Баскаков Кирилл Денисович,
студент, ТвГТУ

Борисова Елена Владимировна,
д.п.н., к.т.н., профессор, ТвГТУ

ПРИМЕНЕНИЕ КРИВОЙ ДРАКОНА В ЗАДАЧЕ КОММИВОЯЖЁРА ПРИ РАЗВЕДКЕ ТОРФЯНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ

Аннотация. Рассмотрен алгоритм оптимизации маршрутов передвижения техники при разведке торфяников в условиях хаотичного расположения геоточек на основе снижения размерности пространства. Научная новизна состоит в использовании гибкого каркаса кривой Дракона с целью адаптации к естественным контурам месторождений. Вычислительный эксперимент показал вычислительную устойчивость алгоритма и повышение скорости его работы в 11,6 раза относительно традиционного метода «ближайшего соседа».

Ключевые слова: Рекурсивный алгоритм, снижение размерности, фрактал, гамильтонов цикл, вычислительный эксперимент.

Введение. Одной из значимых проблем в области теории алгоритмов является задача поиска оптимального маршрута. Её классическая формулировка, известная как задача коммивояжёра (ЗК), отличается простотой постановки и большой вычислительной сложностью в процессе получения решения. Суть задачи – нахождение кратчайшего или наименее затратного, замкнутого пути, который проходит через все заданные точки ровно по одному разу и возвращается в исходный пункт. При разведке торфяных месторождений инженерам приходится закладывать сотни оценочных скважин и точек зондирования по всей площади болотного массива. В классических методах конфигурация контрольных точек регламентируется нормативными геометрическими сетками с учетом морфологии залежи [1]. Пути обхода скважин напрямую влияют на ресурсосбережение и сохранность экосистемы.

Задача коммивояжёра относится к классу NP-трудных комбинаторных проблем [2]. С увеличением числа скважин количество возможных маршрутов растет по формуле перестановок $P_{n-1} = (n-1)!$, что делает невозможным применение методов полного перебора, так как возникает лавинообразный вычислительный всплеск. Кроме того, традиционный алгоритм «ближайшего соседа» [3], который используют в полевых программах, обладает недостатком финальных шагов. Он перестает искать сложные обходные варианты и выбирает самое очевидное решение, что приводит к лишним петлям на маршруте.

Для решения этой проблемы можно использовать фрактальные пространственно-заполняющие кривые. Они позволяют выполнить редукцию размерности пространства, то есть спроецировать двухмерные координаты на одну извилистую линию с сохранением пространственной близости точек. Математический базис такого сведения многомерных задач к одномерным заложил основатель Нижегородской школы глобальной оптимизации Р. Стронгин [4]. В основе лежит геометрия фракталов, изложенная Х. О. Пайтгеном [5]. В работах Дж. Бартольди и Л.Платцмана [6] математически доказано, что применение пространственно-заполняющих кривых позволяет строить субоптимальные маршруты ЗК за полиномиальное время $O\,(nlg\,(n))$.

При анализе научной литературы было обнаружено противоречие, заключающиеся в том, что большинство алгоритмов маршрутизации жестко привязаны к ортогональным сеткам в метриках Чебышева или Манхэттена. Однако точки бурения скважин на торфяниках распределены квазихаотично из-за естественных контуров рельефа местности. Данное несоответствие делает традиционные методы пространственного заполнения малоэффективными в реальных условиях. Для его устранения выбран фрактал «дракон Хартера – Хейтуэя», который возникает в результате рекурсивной процедуры, напоминающей многократное складывание полоски бумаги [4]. Построение базируется на пошаговом

процессе, где каждый новый уровень детализации увеличивает общее число элементов. Возможности кривой Дракона для обхода хаотичных геоточек ранее практически не исследовались. Способность этого фрактала заполнять плоскость без самопересечений обеспечивает потенциал создания адаптивных алгоритмов быстрой сортировки точек, что определило выбор темы исследования.

Гипотеза исследования: использование рекурсивных свойств кривой Дракона позволит разработать устойчивый алгоритм быстрой генерации субоптимальных путей гамильтонова цикла. Цель работы: математическое описание и экспериментальное тестирование фрактального алгоритма решения ЗК, адаптированного под специфику проектирования сетей скважин.

Для достижения поставленной цели решены исследовательские задачи.

1. Изучить нормативные требования и формализовать прикладную задачу оптимизации маршрутов бурения в виде математической модели на графах.

2. Разработать алгоритм координатной редукции пространственных данных для кривой Дракона, на основе рекурсивных итерационных правил детерминированных систем Линденмайера.

3. Провести вычислительный эксперимент (ВЭ), зафиксировать метрики быстродействия и геометрической длины траекторий при масштабировании размерности сети от малой к крупной, оценить эффективность преодоления проблем лавинообразного вычислительного всплеска.

Научная новизна заключается в использовании рекурсивного топологического каркаса кривой Дракона для динамической аппроксимации квазихаотичных структур.

Методы. Методологическую основу исследования составляет аппарат теории графов, комбинаторной оптимизации и фрактальной геометрии. Поиск оптимальной траектории перемещения буровых комплексов между геоточками формализуется на полном неориентированном графе $G = (V, E)$. Каждому ребру $(i, j) \in E$ соответствует весовой коэффициент C_{ij}, эквивалентный евклидову расстоянию между точками на плоскости. Целевая функция определена как классическая минимизация суммарной длины замкнутого маршрута при условии однократного посещения каждой вершины. Для редукции размерности пространства в линейное использованы рекурсивные свойства дискретной кривой Дракона. Процесс порождения этой пространственно-заполняющей линии описан в рамках детерминированных линейных систем Линденмайера над алфавитом грамматики $VL = \{F, +, -\}$, где F – вектор линейного перемещения, «+» – поворот на угол 90° против часовой стрелки, «-» – поворот на 90° по часовой стрелке. При аксиоме $\omega = F$ и правилах подстановки $(X \to X + YF +)$ *и* $(Y \to -FX - Y)$ каждая итерация m удваивает число сегментов кривой. Закон рекурсивного генерирования последовательности кривой Дракона, то есть направления излома Sm на шаге m, описан рекурсивной склейкой строк по правилу: $S_m = S_{m-1} \cdot 1 \cdot (S_{m-1}^R)^{-1}$, где множитель $(S_{m-1}^R)^{-1}$ это инвертированная и зеркально отраженная последовательность предыдущего шага. Общее число N элементарных звеньев фрактала подчиняется показательной зависимости $N = 2^m$. Хаусдорфова размерность объекта равная 2, что теоретически доказывает его способность непрерывной линией без самопересечений заполнять ограниченную двухмерную область. Сравнение эффективности разработанного алгоритма проведено в ходе ВЭ путем сопоставления итоговой длины траектории (L) и времени выполнения расчетов (t) с метриками классического алгоритма «ближайшего соседа».

Результаты. Для подтверждения выдвинутой гипотезы и реализации предложенных построений графа проведён ВЭ. На плоскости моделировалось хаотичное распределение геоточек в границах условного болотного массива, имитирующее реальное расположение разведочных скважин согласно нормативным требованиям. Постановка задачи формулируется на полном неориентированном графе $G = (V, E)$. С ростом числа точек n количество возможных вариантов траекторий растёт как $(n - 1)!$, что для 20 пунктов даёт порядка 10^{16} вариантов. До редукции размерности ЗК на торфяниках рассматривается полный граф, где каждый узел напрямую соединен со всеми остальными. ВЭ по подсчёту числа

сегментов N в зависимости от порядка итерации фрактала m подтвердил показательную зависимость, выявленную в теории. Получен ряд значений: для m = 0, зафиксирован 1 сегмент, для m = 1, 2 сегмента, для m = 2, уже 4, для m = 3, 8 сегментов и так далее. Результаты совпадают с теоретической кривой экспоненциального роста вида $N = 2^m$. На рисунке 1 показаны первые четыре стадии последовательного рекурсивного порождения базового каркаса кривой Дракона в соответствии с правилами детерминированной Л-системы Линденмайера [7].

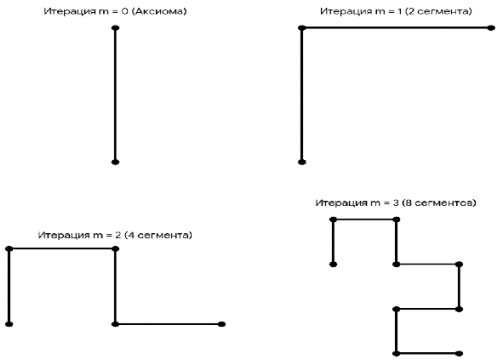

Рисунок 1. Этапы формирования кривой Дракона (итерации m=0 – 3)

Разработанный алгоритм состоит из четырёх последовательных этапов.

1. Генерация опорного каркаса фрактала выполнена на основе базовой Л-системы, где вычисляется упорядоченный массив вершин кривой Дракона высокого порядка m: $\Omega = \{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$. Порядковый индекс k элемента в массиве выступает его внутренней одномерной координатой.

2. Для каждой физической координаты $V_i = (x_i, y_i)$ находится ближайший узел сгенерированного фрактального каркаса по критерию минимизации евклидовой метрики:

$$k\,(V_i) = arg\,min\{1 \le k \le N\}\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2}.$$

3. Линейная фрактальная сортировка при которой исходное двумерное множество реальных точек V сортируется по возрастанию присвоенных им одномерных фрактальных индексов $k\,(V_i)$.

4. Согласно отсортированного списка точки соединяются в единый маршрут, а конечная вершина автоматически замыкается на стартовую, снижая общую вычислительную сложность до полиномиального значения $O\,(nlg\,(n))$. Формирование гамильтонова цикла завершено.

На рисунке 2 показана модельная реализация алгоритма, где дискретная фрактальная кривая последовательно проецируется на хаотично распределённые геоточки условного торфяного месторождения.

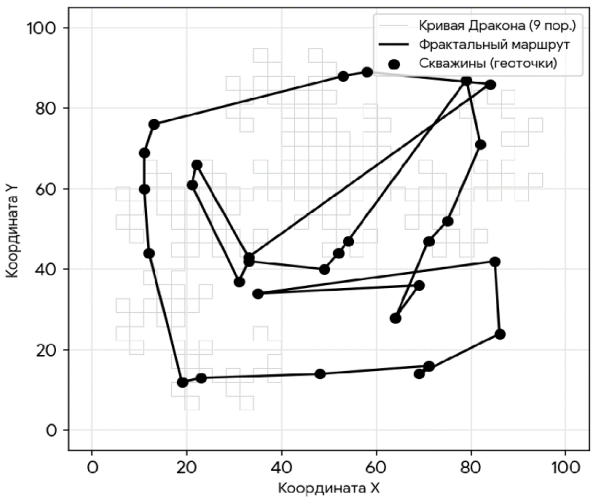

Рисунок 2. Прохождение кривой дракона через геоточки разведочной сети.

При построении дискретного маршрута в двумерной проекции возникают визуальные пересечения хорд, что не нарушает одномерную упорядоченность точек, гарантированной базовой траектории, то есть кривой Дракона. Сравнительный анализ эффективности разработанного фрактального алгоритма и классического метода «ближайшего соседа» по критериям итоговой длины траектории (L) и чистого времени вычислений (t) представлен в таблице 1.

Таблица 1

Результаты расчёта маршрутов и времени обхода скважин

Количество точек (\ (n\))	**Длина пути (Ближайший сосед)**	**Длина пути (Фрактальный метод)**	**Время расчёта (Ближайший сосед), сек.**	**Время расчёта (Фрактальный метод), сек.**
5	237,55	214,12	0,00045	0,00112
10	301,70	332,17	0,00036	0,00163
20	400,79	410,00	0,00131	0,00339
50	611,02	636,53	0,01215	0,01099
100	762,60	941,37	0,03332	0,01917
500	1666,00	2381,80	0,89906	0,07727

Анализ данных таблицы выявил ключевые закономерности в поведении алгоритмов. В изолированных тестах (n = 5) фрактальный метод за счёт глобальной структуры кривой Дракона формирует траекторию, которая на 9,8% короче траектории классического алгоритма. При малых размерностях сетки (n ≤ 20) оба метода демонстрируют сопоставимые результаты по геометрической эффективности. Алгоритм метода «ближайшего соседа» на завершающих шагах вынужден совершать перемещения к удалённым изолированным точкам, что приводит к появлению избыточных замыкающих рёбер. Фрактальный метод за счёт свойства сохранения пространственной близости при редукции размерности полностью нивелирует эту проблему. Основное преимущество алгоритма фрактальной проекции фиксируется при переходе к крупным сетям (n ≥ 100). В алгоритме «ближайшего соседа» квадратично увеличивается время расчёта (до 0,89906 сек. при n = 500). При максимальной экспериментальной размерности в 500 точек фрактальный подход выполняет расчёт за 0,07727 сек., обеспечивая выигрыш по времени более чем в 11,6 раза. На рисунке 4 представлены зависимости времени вычислений от размерности сети скважин. Штриховкой выделена область чистого выигрыша.

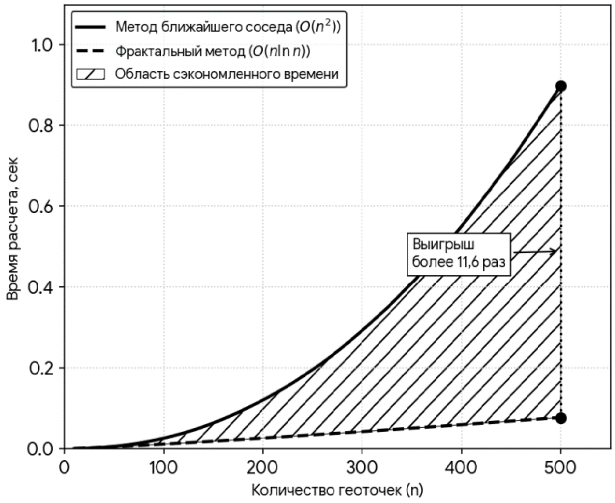

Рисунок 4. Визуализация вычислительного выигрыша фрактального метода.

Полученные закономерности подтверждают, что линейное приращение числа геоточек или порядка итерации приводит к лавинообразному увеличению пространства поиска. Наличие такого эффекта согласуется с исследовательской гипотезой. За счёт фундаментального свойства фрактала вершины, расположенные рядом на местности, остаются соседями и в одномерном массиве, что позволяет за кратчайшее время построить гамильтонов цикл без комбинаторного перебора.

Обсуждение. Интеграция методов фрактальной геометрии в прикладные задачи комбинаторной оптимизации открывает новые перспективы для автоматизации пространственного анализа в геологоразведке. Полученные в ходе ВЭ данные показали превосходство разработанного фрактального алгоритма над классическим методом «ближайшего соседа» по критерию быстродействия. Ключевым фактором успешного масштабирования является преодоление фундаментального математического ограничения, известного как лавинообразный вычислительный всплеск. Авторский подход обходит это ограничение за счет перевода координат плоскости в одномерное пространство, что сужает область поиска до квазилинейной оценки $O\ (nlgn)$. На рисунке 5 показаны теоретические и эмпирические графики роста количества вычислительных операций.

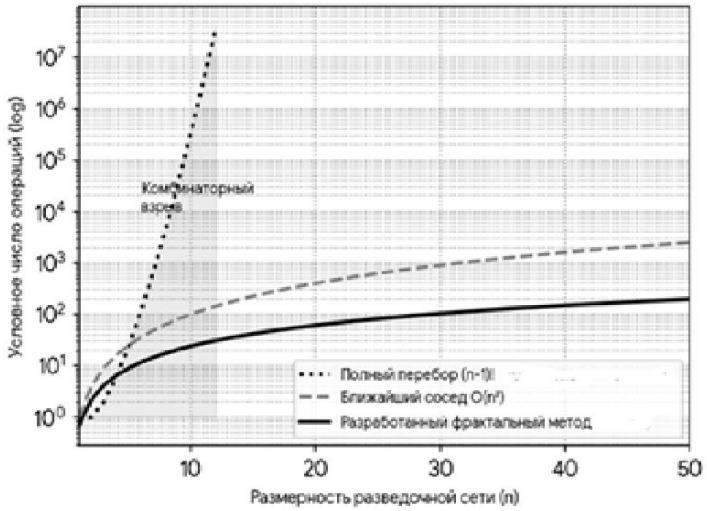

Рисунок 5. Сравнительные графики роста числа операций

В современную эпоху широкого внедрения технологий больших данных в торфяную отрасль интеллектуальные ГИС-платформы оперируют массивами информации, включающими облака точек лазерного сканирования местности «Лидар», данные мультиспектрального спутникового мониторинга и цифровые модели рельефа высокой плотности. В этих условиях классические нейросетевые модели, требующие значительных вычислительных мощностей и длительного этапа предварительного обучения, не всегда применимы.

Разработанный алгоритм на базе кривой Дракона выступает в качестве эффективного дополняющего инструмента. Аналогично тому, как глубокие нейронные сети сегодня обучают предсказывать веса графов для построения оптимальных заполняющих кривых на сложных изображениях [8], предложенный метод более быстрое линейное упорядочивание пространственных геоточек. Новые исследования подтверждают применимость пространственно-заполняющих кривых для масштабирования вычислений при обработке сверхбольших массивов данных [9].

Заключение. В ходе проведенного исследования подтверждена гипотеза об эффективности использования рекурсивных геометрических свойств кривой Дракона для оптимизации пространственных данных в разведке торфяных залежей. Разработанный адаптивный фрактальный алгоритм успешно реализовал редукцию размерности, что

позволило трансформировать NP-трудную задачу коммивояжёра на квазихаотичных сетках разведочных скважин в сублинейную последовательность. Экспериментальная верификация алгоритма выявила основные результаты:

1. Эффективность на малых выборках. При размерностях сети до 20 геоточек фрактальный обход обеспечил построение более сбалансированных траекторий, показав в изолированных тестах выигрыш по общей длине маршрута до 9,8% по сравнению с традиционными эвристиками.

2. Масштабируемость на крупных массивах. При переходе к плотным сетям из 500 разведочных точек время вычислений стабилизировалось на отметке 0,07727 секунды, что обеспечило абсолютное превосходство по быстродействию над методом «ближайшего соседа» более чем в 11,6 раза.

Практическая ценность работы заключается:

– в снижении избыточного пробега тяжелой техники по слабонесущим торфяным грунтам, что минимизирует антропогенную нагрузку на хрупкие болотные экосистемы;

– в сокращении сроков полевого этапа изысканий за счет оптимизации общей траектории перемещения персонала и оборудования;

– в автономности расчетов, так как низкая сложность $O\ (nlgn)$ позволяет выполнять их в реальном времени на маломощных микроконтроллерах роботизированных платформ, осуществляющих зондирование залежи.

Предложенный фрактальный подход успешно модернизирует традиционные эвристические методы комбинаторной оптимизации, обеспечивая баланс между математической строгостью моделей и реальными потребностями горно-разведочной отрасли

Список литературы:

1. Инструкция по разведке торфяных месторождений СССР / Министерство геологии СССР. – М.: Недра, 1983. – 192 с.

2. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982. – 416 с.

3. Стронгин Р. Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах – М.: Наука, Главная редакция физ.-матем. литературы, 1978. – 240 с.

4. Стронгин Р. Г., Баркалов К. А., Свистунов А. Н. Локальная многовариантная редукция размерности в задачах глобальной оптимизации // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2024. – Т. 64, № 4. – С. 582–597.

5. Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. – М.: Мир, 1993. – 176 с.

6. Bartholdi J. J., Platzman L. K. An $O\ (Nlg\ N)$ Heuristic for the Traveling Salesman Problem Based on Space-Filling Curves // Operations Research, 1988. – Vol. 36, No. 6. – P. 836–844.

7. Прусинкевич П., Линденмайер А. Алгоритмическая красота растений. – New York: Springer-Verlag, 1990. – 228 p.

8. Chen X. et al. Efficient Deep Space Filling Curve // Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision (ICCV)., 2023. – P. 4072–4081.

9. Space Filling Curves is All You Need: Communication-Avoiding Matrix Multiplication Made Simple / arXiv:2601.16294. – 2026