and practice of innovative development of the industrial cluster, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Economics, 10(4), 187-197. DOI: 10.18721/JE. 10418
43. Mashunin, Yu. K., 2017. Management of the region economy. M: RuSciencе. - 344. (rus) ISBN 978-5-4365-1984-5
44. Mashunin Yu. K., K. Yu. Mashunin, Strategic and Innovative Development of the Cluster based on the digital economy, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Economics, 11 (4) (2018) 85—99. DOI: 10.18721/JE.11406
45. Mashunin Yu. K., 2019. Theory of management and the practice of making managerial decisions: textbook. - Moscow: RuSciencе. – 494 p. (rus) ISBN 978-5-4365-3088-8
46. Машунин Ю.К. Выбор оптимальных параметров сложных технических систем на базе многомерной математики // Математические методы в технологиях и технике. 2024. №12-2. С. 46-58.
47. Yu. K. Mashunin, “Methodology of the Choice of Optimum Parameters of Technological Process on Experimental to Data”. American Journal of Modeling and Optimization, vol. 7, no. 1 (2019): 20-28. doi: 10.12691/ajmo-7-1-4.
48. Машунин Ю.К. Оптимальный выбор параметров материала сложной структуры по множеству критериев // Математические методы в технологиях и технике. 2023. № 9. С. 25-35. DOI 10.52348/2712-8873_MMTT_2023_9_25
49. Mashunin Yu.K. Modeling, simulation, making optimal decision in engineering and production systems based on vector optimization: monograph / Yu.K. Mashunin. Moscow : RuScience, 2024. – 368 с. ISBN 978-5-466-08001-8.

