DOI 10.58351/2949-2041.2025.18.1.002
УДК 681.513

Машунин Юрий Константинович
Доктор экономических наук, к.т.н., профессор
Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия
ORCID id: 0000-0001-7071-8729
Mashunin Yu. K., Doctor of Economics,
Ph.D., Professor. Far Eastern Federal University, Russia, Vladivostok,
ORCID id: 0000-0001-7071-8729

МНОГОМЕРНАЯ МАТЕМАТИКА.
ВЕКТОРНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. ПРОГРАММА.
MULTIDIMENSIONAL MATHEMATICS.
VECTOR PROBLEM OF LINEAR PROGRAMMING. PROGRAM.

Аннотация. Цель данной работы - исследование, анализ, разработка теоретических основ и конструктивных методов многомерной математики. Для реализации данной цели проведен анализ развития современной математики (одно функциональной). Разработаны теоретические основы: аксиоматика, принципы оптимальности и методы решения многомерных (многофункциональных) систем. В рамках прикладных задач многомерной (многофункциональной) математики сформированы линейные и нелинейных векторные (много функциональные) задачи математического программирования (оптимизации). Представлено построение математических моделей локальных и сложных объектов, систем (экономических, инженерных) в виде задачи векторной оптимизации. Разработано программное обеспечение решения линейных, нелинейных векторных задач оптимизации. Показаны конструктивные методы решения многомерных (векторных) задач оптимизации при равнозначных критериях, при заданном приоритете критерия. Представлено программное обеспечение, которое показано на численных примерах экономических (линейных) задач - Векторная задача линейного программирования.

Abstract. The purpose of this work is to research, analyze, and develop theoretical foundations and constructive methods of multidimensional mathematics. To achieve this goal, an analysis of the development of modern mathematics (one functional) was carried out. Theoretical foundations have been developed: axiomatics, principles of optimality and methods for solving multidimensional (multifunctional) systems. Within the framework of applied problems of multidimensional (multifunctional) mathematics, linear and nonlinear vector (multifunctional). The construction of mathematical models of local and complex objects, systems (economic, engineering) in the form of a vector optimization problem is presented. Software for solving linear, nonlinear vector optimization problems has been developed. Constructive methods for solving multidimensional (vector) optimization problems with equivalent criteria, with a given priority of the criterion. The software is presented, which is shown on numerical examples of economic (linear) problems - Vector Problem of Linear Programming.

Ключевые слова: Многомерная математика, Векторная оптимизация, Выбор оптимального решения, Прикладная математика, Линейные задачи.

Keywords: Multidimensional Mathematics, Vector Optimization, Optimal Solution Selection, Applied Mathematics, Linear Problems, Nonlinear Problems.

Введение

Исследование и анализ теоретических основ современной математики показал, что развитие теоретических основ математики проходило на базе отдельной (одномерной) функции, зависящей от некоторого множества переменных (параметров) исследуемого объекта, системы [1, с. 560 – 563, 2, 41]. В реальной жизни большинство исследуемых объектов, систем при своем функционировании (развитии) характеризуются не одной функцией (характеристикой), а некоторым множеством функций (характеристик), каждая из которых зависит от одних и тех же параметров объекта, системы. Как правило, эти функциональные характеристики, имели различную направленность; одно подмножество характеристик было направлено на увеличение своего числового значения (max), другое подмножество характеристик направлено на уменьшение своего числового значения (min). При этом, улучшение работы объекта по одной из этих характеристик приводило к ухудшению другой характеристики. Возникает проблема создания теории, математических методов для выбора таких параметров, которые бы улучшали все функциональные характеристики объекта, системы одновременно. К исследуемым объектам, системам относятся, как экономические, так и инженерные системы. В экономических системах к функциональным характеристикам можно отнести, например, объем продаж, прибыли, которые желательно получить по числовому значению как можно больше, а с другой стороны, затраты их желательно получить числовому значению как можно ниже. Для всех трех характеристик (трехмерность) параметры экономического объекта, системы одни и те же.

В инженерных системах (ИС), к которым относятся технические системы, технологические процессы, материалы (его состав), динамические системы, учитывается, как правило, некоторое множество характеристик (критериев).

Каждый критерий представлен отдельной функцией на одном и том же множестве переменных (параметров). Множество функций (критериев), каждая из которых имеет свою размерность и целенаправленность, а в совокупности определяют многомерность исследуемого объекта. Множество критериев инженерных систем представляют в виде вектора функций. Отсюда возникли задачи векторной оптимизации, которые определяют ***многомерность исследуемой системы*** (в частности, инженерной системы). В настоящее время подобные задачи при проектировании объектов, систем решаются, как на экспериментальном, так и на математическом (модельном) уровне, методом проб и ошибок.

Цель данной работы - исследование, анализ, разработка теоретических основ и прикладных конструктивных методов многомерной математики. Формирование векторной задача линейного программирования. Разработка программного обеспечения решения векторной задачи линейного программирования. Численная реализация векторной задачи линейного программирования.

Для реализации поставленной цели в работе исследовано и выполнено.

Проведен анализ основных этапов развития современной (одно функциональной) математики в соответствии [1, с. 560 – 563], [2, 41, 42]. Проблеме многокритериальной (векторной, системной) оптимизации уделяется достаточно большое внимание в отечественной науке, [3, 4 – 14], внесших большой вклад в решение важных научно-технических задач; работ автора [15 – 32, 33]; в зарубежной научной деятельности [34 - 39], как в теоретических, так и в прикладных аспектах. Теория и методы решения векторных задач математического программирования (ВЗМП) разработаны автором в [15] и подтверждено авторство в [29].[1]

---

[1] Sharing Information for "Vector optimization with equivalent and priority criteria"
Springer Nature Sharing <no-reply@email.authors.springernature.com>

SPRINGER NATURE SN SharedIt

Dear Author,
Congratulations on publishing "Vector optimization with equivalent and priority criteria" in Journal of Computer and Systems Sciences International. As part of the Springer Nature Content Sharing Initiative, you can now publicly share full-text access to a view-only version of your paper by using the following SharedIt link:
https://rdcu.be/bhZ8i
Readers of your article via the shared link will also be able to use Enhanced PDF features such as annotation tools, one-click supplements, citation file exports and article metrics.
We encourage you to forward this link to your co-authors, as sharing your paper is a great way to improve the visibility of your work. Click here for more information on Springer Nature’s commitment to content sharing and the SharedIt initiative.
Sincerely, Springer Nature
The Springer Nature SharedIt Initiative is powered by readcube technology.

При построении математических многофункциональных моделей инженерных систем дополнительно возникают ряд проблем, которые связаны, во-первых, с условиями определенности [18, 22, 24] и неопределенности [21, 23], во-вторых, проблемой размерности параметров и ее геометрической интерпретацией в двух мерной системе координат, [29, 31, 40]. Поэтому важным является разработка теории, математических методов оценки исходных данных, прикладной многомерной математики, принятия оптимальных решений с учетом многомерности (многофункциональности) в сложных экономических, инженерных системах.

1. Математика современная. Анализ.

Анализ математики современной проведен в соответствии [1, с. 560 – 563].

Математика – это наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира.

Математика, как наука стала возможной после накопления достаточно большого фактического материала, возникла в древней Греции в 6 – 5 веках до новой эры и проходила в соответствии с [1] четыре периода.

1. Зарождение математики. На ранних стадиях развития счет предметов бытия привел к созданию простейших понятий арифметики натуральных чисел. Потребности измерения (количества зерна, длины дороги и т. п.) приводят к появлению названий и обозначений простейших дробных чисел и разработке приемов выполнения дробных чисел. Накапливающийся постепенно материал формировался в древнейшую науку - арифметику.

2. Период элементарной математики. На ранних стадиях развития счет предметов бытия привел к созданию простейших понятий арифметических вычислений, способов определения площадей, объемов и т.п. возникает математика, как самостоятельная наука.

3. Период создания математики переменных величин. С 17 века начинается новый период развития математики. На первый план выдвигается ***понятие функции***, определяющее взаимосвязь переменных (параметров) исследуемого объекта. Изучение переменных величин и функциональных зависимостей приводит далее к основным понятиям математического анализа. Вводится в математику в явном виде идеи бесконечного, к понятию предела, производной, дифференциала и интеграла. Создается анализ бесконечно малых в виде *дифференциального и интегрального* вычислений, позволяющее связывать конечные изменения переменных величин с их поведением на принимаемое решение (функцию). Основные законы механики и физики записываются в форме дифференциальных уравнений, и задача интегрирования этих уравнений выдвигается одной из важнейших задач математики.

4. Современная математики. Все созданные в 17 и 18 веках разделы математического анализа продолжали с большой интенсивностью развиваться в 19, 20 и 21 веках. Большие новые теории возникают не только из запросов естествознания и техники, но из потребностей самой математики, например развитие функций комплексного переменных. В зависимости от запросов механики и физики происходило векторное и тензорное исчисление, которое проходило в рамках функционального анализа. В качестве основного аппарата новых областей механики и математической физики усиленно разрабатывается теория дифференциальных уравнений обыкновенных и уравнений с частными производными. В связи с созданием и использованием вычислительной техники выросла потребность в численных методах анализа и алгебры, которая переросла в отдельную ветвь – вычислительную математику. Запросы о нахождении наилучшего решения в задачах управления физическими или механическими системами, описываемые дифференциальными уравнениями, привели к созданию

теории оптимального управления, направленной на создание новых сфер человеческой деятельности.

В целом процесс развития математики показывает, что при решении математических проблем, происходило исследование и анализ отдельной ***функции (одномерной)***, зависящей от некоторого множества переменных (параметров) исследуемого объекта, системы.

5. ***Анализ одномерной математики и переход к многомерной математике***

Исследование и анализ математики показал, что ее развитие проходило на базе отдельной (одномерной) функции, зависящей от некоторого множества переменных (параметров) исследуемого объекта, системы. Но в реальной жизни исследуемый объект, система при своем функционировании (развитии) характеризуется некоторым набором функциональных характеристик, которые зависят от одних и тех же параметров системы. При этом функциональные характеристики могли иметь различную направленность: одни на увеличение числового значения (max), другие на уменьшение числового значения (min). Улучшение работы одной из этих характеристик приводит к ухудшению другой. Возникает математическая проблема создания методов для выбора таких параметров, которые бы улучшали все функциональные характеристики объекта, системы одновременно. В настоящее время подобные задачи при проектировании объектов, систем решаются, как на техническом (экспериментальном), так и на математическом (модельном) уровне, методом проб и ошибок.

Впервые к этой проблеме в неявном виде обратился В. Парето [3], который математически сформулировал критерий оптимальности в приложении к экономическим системам в начале XX в. при исследовании товарного обмена. Критерий оптимальности предназначен для оценки, улучшает ли предложенное изменение критерия общий уровень экономического благосостояния. В. Парето своим критерием оптимальности утверждает, что любое изменение в экономике, которое никому не причиняет убытков и, которое приносит некоторым людям пользу (прибыль), является улучшением экономики. Критерий В. Парето имеет широкий смысл. При построении планов развития экономической системы, в которой учитываются интересы ряда групп экономических объектов или подсистем, согласно теории В. Парето, распределение ресурсов является оптимальным. Общий критерий оптимальности, сформулированный В. Парето, был перенесен на оптимизационные задачи с множеством критериев. При таком подходе рассматривается оптимизационная задача, в которой оптимизация означает улучшение одного или нескольких показателей (критериев) при условии, чтобы другие не ухудшались. Так возникли оптимизационные задачи с множеством критериев. Каждый критерий представлен отдельной функцией на одном и том же множестве переменных (параметров). Множество функций (критериев), каждая из которых имеет свою размерность и целенаправленность, а в совокупности определяют многомерность исследуемого объекта, и это множество может быть представлено вектором. В итоге многомерная задача представлена как векторная задача оптимизации. В дальнейшем стало понятным, что векторные (многомерные) задачи возникают не только в экономике, но и в инженерии: например, при проектировании технических систем, технологических процессов, исследования структуры материала из различных производственных отраслей.

Таким образом проблема многомерности исследуемых объектов, систем стала общенаучной. Проблематика решения задач векторной (многомерной) оптимизации обусловлена определенными трудностями, причем концептуального характера. Главная проблема решения векторной (многомерной) задачи состоит в определении понятия: «***что значит решить задачу векторной оптимизации***». Решение проблемы векторной (многокритериальной) задачи оптимизации определяет необходимость:

во-первых, решения проблемы сравнения различных критериев, которые измерены в различных единицах, т. е. разработки аксиоматики векторной оптимизации, которая дает возможность сравнения критериев (характеристик);

во-вторых, формирования принципа оптимальности, показывающий в чем одно решение лучше другого по всем функциям (критериям), а также, что представляет оптимальное решение как при равнозначных критериях, так приоритете одного из критериев (в том числе при заданном приоритете критерия);

в-третьих, формирования численных методов, которые определяют правило выбора наилучшего (оптимального) решения как при равнозначных критериях, так и при заданном приоритете одного из критериев.

На решение этих трех проблем направлена данная работа.

2. Теоретические основы многомерной математики: Теория векторной оптимизации

В качестве представителя многомерной математики мы сформулируем задачу математического программирования, представленную множеством функций, которые определяют многомерность исследуемого объекта. Каждая функция этого множества функций имеют различную целевую направленность: максимизации или минимизации, которые в совокупности изменяются на определенном (не пустом и замкнутом) множестве переменных (параметров). Не нарушая общности множество функций можно представить в виде вектора функций. В итоге получаем векторную задачу математического программирования (ВЗМП). На базе векторной задачи оптимизации представим теоретические проблемы необходимые для ее решения, которые включают аксиоматику (теоретические основы), принцип оптимальности и конструктивные методы решения векторных задач с равнозначными критериями и заданным приоритетом критерия, [15, 29, 31, 33].

2.1. Векторная задача математического программирования. Аксиомы и Аксиоматические методы

2.1.1. Векторная задача математического программирования

Векторная задача математического программирования– это стандартная задача математического программирования, имеющая множество критериев. В отличии от стандартной оптимизационной задачи, представленной одной функцией (критерием), векторная задача представлена в виде множества функций (вектора критериев), который подразделяется на два подмножества критериев: максимизации, минимизации. В соответствии с этим векторные задачи могут быть представлены, как однородные, так и неоднородные задачи оптимизации.

Однородные векторные задачи математического программирования максимизации – это такие векторные задачи, у которых каждая компонента множества критериев направлена на максимизацию.

Однородные векторные задачи математического программирования минимизации – это такие векторные задачи, у которых каждая компонента множества критериев направлена на минимизацию.

Неоднородные векторные задачи математического программирования – это такие векторные задачи, у которых множества критериев разделено на два подмножества критериев: максимизации и минимизации, отсюда неоднородные ВЗМП – это объединение двух видов однородных задач. Используя эти определениями, по аналогии с однокритериальной задачей оптимизации, представим векторную задачу математического программирования с неоднородными критериями.

$$Opt\, F(X) = \{\max F_1(X) = \{\max f_k\,(X),\ k = \overline{1, K_1}\}, \tag{2.1}$$

$$\min F_2(X) = \{\min f_k\,(X),\ k = \overline{1, K_2}\}\}, \tag{2.2}$$

$$G(X) \leq B, \tag{2.3}$$

$$X \geq 0, \tag{2.4}$$

где $X = \{x_j,\ j = \overline{1, N}\}$ – это вектор переменных N-мерного евклидова пространства R^N; $F(X)$ – это векторный критерий (вектор-функция), имеющая K – компонент (функций), $F(X) = \{f_k(X),\ k = \overline{1, K}\}$. Множество компонент $\boldsymbol{K}$ состоит из двух подмножеств: подмножества $\boldsymbol{K}_1$ компонент максимизации, подмножества $\boldsymbol{K}_2$ компонент минимизации, которые в совокупности образуют множество функций $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_1 \cup \boldsymbol{K}_2$. Для оценки совокупности критериев $\boldsymbol{K}$ вводится обозначение: операция «*opt*». Операция «*opt*» включает в себя операции *max* и *min*;

$F_1(X), F_2(X)$ представляют вектор-функции (вектора критериев) максимизации и минимизации соответственно:

$\boldsymbol{K_1} \equiv \overline{1, K_1}$, $\boldsymbol{K_2} \equiv \overline{K_1 + 1, K} \equiv \overline{1, K_2}$ – это множества критериев максимизации, минимизации.

$G(X) \leq B, X \geq 0$ представляют ограничения, которые накладываются на отдельные переменные $X^{min} \leq X \leq X^{max}$, и отдельные функции:

$min\ f_k(X) \leq f_k(X) \leq max\ f_k(X), \forall k \in \boldsymbol{K}$

на допустимом множестве точек $X \in \boldsymbol{R}^n$.

Допустимое множество точек не пусто и представляет собой компакт:

$\boldsymbol{S} = \{X \in \boldsymbol{R}^n | G(X) \leq 0, X^{min} \leq X \leq X^{max}\} \neq \emptyset$.

2.1.2. Аксиомы и Аксиоматические методы: характеристика

Аксиома — это утверждение, не требующее логического доказательства. На основе этих утверждений (исходных положений) строится та или иная теория.

Аксиоматический метод — это способ построения научной теории, при котором в основу теории кладутся некоторые исходные положения, называемые *Аксиомами теории.* В итоге все остальные положения теории получаются как логические следствия аксиом, [1, 2].

В математике *Аксиоматический метод* зародился в работах древнегреческих геометров. Образцом аксиоматического метода является древнегреческий ученый Евклид, аксиомы которого были заложены в его знаменитом сочинении «Начала».

Дальнейшее развитие аксиоматического метода получил в работах Д. Гильберта в виде так называемого метода формализма системы. Общая схема построения произвольной формальной системы («*S*») включает:

1. *Язык системы* («*S*»), в том числе алфавит – это перечень элементарных символов; правила образования (синтаксис), по которым строится формулы «*S*».
2. Аксиомы системы «*S*», которые представляют некоторое множество формул.
3. Правила вывода системы «*S*» [1].

В приложении к решению задачи векторной оптимизации (многомерной математики) аксиоматика подразделяется на два раздела:

1. Аксиоматика решения задачи векторной оптимизации с равнозначными критериями;
2. Аксиоматика решения задачи векторной оптимизации с заданным приоритетом критериев.

Только при построении первоначальной аксиоматики возможно в дальнейшем построение принципа оптимальности и вытекающих из него алгоритмов решения векторных задач математического программирования.

2.2. Аксиоматика, принцип оптимальности и конструктивные методы векторной оптимизации с равнозначными критериями

2.2.1. Аксиоматика решения векторной задачи оптимизации с равнозначными критериями

В соответствии с вышеизложенной трактовкой *Язык системы многомерной математики* включает: во-первых, нормализацию критериев, во-вторых, относительную оценку критериев (функций), и, и в-третьих, минимальный относительный уровень.

Определение 1. ***Нормализация критериев***.

Нормализация критериев (сдвиг плюс нормирование) представляет однозначное отображение функции $f_k(X)\ \forall k \in K, X \in \boldsymbol{R}^n$, в одномерное пространство R^1 (функция $f_k(X)\ \forall k \in K$ представляет функцию преобразования $X = \{x_j\ , j = \overline{1, N}\}$ из N-мерного евклидова пространства $\boldsymbol{R^N}$ в $\boldsymbol{R^1}$). Для нормализации критериев в векторных задачах будут использоваться линейные преобразования:

$$f_k(X) = a_k f'_k(X) + c_k\ \forall k \in K, \text{ или } f_k(X) = (f'_k(X) + c_k)/a_k \forall k \in K, \tag{2.5}$$

где $f'_k(X)\ , k = \overline{1, K}$ – до нормализации (старое) значение критерия; $f_k(X), k = \overline{1, K}$ – нормализованное значение, a_k, c_k- постоянные.

Нормализация критериев (2.5) представляет простое (линейное) инвариантное преобразование полинома, в результате которого структура полинома остается неизменной. В оптимизационной задаче нормализация критериев:

$f_k(X) = (f'_k(X) + c_k)/a_k\ \forall k \in K$ не влияет на результат решения.

Если решается выпуклая оптимизационная задача: $\boldsymbol{max}_{X\in S}\ f(X)$,

то в полученной точке оптимума $X^* \in S$ производная равна нулю:

$$\frac{df(X^*)}{\mathrm{d}X} = 0.$$

В общем случае, если решается задача с нормализованным критерием:

$\boldsymbol{max}_{X\in S}\ (a_k f'_k(X) + c_k)$,

то в полученной точке оптимума $X^* \in S$ производная также равна нулю:

$$\frac{d(a_k f(X^*) + c_k)}{\mathrm{d}X} = a_k \frac{d(f(X^*))}{\mathrm{d}X} + \frac{d(c_k)}{\mathrm{d}X} = 0. \tag{2.6}$$

Результаты равны, т.е. точка оптимума $X_k^*, k = \overline{1,K}$ является одной и той же для ненормализованных и нормализованных задач.

Определение 2. ***Относительная оценка функции (критерия)***.

В векторной задаче оптимизации (2.1)-(2.4) выполним нормализацию (2.5):

$$\lambda_k(X) = \frac{f_k(X)-f_k^0}{f_k^*-f_k^0}, \ \forall k \in \boldsymbol{K}\,. \tag{2.7}$$

$\lambda_k(X)\ \forall k \in K$ – это относительная оценка k-й функции (k-го критерия) в точке $X \in \boldsymbol{S}$, где f_k^*, f_k^0 наилучшая, наихудшая величина k-го критерия, которая получена при решении векторной задачи (2.1)-(2.4) отдельно по k-му критерию. Относительная оценка $\lambda_k(X)\ \forall k \in K$ измеряется в относительных единицах; при этом относительная оценка $\lambda_k(X)\ \forall k \in K$ на допустимом множестве $\boldsymbol{S}$ меняется с нуля в точке X_k^0 к единице в точке оптимума X_k^*:

$$\forall k \in \boldsymbol{K} \lim_{X\to X_k^0} \lambda_k(X) = 0; \forall k \in \boldsymbol{K} \lim_{X\to X_k^*} \lambda_k(X) = 1.$$

Таким образом, для любой функции (критерия) относительная оценка этой функции $\lambda_k(X)\ \forall k \in K$ лежит в следующих пределах:

$$\forall k \in \boldsymbol{K}\ 0 \le \lambda_k(X) \le 1, X \in \boldsymbol{S}, \tag{2.8}$$

что позволяет функции (критерии) сравнивать между собой.

Определение 3. ***Операция сравнения относительных оценок функции (критерия) между собой***.

Так как, любая функция (критерий) представлен в относительных оценках функций $\lambda_k(X)\ \forall k \in K$, которые лежат пределах (2.8), то возможно сравнение относительных оценок по числовой величине. Для сравнения используется операция «вычитания». Если сравнивается две функции (критерия), измеренные в относительных оценках $\lambda_{k=1}(X)$ и $\lambda_{k=2}(X)\ \forall k \in K$, то возможны три ситуации:

первая, когда $\lambda_{k=1}(X) > \lambda_{k=2}(X)$;

вторая, когда $\lambda_{k=1}(X) = \lambda_{k=2}(X)$;

третья, когда $\lambda_{k=1}(X) < \lambda_{k=2}(X)$.

Первая и третья ситуация исследуется в разделе 2.3.

В этом разделе исследуется вторая ситуация.

2.2.2. Аксиома равнозначности критериев в задаче векторной оптимизации.

Аксиома 1. *О равнозначности критериев в допустимой точке* векторной задачи математического программирования.

В векторной задаче оптимизации два критерия с индексами $l \in \boldsymbol{K}, q \in \boldsymbol{K}$ будем считать равнозначными в точке $X \in \boldsymbol{S}$, если относительные оценки по k-му и q-му критерию равны между собой в этой точке: $\lambda_l(X) = \lambda_q(X), l, q \in \boldsymbol{K}$.

Пояснение. Если в точке $X \in \boldsymbol{S}$ функции (критерии) будут равны:

$\lambda_l(X) = 0{,}45\ l \in \boldsymbol{K}$ и $\lambda_q(X) = 0{,}45, q \in \boldsymbol{K}$ (т.е. 45% от своей оптимальной величины, которая в относительных единицах равна 1), то такие критерии не «равны» друг другу, а равнозначны по своему числовому значению. И каждый из них несет свой функциональный смысл, который может быть получен, используя нормализацию критериев (2.7).

Определение 4. ***Минимальный относительный уровень***.

Относительный уровень λ в векторной задаче оптимизации (2.1)-(2.4) представляет нижнюю оценку точки $X \in S$ среди всех относительных оценок $\lambda_k(X), k = \overline{1,K}$:

$$\forall X \in \boldsymbol{S}\ \lambda \le \lambda_k(X), k = \overline{1,K}, \tag{2.9}$$

нижний уровень λ для выполнения условия (2.9) в допустимой точке $X \in \boldsymbol{S}$ определяется как:

$$\forall X \in S\ \lambda = \boldsymbol{min}_{k\in K} \lambda_k(X). \tag{2.10}$$

Соотношения (2.9) и (2.10) являются взаимосвязанными. Они служат переходом от операции (2.10) определения min к ограничениям (2.9) и наоборот.

Относительный уровень λ позволяет объединить все критерии в векторной задаче оптимизации одной числовой характеристикой (переменной) λ, а затем производить над ней определенные операции.

Относительный уровень λ функционально зависит от переменной $X \in \boldsymbol{S}$, поэтому, изменяя X, можем изменять все $\lambda_k(X), k = \overline{1,K}$ и соответственно нижний уровень $\lambda = \boldsymbol{min}_{k\in K}\lambda_k(X)$, который является характеристикой многомерной (многофункциональной) системы.

Пояснение. Величина относительной оценки $\forall k \in K\ \lambda_k(X)$ является характеристикой *одномерной системы*, а величина минимального относительного уровня $\lambda = \boldsymbol{min}_{k\in K}\lambda_k(X)$ является характеристикой *многомерной* системы.

2.2.3. Принцип оптимальности решения многомерной (векторной) задачи оптимизации с равнозначными критериями

Определение 5. **Принцип оптимальности решения ВЗМП с равнозначными критериями**.

Векторная задача математического программирования с равнозначными критериями (2.1)-(2.4) решена, если найдена точка $X^o \in \boldsymbol{S}$ и максимальный нижний уровень λ^o (верхний индекс о – оптимум) среди всех минимальных относительных оценок: $\forall k \in \boldsymbol{K}\ \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{min}_{\boldsymbol{k\in K}}\lambda_k(X)$ такой, что

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{\boldsymbol{X\in S}}\boldsymbol{min}_{\boldsymbol{k\in K}}\lambda_k(X) \tag{2.11}$$

Используя взаимосвязь выражений (2.9) и (2.10), преобразуем максиминную задачу (2.11) в экстремальную задачу:

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{\boldsymbol{X\in S}}\,\lambda \tag{2.12}$$

$$\text{при ограничениях } \lambda \le \lambda_k(X), k = \overline{1,K}. \tag{2.13}$$

Полученную однокритериальную задачу оптимизации (2.12)-(2.13) назовем λ-задачей. λ-задача (2.12)-(2.13) имеет (N+1) размерность, как следствие результат решения λ-задачи (2.12)-(2.13) представляет собой оптимальный вектор $X^o \in R^{N+1}$, (N+1)-я компонента которого суть величина λ^o, $\boldsymbol{X^o} = \{x_1^o, x_2^o, \dots, x_N^o, x_{N+1}^o\}$, при этом $x_{N+1}^o = \lambda^o$, (N+1) компонента вектора X^o выделена в λ^o.

Полученные величины $\{\lambda^o, X^o\} = \boldsymbol{X^o}$ характеризуют оптимальное решение λ-задачи (2.16)-(2.17) и соответственно векторной задачи математического программирования (2.1)-(2.4) с равнозначными критериями, которая решена на основе нормализации критериев и принципе гарантированного результата.

Назовем в оптимальном решении $\boldsymbol{X^o} = \{\lambda^o, X^o\}$, величину X^o – оптимальной точкой, а λ^o – максимальным нижним уровнем при равнозначных критериях.

Теорема 1. Теорема о двух наиболее противоречивых критериях в ВЗМП (2.1)-(2.4) с равнозначными критериями.

В выпуклой векторной задаче оптимизации (2.1)-(2.4) с равнозначными критериями, решенной на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата, в оптимальной точке $\boldsymbol{X^o} = \{\lambda^o, X^o\}$ всегда имеется два критерия, обозначенные $q \in \boldsymbol{K}, p \in \boldsymbol{K}$, являющимися самыми противоречивыми из множества критериев $k = \overline{1,K}$, и для которых выполняется равенство:

$$\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_p(X^o), q, p \in \boldsymbol{K}, X \in \boldsymbol{S}, \tag{2.14}$$

и другие критерии определяются неравенством:

$$\lambda^o \le \lambda_k(X^o), \forall k \in \boldsymbol{K},\ q \ne p \ne k. \tag{2.15}$$

В первые доказательство теоремы 1 представлено в [13, С. 22], в дальнейшем повторено в работе [17, С. 234].

2.2.4. Конструктивный метод решения векторной задачи оптимизации с равнозначными критериями

Для решения векторной задачи математического программирования (2.1)-(2.4) разработан метод, основанный на нормализации критериев (2.7), аксиоматике и принципе максимина (гарантированного результата) (2.11). Конструктивный метод решения векторной задачи оптимизации с равнозначными критериями включает два блока: *1-й блок* «Системный анализ» - разделен на три шага; *2-й блок* «Принятие оптимального решения», включающий два шага: построения λ-задачи и ее решения.

Блок 1. Системный анализ.

Шаг 1. Решается отдельно оптимизационная задача (2.1)-(2.4) по каждому критерию. Для $\forall k \in \boldsymbol{K}_1$ решается на максимум, а для $\forall k \in \boldsymbol{K}_2$ решается на минимум.

В результате решения получим:

X_k^* - точка оптимума по соответствующему критерию $k = \overline{1,K}$;

$f_k^* = f_k(X_k^*)$ – величина k-го критерия в этой точке $k = \overline{1,K}$.

Шаг 2. В задаче (2.1)-(2.4) определяем наихудшую величину каждого критерия (анти оптимум): $f_k^0,\ k = \overline{1,K}$. Решается задача (2.1)-(2.4) для каждого критерия $k = \overline{1,\boldsymbol{K}_1}$ на минимум: $f_k^0 = min\ f_k(X), G(X) \leq B, X \geq 0, k = \overline{1,\boldsymbol{K}_1}$;

для каждого критерия $k = \overline{1,\boldsymbol{K}_2}$ на максимум: $f_k^0 = max\ f_k(X), G(X) \leq B, X \geq 0, k = \overline{1,\boldsymbol{K}_2}$.

Получим в результате решения: $X_k^0 = \{x_j, j = \overline{1,N}\}$ – точка оптимума по соответствующему критерию, $k = \overline{1,K}$; $f_k^0 = f_k(X_k^0)$ – величина k-го критерия.

Шаг 3. Системный анализ выполняется исследованием множества точек, оптимальных по Парето. В точках оптимума $X^* = \{X_k^*, k = \overline{1,K}\}$ определяются величины целевых функций $F(X^*)$, а также относительных оценок $\lambda(X^*)$:

$$\lambda_k(X) = \frac{f_k(X)-f_k^0}{f_k^*-f_k^0}, \forall k \in \boldsymbol{K}.$$

Результат системного анализа:

$$F(X^*) = \{f_k(X_k^*), q = \overline{1,K}, k = \overline{1,K}\} = \begin{vmatrix} f_1(X_1^*), \dots, f_K(X_1^*) \\ \dots \\ f_1(X_K^*), \dots, f_K(X_K^*) \end{vmatrix}, \quad (2.16)$$

$$\lambda(X^*) = \{\lambda_q(X_k^*), q = \overline{1,K}, k = \overline{1,K}\} = \begin{vmatrix} \lambda_1(X_1^*), \dots, \lambda_K(X_1^*) \\ \dots \\ \lambda_1(X_K^*), \dots, \lambda_K(X_K^*) \end{vmatrix}. \quad (2.17)$$

При анализе $\lambda(X^*)$ в (2.17) мы видим, что любая относительная оценка лежит в пределах: во-первых, $0 \leq \lambda_k(X) \leq 1, k = \overline{1,K}$;

во-вторых, по диагонали (2.17) все относительные оценки равны единицы:

$\lambda_k(X_k^*) = 1, k = \overline{1,K}$.

Из результатов системного анализа (2.16), (2.17) вытекает проблема:

Найти такую (оптимальную) точку, в которой все относительные оценки: $\lambda_q(X), q = \overline{1,K}$ были наиболее близки к единице. На решение этой проблемы направлен второй блок.

Блок 2. Принятие оптимального решения в ВЗМП.

Включает два шага – 4, 5.

Шаг 4. Построение λ-задачи.

Построение λ-задачи осуществляется в два этапа:

первоначально строится максиминная задача оптимизации с эквивалентными критериями (2.11):

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{\boldsymbol{X \in S}} \boldsymbol{min}_{\boldsymbol{k \in K}} \lambda_k(X),$$

которая на втором этапе, с учетом соотношений (2.9) и (2.10), преобразуются в однокритериальную задачу математического программирования, названной λ-задачей:

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{\boldsymbol{X \in S}}\ \lambda, \quad (2.18)$$

$$\lambda - \frac{f_k(X)-f_k^0}{f_k^*-f_k^0} \leq 0, k = \overline{1,K}, \quad (2.19)$$

$$G(X) \leq B, X \geq 0, \quad (2.20)$$

где вектор неизвестных X имеет размерность $N+1$: $X = \{\lambda, x_1, \dots, x_N\}$.

Шаг 5. Решение λ-задачи. λ-задача (2.18)-(2.20) – стандартная (однокритериальная) задача выпуклого программирования и для ее решения используются стандартные методы. В результате решения λ-задачи (2.18)-(2.20) получим:

$\boldsymbol{X^o} = \{\lambda^o, X^o\}$ – точку оптимума;

$f_k(X^o), k = \overline{1,K}$- величины критериев в этой точке;

$\lambda_k(X^o) = \frac{f_k(X)-f_k^0}{f_k^*-f_k^0}, k = \overline{1,K}$- величины относительных оценок;

λ^o – максимальную относительную оценку, которая является максимальным нижним уровнем для всех относительных оценок $\lambda_k(X^o)$:

$\boldsymbol{\lambda^o} \leq \lambda_k(X^o), k = \overline{1,K}, X^o \in \boldsymbol{S}$, т. е. системным показателем.

Заключение по аксиоматике и принципу оптимальности с равнозначными критериями в задаче векторной оптимизации.

С точки зрения многомерной математики впервые установлена взаимная функциональная связь между отдельными функциями (критериями), имеющих различную размерность. А с помощью принципа оптимальности находить оптимальное решение с равнозначными критериями в задаче векторной оптимизации.

2.3. Аксиоматика, принцип оптимальности и конструктивные методы векторной оптимизации с приоритетом критерия

В определении 3 указано, что если сравнивать две функции (критерия), измеренных в относительных оценках $\lambda_{k=1}(X)$ и $\lambda_{k=2}(X)$ $\forall k \in K$, то возможны три ситуации. Вторая ситуация, когда $\lambda_{k=1}(X) = \lambda_{k=2}(X)$ исследована в разделе 2.2 (равнозначные критерии). Ситуации: первая, когда $\lambda_{k=1}(X) > \lambda_{k=2}(X)$, и третья, когда $\lambda_{k=1}(X) < \lambda_{k=2}(X)$, исследуются в этом разделе. Такие ситуации определяются, как задачи с приоритетом критерия.

2.3.1. Аксиоматика решения векторной задачи оптимизации с заданным приоритетом критерия

1. ***Язык системы*** аксиоматики решения векторной задачи с заданным приоритетом критерия включает определения: 1) Приоритет одного критерия над другим; 2) Числовое значение приоритета критерия; 3) Нижний уровень критерия среди всех относительных оценок с приоритетом критерия.

Определение 6. ***Приоритет одного критерия над другим***.

Критерий $q \in \boldsymbol{K}$ в векторной задаче в точке $X \in \boldsymbol{S}$ имеет приоритет над другими критериями $k = \overline{1, K}$, если относительная оценка $\lambda_q(X)$ по этому критерию больше или равна относительных оценок $\lambda_k(X)$ других критериев, т. е.:

$$\lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), k = \overline{1, K}, \tag{2.21}$$

строгий приоритет, если хотя бы для одного критерия $t \in \boldsymbol{K}$: $\lambda_q(X) > \lambda_k(X), t \neq q$, а для остальных критериев $\lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), k = \overline{1, K}, k \neq t$.

Для уточнения вопроса на сколько приоритет одного критерия над другим мы ввели определение коэффициента (вектора) связи между парой относительных оценок q и k: $P^q(X) = \{p_k^q(X) \mid k = \overline{1, K}\}, q \in \boldsymbol{K}$ $\forall X \in \boldsymbol{S}_q$.

Определение 7. ***Числовое выражение приоритета критерия над другим критерием***.

В векторной задаче с приоритетом критерия q-го над другим критерием $k = \overline{1, K}$, для $\forall X \in \boldsymbol{S}_q$, величина $p_k^q(X)$ показывает во сколько раз относительная оценка $\lambda_q(X), q \in \boldsymbol{K}$, больше относительных оценок $\lambda_k(X), k = \overline{1, K}$:

$$\left\{p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}, k = \overline{1, K}\right\}, \forall X \in \boldsymbol{S}_q \subset S, \forall q \in \boldsymbol{K}.$$

Такое отношение $p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}$ назовем числовым выражением приоритета q-го критерия над остальными критериями $k = \overline{1, K}$.

Определение 7а. ***Вектор приоритетов, определяющий числовое выражение приоритета критерия относительно других критериев***.

В векторной задаче с приоритетом критерия q-го над другими критериями $k = \overline{1, K}$, для $\forall X \in \boldsymbol{S}_q$, вектор $P^q(X)$ показывает во сколько раз относительная оценка q-го критерия $\lambda_q(X), q \in \boldsymbol{K}$, больше относительных оценок $\lambda_k(X), k = \overline{1, K}$:

$$P^q(X) = \left\{p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}, k = \overline{1, K}\right\}, \forall X \in \boldsymbol{S}_q \subset S, k = \overline{1, K}, \forall q \in \boldsymbol{K}. \tag{2.22}$$

Такое отношение $p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}$ назовем вектором числовых выражений приоритета q-го критерия над остальными критериями $P^q(X) = \{p_k^q(X), k = \overline{1, K}\}$.

Определение 8. ***Заданное числовое значение приоритета одного критерия над другим***.

В векторной задаче (2.1)-(2.4) с приоритетом критерия $q \in \boldsymbol{K}$ для $\forall X \in \boldsymbol{S}$ вектор $P^q = \{p_k^q, k = \overline{1, K}\}$, считается заданным лицом, принимающим решения, (ЛПР), если задана каждая компонента этого вектора. Заданная ЛПР компонента p_k^q, с точки зрения ЛПР, показывает во сколько раз относительная оценка $\lambda_q(X), q \in \boldsymbol{K}$ больше остальных относительных оценок $\lambda_k(X), k = \overline{1, K}$. Вектор $p_k^q, k = \overline{1, K}$ является заданным числовым выражением приоритета q-го критерия над остальными критериями $k = \overline{1, K}$.

Определение 9. ***Нижний уровень среди всех относительных оценок с приоритетом критерия***.

Уровень λ является нижним среди всех относительных оценок с приоритетом критерия $q \in \boldsymbol{K}$, таким, что

$$\lambda \leq p_k^q \lambda_k(X),\ k = \overline{1, K},\ q \in \boldsymbol{K},\ \forall X \in \boldsymbol{S}_q \subset S, \tag{2.23}$$

нижний уровень для выполнения условия (2.23) определяется

$$\lambda = min_{k \in K} p_k^q \lambda_k(X), q \in \boldsymbol{K}, \forall X \in \boldsymbol{S}_q \subset S. \tag{2.24}$$

Соотношения (2.23) и (2.24) являются взаимосвязанными и служат в дальнейшем переходом от операции определения min к ограничениям и наоборот.

2.3.2. Аксиоматика о подмножестве точек, приоритетных по отдельному критерию в задаче векторной оптимизации

Из определений первого подраздела «Аксиоматика решения векторной задачи оптимизации с заданным приоритетом критерия» устанавливается взаимосвязь с «Аксиоматической теорией множеств" [1, стр. 103-105].

Аксиома 2. *О подмножестве точек, приоритетных по отдельному критерию на допустимом множестве точек задачи векторной оптимизации*.

В векторной задаче (2.1)-(2.4) подмножество точек $\boldsymbol{S}_q \subset S$ называется областью приоритета критерия $q \in K$ над другими критериями, если

$$\forall X \in \boldsymbol{S}_q \subset S\ \forall k \in \boldsymbol{K}\ \lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), q \neq k.$$

Сравнивая это выражение с выражением равнозначности критериев в аксиоме 1: $\lambda_l(X) = \lambda_q(X), l, q \in \boldsymbol{K}$, видим, что эти выражения идентичны.

Определение аксиомы 2 $\forall X \in \boldsymbol{S}_q\ \forall k \in \boldsymbol{K}\ \lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), q \neq k$ распространяется и на множество точек $\boldsymbol{S}^o \subset S$, оптимальных по Парето, что дается следующим определением.

Аксиома 2а. *О подмножестве точек, приоритетных по отдельному критерию, на подмножестве точек, оптимальных по Парето, в задаче векторной оптимизации*.

В задаче векторной оптимизации (2.1)-(2.4) подмножество точек $\boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}^o \subset$ S называется областью приоритета критерия $q \in \boldsymbol{K}$ над другими критериями, на подмножестве точек, оптимальных по Парето $\boldsymbol{S}^o \subset$ S, если

$$\forall \mathrm{X} \in S_q^o \subset \boldsymbol{S}^o \subset \mathrm{S}\ \forall k \in K\ \lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), q \neq k.$$

Заметим, что подмножество точек $\boldsymbol{S}_q^o$, с одной стороны, включено в область (подмножество точек) имеющих приоритет критерия $q \in \boldsymbol{K}$ над другими критериями: $\boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}$, а с другой стороны, на подмножество точек, которые оптимальны по Парето: $\boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S}$.

Аксиома 2 и числовое выражение приоритета критерия (Определение 7) позволяет определять каждую допустимую точку $X \in \boldsymbol{S}$ посредством вектора:

$P^q(X) = \{p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}, k = \overline{1, K}\}$, формироваться и выбирать:

• подмножество точек по приоритетному критерию $\boldsymbol{S}_q$, которое включено в допустимое множество точек $\boldsymbol{S}$, $\forall q \in \boldsymbol{K}\ X \in \boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}$,

Заметим, что соотношения: $\boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}$ и $\forall q \in \boldsymbol{K}\ X \in \boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}$ могут использоваться в задачах кластеризации, но это выходит за рамки статьи;

• подмножество точек по приоритетному критерию $\boldsymbol{S}_q^o$, который включен в ряд точек $\boldsymbol{S}^o$, оптимальных по Парето, $\forall q \in K, X \in \boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}^o$.

Таким образом, выполнена идентификация всех допустимых точек, оптимальных по Парето, в векторной задаче оптимизации в последовательности:

Множество допустимых точек $X \in \boldsymbol{S}$ $\rightarrow$	Подмножества точек оптимума по Парето, $X \in \boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S}$ $\rightarrow$	Подмножество оптимальных точек приоритетом $q \in K$ $X \in \boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S}$ $\rightarrow$	Отдельная точка, $\forall X \in \boldsymbol{S}$ $X \in \boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S}$

Это является наиболее важным результатом теории, который позволит вывести принцип оптимальности и построить методы выбора *любой точки* из множества точек, оптимальных по Парето.

2.3.3. Принцип оптимальности решения векторной задачи оптимизации с заданным приоритетом критерия

Определение 10. ***Принцип оптимальности 2***. Решение векторной задачи с заданным приоритетом критерия.

Векторная задача (2.1)–(2.4) с заданным приоритетом q-го критерия $p_k^q\lambda_k(X), k=\overline{1,K}$ считается решенной, если найдена точка X^o и максимальный уровень λ^o среди всех относительных оценок такой, что

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{\boldsymbol{X\in S}}\boldsymbol{min}_{\boldsymbol{k\in K}} p_k^q\lambda_k(X), q\in\boldsymbol{K}. \qquad (2.25)$$

Используя взаимосвязь (2.23) и (2.24), преобразуем максиминную задачу (2.25) в λ-задачу, которую назовем λ-задачей с приоритетом q-го критерия:

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{\boldsymbol{X\in S}}\,\lambda, \text{ при ограничениях } \lambda\le p_k^q\lambda_k(X), k=\overline{1,K}. \qquad (2.26)$$

В оптимальном решении $\boldsymbol{X^o}=\{X^o,\lambda^o\}$, $\boldsymbol{X^o}$ - оптимальная точка, а λ^o - максимальный нижний уровень. Точка X^o и уровень λ^o соответствуют ограничениям (2.4), которые можно записать как: $\lambda^o\le p_k^q\lambda_k(X^o), k=\overline{1,K}$.

Теорема 2. Теорема о наиболее противоречивых критериях в векторной задаче с заданным приоритетом. Если в выпуклой векторной задаче математического программирования максимизации (2.1)-(2.4) задан приоритет q-го критерия $p_k^q, k=\overline{1,K}, \forall q\in\boldsymbol{K}$ над другими критериями, в точке оптимума $X^O\in\boldsymbol{S}$, полученной на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата, всегда найдется два критерия с индексами $r\in\boldsymbol{K}$, $t\in\boldsymbol{K}$, для которых выполняется строгое равенство из:

$$\lambda^\circ = p_k^r\lambda_r(X^\circ) = p_k^t\,\lambda_t(X^\circ), r,t,\in\boldsymbol{K}, \qquad (2.27)$$

и другие критерии определяются неравенствами:

$$\lambda^\circ\le p_k^q(X^\circ), k=\overline{1,K}, \forall q\in\boldsymbol{K}, q\ne r\ne t\,. \qquad (2.28)$$

Критерии с индексами $r\in\boldsymbol{K}$, $t\in\boldsymbol{K}$, для которых выполняется равенство (2.27), называются наиболее противоречивыми.

2.3.4. Метод решения задачи векторной оптимизации с заданным приоритетом критерия.

Шаг 1. Решаем векторную задачу с равнозначными критериями. Алгоритм решения представлен в разделе 2.2.4. В результате решения получаем:

оптимальные точки по каждому критерию отдельно $X_k^*, k=\overline{1,K}$ и размеры критериальных функций в этих точках $f_k^*=f_k(X_k^*), k=\overline{1,K}$;

точки анти оптимума по каждому критерию $X_k^0=\{x_j, j=\overline{1,N}$ и наихудшей неизменной части каждого критерия $f_k^0=f_k(X_k^0), k=\overline{1,K}$;

$\boldsymbol{X^o}=\{X^o,\lambda^o\}$ оптимальная точка, как результат решения VPMP.

Лицо, принимающее решение, проводит анализ результатов решения векторной задачи с равнозначными критериями. Если полученные результаты удовлетворяют лицо, принимающее решение, то конец, иначе выполняются последующие расчеты.

Дополнительно вычислим: в каждой точке $X_k^*, k=\overline{1,K}$ определим величины всех критериев $f_k^*=f_k(X_k^*), k=\overline{1,K}$, которые представляют границу множества Парето, и относительных оценок: $\lambda(X^*)=\{\lambda_q(X_k^*), q=\overline{1,K}, k=\overline{1,K}\}$, $\lambda_k(X)=\frac{f_k(X)-f_k^0}{f_k^*-f_k^0}, \forall k\in\boldsymbol{K}$:

$$F(X^*)=\begin{vmatrix} f_1(X_1^*)\dots f_K(X_1^*)\\ \dots\\ f_1(X_K^*)\dots f_K(X_K^*)\end{vmatrix},\ \lambda(X^*)=\begin{vmatrix} \lambda_1(X_1^*)\dots\lambda_K(X_1^*)\\ \dots\\ \lambda_1(X_K^*)\dots\lambda_K(X_K^*)\end{vmatrix}. \qquad (2.29)$$

Шаг 2. Выбор приоритетного критерия $q\in\boldsymbol{K}$.

Из теории (см. теорему 1) известно, что в оптимальной точке X^o всегда имеется два наиболее противоречивых критерия $q\in\boldsymbol{K}$ и $v\in\boldsymbol{K}$, для которых в относительных единицах выполняется точное равенство: $\lambda^o=\lambda_q(X^o)=\lambda_v(X^o), q,v\in\boldsymbol{K}, X\in\boldsymbol{S}$, а для остальных: $\lambda^o\le\lambda_k(X^o), \forall k\in\boldsymbol{K},\ q\ne v\ne k$.

Как правило, из этой пары выбирается критерий, который ЛПР хотел бы улучшить, такой критерий называется «приоритетным критерием»: $q \in \boldsymbol{K}$.

Шаг 3. Определяются числовые пределы изменения величины приоритета критерия $q \in \boldsymbol{K}$. Для приоритетного критерия $q \in \boldsymbol{K}$ из матрицы (2.29) определим числовые пределы изменения величины критерия: в натуральных единицах $f_q(X)$ и в относительных единицах $\lambda_q(X)$, которые лежат в пределах:

$$f_k(X^o) \leq f_q(X) \leq f_q(X_q^*), k \in \boldsymbol{K},$$
$$\lambda_k(X^o) \leq \lambda_q(X) \leq \lambda_q(X_q^*), k \in \boldsymbol{K}, \quad (2.30)$$

где $\lambda_q(X_q^*)$ выводится из матрицы $\lambda(X^*)$, все критерии показывают размеры, измеренные в относительных единицах (отметим, что $\lambda_q(X_q^*) = 1$), $\lambda_q(X^o)$.

Выражения (2.30) выдаются на дисплей для анализа.

Шаг 4. Выбор величины приоритетного критерия (Принятие решения). ЛПР проводит анализ результатов расчетов (2.30) и выбирает числовую величину f_q, $q \in \boldsymbol{K}$: $f_q(X^o) \leq f_q \leq f_q(X_q^*), q \in \boldsymbol{K}$. Для выбранной величины критерия f_q необходимо определить вектор неизвестных X^{oo}, для этого проводим последующие вычисления.

Шаг 5. Расчет относительной оценки: $\lambda_q = \frac{f_q - f_q^0}{f_q^* - f_q^0}$, которая при переходе от точки X^o к X_q^*, в соответствии с (2.30): $\lambda_q(X^\circ) \leq \lambda_q \leq \lambda_q(X_q^*) = 1$.

Шаг 6. Вычисление коэффициента линейной аппроксимации.

Используя стандартные приемы линейной аппроксимации, вычислим коэффициент пропорциональности ρ между $\lambda_q(X^\circ), \lambda_q$: $\rho = \frac{\lambda_q - \lambda_q(X^o)}{\lambda_q^* - \lambda_q^0}, q \in \boldsymbol{K}$,

Шаг 7. Вычисление координат приоритетного критерия f_q.

Координаты точки приоритетного критерия X_q лежат в следующих пределах: $X^o \leq X_q \leq X_q^*, q \in \boldsymbol{K}$. Предполагая линейный характер изменения вектора $X_q = \{x_1^q, \dots, x_N^q\}$ определим координаты точки приоритетного критерия с величиной f_q с относительной оценкой $\lambda_q = \frac{f_q - f_q^0}{f_q^* - f_q^0}$:

$$X_q = \{x_1^q = x_1^o + \rho(x_q^*(1) - x_1^o), \dots, x_N^q = x_N^o + \rho(x_q^*(N) - x_N^o)\},$$

где $X^o = \{x_1^o, \dots, x_N^o\}$, $X_q^* = \{x_q^*(1), \dots, x_q^*(N)\}$.

Шаг 8. Вычисление основных показателей точки X_q.

Для полученной точки $X_q = \{x_{qj}, j = \overline{1,N}\}$, вычислим:

все критерии в натуральных единицах: $F^q = \{f_k(X_q), k = \overline{1,K}\}$;

все относительные оценки критериев:

$$\lambda^q = \{\lambda_k^q, k = \overline{1,K}\}, \lambda_k(x^q) = \frac{f_k(X_q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1,K};$$

минимальную относительную оценку: $\lambda^{oq} = \min (p_k^q \lambda_k(X_q), k = \overline{1,K})$.

Аналогично рассчитывается любая точка по Парето: $\boldsymbol{X_t^o} = \{\boldsymbol{\lambda_t^o}, \boldsymbol{X_t^o}\} \in \boldsymbol{S^o}$.

Анализ результатов. Рассчитанная величина критерия $f_q(X_t^o), q \in \boldsymbol{K}$ обычно не равна заданной f_q. Ошибка выбора: $\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q|$ определяется ошибкой линейной аппроксимации. [16, 19, 27, 28].

Заключение по теории и аксиоматике векторной оптимизации.

Представленная теория, аксиоматика, принципы оптимальности являются дальнейшим развитием аксиоматического подхода, заложенного в знаменитом сочинении «Начала», древнегреческого ученого Евклида, который представил аксиомы для одно мерной математики. Это нашло отражение в теории оптимизации с одним критерием. Аксиоматика (Машунина Ю.К.), изложенная в работе, направлена на системное с множеством функций (критериев) исследование объектов, процессов и инженерных систем. При этом исследование (оптимизация) по каждому критерию ведется не в натуральных, а в относительных единицах от 0 (нуля) до 1 (единицы) или (для экономистов) от нуля до 100% на исследуемом континууме. При таком подходе стандартная оптимизация с одним критерием на замкнутом, не пустом множестве точек является частным вариантом, векторной оптимизации, где оптимизация идет от 0 до 1 (100%), при этом известно, что понимается под 0, и, что под 1 (первый шаг алгоритма).

3. Прикладная многомерная математика: Векторная задача линейного программирования – модель развития экономических систем.

В этом разделе рассматриваем отдельную задачу многомерной математики: векторную задачу линейного программирования. Математическое и программное обеспечение решения векторной задачи линейного программирования, алгоритмы решения которой при равнозначных критериях представлен в разделе 2.2.3 и при заданном приоритете критерия в разделе 2.3.3. [13, 27, 29].

3.1. Векторная задача линейного программирования

Векторная задача линейного программирования – это стандартная задача математического программирования, имеющая некоторое множество критериев, которые в совокупности представляют вектор критериев.

ВЗЛП подразделяются на однородные и неоднородные ВЗЛП.

Однородная ВЗЛП максимизации – это векторная задача, у которой каждая компонента множества критериев направлена на максимизацию.

Однородные ВЗЛП минимизации – это векторная задача, у которой каждая компонента множества критериев направлена на минимизацию. Неоднородные ВЗЛП – это векторная задача, у которой множество критериев разделено на два подмножества (вектора) критериев – максимизации и минимизации соответственно, т. е. неоднородные ВЗМП – это объединение двух видов однородных задач. В соответствии с этими определениями представим векторную задачу линейного программирования с неоднородными критериями.

$$opt\ F\big(X(t)\big) = \{max\ F_1\big(X(t)\big) = \{max\ f_k\big(X(t)\big) = \textstyle\sum_{j=1}^{N} c_j^k x_j(t)\ , k = \overline{1, K_1}\ , \quad (3.1)$$

$$min\ F_2\big(X(t)\big) = \{min\ f_k\big(X(t)\big) = \textstyle\sum_{j=1}^{N} c_j^k x_j(t)\ , k = \overline{1, K_2}\}\}, \quad (3.2)$$

$$\textstyle\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t) x_j(t) \leq b_i(t), i = \overline{1, M}, \quad (3.3)$$

$$\textstyle\sum_{j=1}^{N} c_j^k x_j(t) \geq b_k(t), k \in K, \quad (3.4)$$

$$0 \leq x_j(t) \leq x_j(t)\ , j = \overline{1, N}, \quad (3.5)$$

где $X = \{x_j(t), j = \overline{1, N}\}$ - вектор переменных, т.е. это вектор из N-мерного евклидова пространства R^N, (обозначение $j = \overline{1, N}$ эквивалентно $j = (1, \dots, N)$);

$F(X)$- вектор-функция (векторный критерий), имеющая K – компонент-функций, (K - мощность множества K). Множество K состоит из подмножества K_1 компонент максимизации и подмножества K_2 минимизации: $K = K_1 \cup K_2$, для оценки совокупности критериев вводится обозначение операция «*opt*», которое включает в себя max и min;

$F_1\big(X(t)\big) = \{max\ f_k\big(X(t)\big), k = \overline{1, K_1}$ – это векторный критерий, каждая компонента которого максимизирует, K_1 – число критериев, а $K_1 \equiv \overline{1, K_1}$- множество критериев максимизации (задача (3.1), (3.3)-(3.5) представляют собой ВЗЛП с однородными критериями максимизации);

$F_2\big(X(t)\big) = \{min\ f_k\big(X(t)\big), k = \overline{1, K_2}$- векторный критерий, каждая компонента которого минимизируется, $K_2 \equiv \overline{K_1 + 1, K} \equiv \overline{1, K_2}$ - множество критериев минимизации, K_2 – число, (задача (3.2)-(3.5) это ВЗЛП с однородными критериями минимизации).

$K_1 \cup K_2 = K, K_1 \subset K, K_2 \subset K.$

ВЗЛП (3.1)-(3.5) может рассматриваться как K-мерная задача оптимизации, где $K = K_1 \cup K_2$.

(3.3)-(3.5) - стандартные ограничения.

$$S = \{X \in R^n | G(X) \leq 0, X^{min} \leq X \leq X^{max}\} \neq \emptyset \quad (3.6)$$

это допустимое множество точек, задающиеся стандартными ограничениями (3.3)-(3.5) и тривиальными ограничениями $0 \leq x_j(t) \leq u_j(t)\ , j = \overline{1, N}$. Предполагаем, что допустимое множество точек не пусто и представляет собой компакт.

3.2. Структура и текст программного обеспечения решения векторной задачи линейного программирования

3.2.1. Структура программного обеспечения решения векторной задачи линейного программирования

Программное обеспечение решения ВЗЛП (3.1)-(3.5) разработано на базе алгоритма, основанного на нормализации критериев и принципа гарантированного результата, который представлен в [33]. Программное обеспечение решения ВЗЛП (3.1)-(3.5) в системе MATLAB включает два блока:

1 блок (подпрограмма): Подготовка исходной информации для решения ВЗЛП: VPLP_DATA_N;

2 блок (подпрограмма): представляет функцию VPLP_Solution – «Решение векторной задачи линейного программирования», которая загружена MATLAB заранее, [33].

3.2.2. Исходная информация в виде векторной задачи линейного программирования

Блок 1. Подготовка исходной информации представлена на примере решения векторной задачи линейного программирования:

$$Opt\ F(X) = \{max\ F_1(X) = \{max\ f_1(X) \equiv 43.2x_1 + 36x_2, \tag{3.7}$$

$$max\ f_2(X) \equiv 7.3x_1 + 14.4x_2\}, \tag{3.8}$$

$$min\ F_2(X) = \{min\ f_3(X) \equiv 7.2x_1 + 8.64x_2\}\}, \tag{3.9}$$

$$7.2x_1 + 8.64x_2 \leq 5184, \tag{3.10}$$

$$8.2x_1 + 7.6x_2 \leq 5355, \tag{3.11}$$

$$7.3x_1 + 7.1x_2 \geq 1600, \tag{3.12}$$

$$x_1 \leq 600, x_2 \leq 540, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \tag{3.13}$$

3.2.3. Текст программного обеспечения решения векторной задачи линейного программирования

Информация готовится для решения ВЗЛП (3.7)-(3.13) с названием **VPLP_DATA_3**.

```
%Vector linear programming problem: VPLP_DATA_3
%Avtor Машунин Юрий К. - Mashunin Yury K. (Mashunin Yu.K.)
%The program is designed for the training and research,
%for the commercial purposes please contact:  email:
Mashunin@mail.ru
disp('Input datas for the solution of VZLP_DATA_k3')
disp('Number of criteria'); k=3
disp('Matrix of criteria')
c=[-43.2 -36.;     % стоимость
    -7.3 -14.4;    % прибыль
    7.2  8.64];    % труд
disp('Matrix of restrictions')
a=[7.2 8.64;     % труд
   8.2 7.6;      % Материалы
  -7.3 -7.1];    % минимальная плановая загрузка
disp('Vector of restrictions ')
b=[5184.  5355. -2600.]; %
disp('Restrictions of type of equalities ')
Aeq=[]; Beq=[];
disp('Lower bound of variables')
Lb=[0. 0.];
disp('Upper bound of variables')
Ub=[600. 540.]; %
[Xo,Lo,FXo,LXo,Xopt,FXoptLXopt] =
VPLP_Solution(k,c,a,b,Aeq,Beq,Lb,Ub)
disp('РЕЗУЛЬТАТ Системного Анализа ')
disp('Точки оптимума по каждому критерию')
Xmax=Xopt(1:k,:)
disp('Величины критериев в точке оптимума')
FXopt=FXoptLXopt(1:k,:)
disp('Величины относительных оценок точке оптимума Values of the
Relative estimates at the optimum point Xopt')
FXmin=FXoptLXopt(k+1:2*k,:)
```

```
disp('Точки оптимума по наихудшему значению критерия
(антиоптимум)')
Xmin=Xopt(k+1:2*k,:)
disp('Величины критериев в наихудшей точке оптимума')
FXmin=FXoptLXopt(2*k+1:3*k,:)
disp('РЕЗУЛЬТАТ решени. ВЗЛП с равнозначными критериями ')
disp('Точка оптимума')
X_optim=Xo
disp('Относительна. оценка критерия в Точке оптимума')
L_optim=Lo
disp('Величины критериев в точке оптимума X_optim')
FXoptim= FXo  %[c(1,:)*Xo(2:3) c(2,:)*Xo(2:3) c(3,:)*Xo(2:3)];
disp('Величины Относительных оценок в точке оптимума X_optim')
LXoptim= LXo  %[(FXoptim(1)-FXmin(1))/d1 …]
```

Программа – функция VPLP_Solution: Решения векторной задачи линейного программирования. Текст из системы MATLAB.

```
%Vector linear programming problem: VPLP_Solution
 function [Xo,Lo,FXo,LXo,Xopt1,FXoptLXopt] =
VPLP_Solution(k,c,a,b,Aeq,Beq,Lb,Ub)
%Avtor Машунин Юрий К. - Mashunin Yury K. (Mashunin Yu.K.)
%Предназначена для обучения, научно-исследовательских работ
%The program is designed for the training and research,
%for the commercial purposes please contact:  email:
Mashunin@mail.ru
disp('Step 1.The solution for each criterion is the best')
for i=1:k    %criterion - opt
  [x,f]=linprog(c(i,:),a,b,Aeq,Beq,Lb,Ub)
  s=strcat('Criterion: f',num2str(i),'max=',num2str(f));   %
  disp(s)
  for j=1:k   % The value of the criterion at the optimum point
   fXopt=c(j,:)*x;
   FXopt(i,j)=fXopt;
  end
  Xopt(i,:)=x';
  FXopt;
end
disp('Step 2. Solution by criterion-best-worst (Antioptimum)')
for i=1:k
  [xmin,fmin]=linprog(-1*c(i,:),a,b,Aeq,Beq,Lb,Ub)
  s=strcat('Criterion: f',num2str(i),'min=',num2str(fmin));
  disp(s)
  for j=1:k   % The value of the criterion at the optimum point
   fXmin=c(j,:)*xmin;
   FXmin(i,j)=fXmin;
  end
  Xmin(i,:)=xmin';
  FXmin;
end
disp('Step 3. System analysis of the results of the decision')
FXopt
for i=1:k
  dK=-1*FXopt(i,i)+FXmin(i,i);
  d(i)=dK;
end
```

```
for i=1:k
  for j=1:k    % The value of the criterion at the optimum point
   FXoptij=FXopt(i,j);
   FXminij=FXmin(i,j);
   dL=(-1*FXopt(i,j)+FXmin(j,j))/d(j);
   LXopt(i,j)=dL;
  end
end
LXopt
disp('Step 4. Constaction of the L-problem')
a01=ones(1,k)  %[1 1 1 1 1 1 1 1 1]
s=size(a)          % Dimension of matrix a: s(1)=m, s(2)=n
a02=zeros(1,s(1))  %a02 = zeros (1, s (1))% a02 - Zeros in is
limited
a03=zeros(1,s(2))  %a03 - Zero in criteria
KrL=[-1 a03]
for i=1:k          % The value of the criterion at the optimum
poin
   a0kr=c(i,:)/d(i);
   c_d(i,:)=a0kr;
   b0kr=FXmin(i,i)/d(i);
   bFmin(i,:)=b0kr;
end
a0=[a01' c_d;
    a02' a]
b0=[bFmin' b]
s1=size(Aeq)          % Dimension of matrix a: s(1)=m, s(2)=n
a02=zeros(1,s1(1))  %a02 = zeros (1, s (1))% a02 - Zeros in is
limited
Aeq0=[a02' Aeq]
Beq0=Beq
lb0=[0 Lb]  %10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10]
ub0=[1 Ub]  %2500. ]
disp(' Step 5. Solution of the L-problem')
[x0,L0]=linprog(KrL,a0,b0,Aeq0,Beq0,lb0,ub0)
disp('The optimum point Xo={xj,j=1,N}')
Xo=x0(2:s(2)+1)'
Fx0=zeros(1,k); Lx0=zeros(1,k);
for j=1:k  % Size of criteria at the optimum point
    nFx0=c(j,:)*x0(2:s(2)+1)
    Fx0(j)=nFx0
    dL=(-1*Fx0(j)+FXmin(j,j))/d(j)
    Lx0(j)=dL
end
    % КОНЕЦ основного цикла
Xo=x0
Lo=Xo(1)
disp(' Criteria Fk(Xo), k=1,K')
FXo=Fx0,
disp(' Criteria in the relative units Lk(Xo), k=1,K')
LXo=Lx0
Xopt1=[Xopt;Xmin]
FXoptLXopt=[FXopt;LXopt;FXmin]
% END
```

3.3. Процесс моделирования экономических систем на базе векторной задачи линейного программирования

Процесс моделирования развития экономических систем в различных областях исследований, базируется на системной (векторной) оптимизации принятия решений. Методология процесса принятия оптимальных решений в общем виде экономических систем на базе векторной оптимизации включает последовательно три этапа.

1 этап. *Решение векторной задачи математического программирования при равнозначных критериях*. Полученный результат является основой для дальнейшего исследования системы. При этом используется метод решения векторной задачи при равнозначных критериях, представленный в 2.2.3. Если полученный результат удовлетворяет лицу, принимающего решения, (ЛПР - проектировщик), то он берется за основу. Если не удовлетворяет, то переходим ко второму этапу (прямая задача) или третьему этапу (Обратная задача).

2 этап. *Решение прямой задачи векторной оптимизации*, которая состоит в следующем: «Какие будут показатели (характеристики), если изменить параметры системы». - Используется метод решения векторной задачи при равнозначных критериях, представленный в разделе 2.2.3.

3. этап. *Решение обратной задач векторной оптимизации*, которая состоит в следующем: «Какие будут параметры системы при заданных показателях (характеристиках) системы». - Используется метод решения векторной задачи при заданном приоритете критерия, представленный в разделе 2.3.3.

4. Моделирование экономической системы и принятие оптимального решения на базе векторной задачи линейного программирования

В соответствии с процессом моделирования экономических систем на базе векторной задачи линейного программирования (раздел 3.3) представим на примере формирования производственного плана предприятия (экономической системы) в виде векторной задачи линейного программирования.

4.1. Техническое задание на моделирование социально-экономической системы

Дано. Предприятие выпускает однородную продукцию двух видов, ***N***=2. При производстве изделий используется два ресурса ***M***=2. Числовые значения технологической матрицы производства представлены в табл. 1, где x_1, x_2 определяют объемы продукции первого и второго вида. Объем трудовых затрат, представленный отношением $7.3x_1 + 8.64x_2$, должен превышать 16000 т. руб. Маркетинговые ограничения, определяемые рынком, составляют:

$$x_1 = 600, \; x_2 = 540. \qquad (4.1)$$

Затраты, связанные с управленческими и коммерческими расходами представлены в таблице 1.

Таблица 1

Затраты ресурсов и производственные показатели

Вид Ресурсов	Затраты ресурсов на одно изделие		Производственные возможности фирмы по каждому виду ресурсов
	Вид 1	Вид 2	
Трудовые a_{11}, a_{12}	7.2	8.64	5184
Материальные a_{21}, a_{22}	8.2	7.6	5355
Управленческие и коммерческие расходы	20.4	5.36	Т. руб. на 1 изделие
Валовая прибыль	8.1	18.5	
Налоги 20% от валовой прибыли	1.62	3.7	
Доход от продажи ед. продукции (тысяч руб.) $c_j^1, j = 1,2$	43.2	36	Максимизировать
Прибыль $c_j^2, j = 1,2$	7.3	14.4	Максимизировать
Стоимость трудовых ресурсов	7.2	8.64	Минимизировать
Объем продукции	x_1	x_2	Определить

Требуется определить производственный план предприятия, который включает показатели по номенклатуре (по видам изделий) и по объему, т. е. сколько изделий соответствующего вида x_1, x_2 следует изготовить предприятию, чтобы доход и прибыль при их реализации была как можно выше, а затраты меньше. Составить математическую модель задачи, решить ее.

4.2. Построение модели социально-экономической системы

Построение математической модели производственной части включает формирование критериев, экономических показателей и ограничений.

Критерии. 1 критерий – Максимизация объема продаж:

$$f_1(X) \equiv 43.2x_1 + 36x_2. \quad (4.2)$$

2 критерий – Максимизация прибыли: $f_2(X) \equiv 7.3x_1 + 14.4x_2.$ (4.3)

3 критерий – Минимизация затрат на изготовляемую продукцию:

$$f_3(X) \equiv 7.2x_1 + 8.64x_2. \quad (4.4)$$

Экономические показатели. Валовая прибыль: $f_4(X) \equiv 8.1x_1 + 18.5x_2.$ (4.5)

Налоги 20% (Социальная направленность): $f_5(X) \equiv 1.62x_1 + 3.7x_2.$ (4.6)

Валовая добавленная стоимость (материалы): $f_6(X) \equiv 34.6x_1 + 28.4x_2.$ (4.7)

Ограничения. 1 ограничение по трудовым ресурсам:

$$7.2x_1 + 8.64x_2 \leq 5184. \quad (4.8)$$

2 ограничение по материальным ресурсам: $8.2x_1 + 7.6x_2 \leq 5355.$ (4.9)

3 ограничение – минимальный производственный план:

$$7.3x_1 + 7.1x_2 \geq 1600. \quad (4.10)$$

4 ограничение по маркетинговым исследованиям рынка: $x_1 = 600,\ x_2 = 540.$

Цель производителя получить доход $f_1(X)$ (4.2) и прибыль (4.3) $f_2(X)$ от продажи изделий как можно выше при минимизации себестоимости выпускаемых изделий (4.4) $f_3(X)$ с учетом ограничений по трудовым (4.8) и минимальных плановых ресурсах (4.10). Отсюда целевую направленность можно выразить с помощью векторной задачи линейного программирования, которая примет следующий вид:

$$Opt\ F(X) = \{max\ F_1(X) = \{max\ f_1(X) \equiv 43.2x_1 + 36x_2, \quad (4.11)$$
$$max\ f_2(X) \equiv 7.3x_1 + 14.4x_2\}, \quad (4.12)$$
$$min\ F_2(X) = \{min\ f_3(X) \equiv 7.2x_1 + 8.64x_2\}\}, \quad (4.13)$$
$$7.2x_1 + 8.64x_2 \leq 5184, \quad (4.14)$$
$$8.2x_1 + 7.6x_2 \leq 5355, \quad (4.15)$$
$$7.3x_1 + 7.1x_2 \geq 1600, \quad (4.16)$$
$$x_1 \leq 600, x_2 \leq 540, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad (4.17)$$

В ВЗЛП (4.11)-(4.17) формулируется следующее: требуется найти неотрицательное решение x_1, x_2, в системе неравенств (4.14)-(4.17) такое, при котором функции $f_1(X)$ и $f_2(X)$ принимают максимально возможное значение, а функция $f_3(X)$минимальное значение.

ВЗЛП (4.11)-(4.17) представляет трехмерную математическую (линейную) задачу с двумя параметрами.

4.3. Решение векторной задачи линейного программирования – модели системы с равнозначными критериями

Решение векторной задачи линейного программирования (4.11)-(4.17) в соответствии с алгоритмом решения ВЗЛП на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата представим в системе MATLAB. Структура ВЗЛП (4.11)-(4.17) эквивалентна ВЗЛП (4.1)-(4.5). Поэтому для решения задачи линейного программирования (4.11)-(4.17) используем исходную информацию, с названием VPLP_DATA_3. Программное обеспечение включает два блока.

1 блок (подпрограмма): Подготовка исходной информации для решения ВЗЛП: VPLP_DATA_N. Подробнее смотри [33].

```
disp('Matrix of criteria')
c=[-43.2 -36.;    %   стоимость
   -7.3 -14.4;   %   прибыль
```

```
  7.2  8.64];   %   труд
disp('Matrix of restrictions')
a=[7.2 8.64;    %  труд
  8.2 7.6;     %  Материалы
 -7.3 -7.1];   %  минимальная плановая загрузка
disp('Vector of restrictions ')
b=[5184.  5355. -1600.]; %
disp('Restrictions of type of equalities ')
Aeq=[]; Beq=[];
disp('Lower bound of variables')
Lb=[0. 0.];
disp('Upper bound of variables')
Ub=[600. 540.];   %
[Xo,Lo,FXo,LXo,Xopt,FXoptLXopt] = VPLP_Solution(k,c,a,b,Aeq,Beq,Lb,Ub)
```

2 блок (подпрограмма): представляет функцию «Решение векторной задачи линейного программирования». Решение представляет пять шагов.

Шаг 1. Решается векторная задача линейного программирования (4.11)-(4.17) на max по каждому критерию отдельно. Представим результаты решения ВЗЛП (4.11)-(4.17) по каждому критерию:

1 критерий. $X_1^* = \{x_1 = 600. x_2 = 57.23\}, f_1^* = f_1(X_1^*) = -27981;$

2 критерий. $X_2^* = \{x_1 = 72.0, x_2 = 240.0\}, f_2^* = f_2(X_2^*) = -8301.6;$

3 критерий. $X_3^* = \{x_1 = 219.17, x_2 = 0.0\}, f_3^* = f_3(X_3^*) = -1578.1.$

Шаг 2. Решается векторная задача линейного программирования (4.11)-(4.17) решается на min по каждому критерию отдельно. Представим результаты решения ВЗЛП (4.11)-(4.17) по каждому критерию:

1 критерий. $X_1^0 = \{x_1 = 0.0, x_2 = 225.35\}, f_1^0 = f_1(X_1^0) = 8112.7;$

2 критерий. $X_2^0 = \{x_1 = 219.17, x_2 = 0.0\}, f_2^0 = f_2(X_2^0) = 1600.0;$

3 критерий. $X_3^0 = \{x_1 = 425.8, x_2 = 245.08\}, f_3^0 = f_3(X_3^0) = 5184.$

Геометрическая интерпретация допустимого множества точек (решений) $\boldsymbol{S}$, определяемых ограничениями (4.14)-(4.17), представлена на рис. 1.

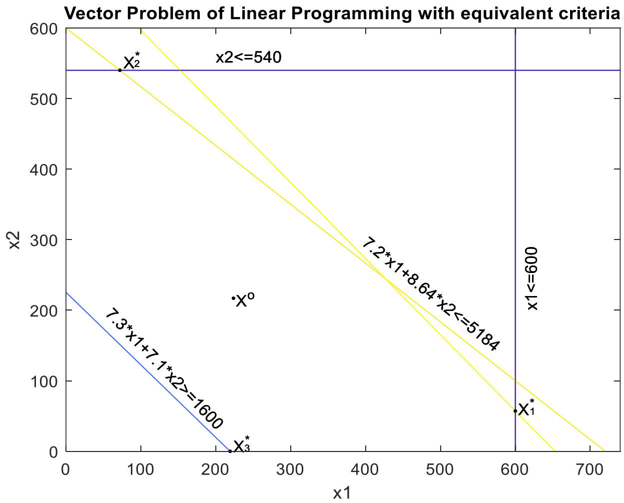

Рис. 1. Допустимое множество решений ВЗЛП (4.14)-(4.17) и результаты решения: множество точек оптимальных по Парето $\boldsymbol{S^o}$, ограниченное $\{X_1^*, X_2^*, X_3^*\}$, $\boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$ и оптимум X^o

Шаг 3. Системный анализ множества точек Парето (результатов решения на 1,2 шаге) выполняется в системе MATLAB. В точках оптимума $X^* = \{X_k^*, k = \overline{1, K}\}$, определяются величины целевых функций $F(X^*)$ и относительных оценок $\lambda(X^*)$, которые определяют результат системного анализа:

$F(X^*) = \{\{f_q(X_k^*), q = \overline{1, K}\}, k = \overline{1, K},\ K = 3\ \}$, в точках оптимума X_1^*, X_2^* and X_3^*:

$$F(X^*) = \{f_k(X_k^*), q = \overline{1,K}, k = \overline{1,K},\ K = 3\} = \begin{vmatrix} -27981 & -5204 & 4815 \\ -22550 & -8302 & 5184 \\ -9468 & -1600 & 1578 \end{vmatrix}, \qquad (4.18)$$

$\lambda(X^*) = \{\{\lambda_q(X_k^*), q = \overline{1,K}\}, k = \overline{1,K,\ K = 3}\}$, в точках оптимума X_1^*, X_2^* and X_3^*:

$$\lambda(X^*) = \{\lambda_q(X_k^*), q = \overline{1,K}, k = \overline{1,K},\ K = 3\} = \begin{vmatrix} 1.00 & 0.5378 & 0.1025 \\ 0.7267 & 1.00 & 0 \\ 0.0682 & 0 & 1.00 \end{vmatrix}. \qquad (4.19)$$

Системный анализ. В точках оптимума $X_k^*, k = \overline{1,K}$ все нормализованные критерии (относительные оценки) (4.19) равны единице:

$$\lambda_k(X_k^*) = \frac{f_k(X_k^*) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0} = 1, k = \overline{1,K}, K = 3.$$

В точках оптимума $X_k^0, k = \overline{1,K}$ нормализованные критерии равны нулю:

$$\lambda_k(X_k^0) = \frac{f_k(X_k^0) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0} = 0, k = \overline{1,K}, K = 3.$$

В итоге: $\forall k \in \boldsymbol{K}, \forall X \in \boldsymbol{S},\ 0 \le \lambda_k(X) \le 1$.

Требуется найти такую точку, которая наиболее близка к единице (или 100 % от своих оптимальных значений). На это направлены четвертый и пятый шаги.

Шаг 4. Построение λ-задачи.

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{\boldsymbol{X \in S}}\, \lambda, \qquad (4.20)$$

$$\lambda - \frac{f_k(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0} \le 0, k = \overline{1,K}, K = 3,$$

$$G(X) \le B, X \ge 0,\ \text{-}\ (4.14)\text{-}(4.17).$$

Шаг 5. Решение λ-задачи.

В результате решения векторной задачи линейного программирования (4.11)-(4.17) при равнозначных критериях и соответствующей λ-задачи (4.20) получим: точку оптимума $X^o = \{x_k^o, k = \overline{1,K}\}$: $\boldsymbol{X^o} = \{x_1 = 0.4711, x_2 = 223.4, x_3 = 217.0\}$,
где $\boldsymbol{X^o}$ определяет переменные; координаты x_1 соответствуют λ^o– максимальному относительному уровню: $x_1 = \lambda^o$; и x_2, x_3 соответствуют x_1, x_2 задачи (4.11)-(4.17).

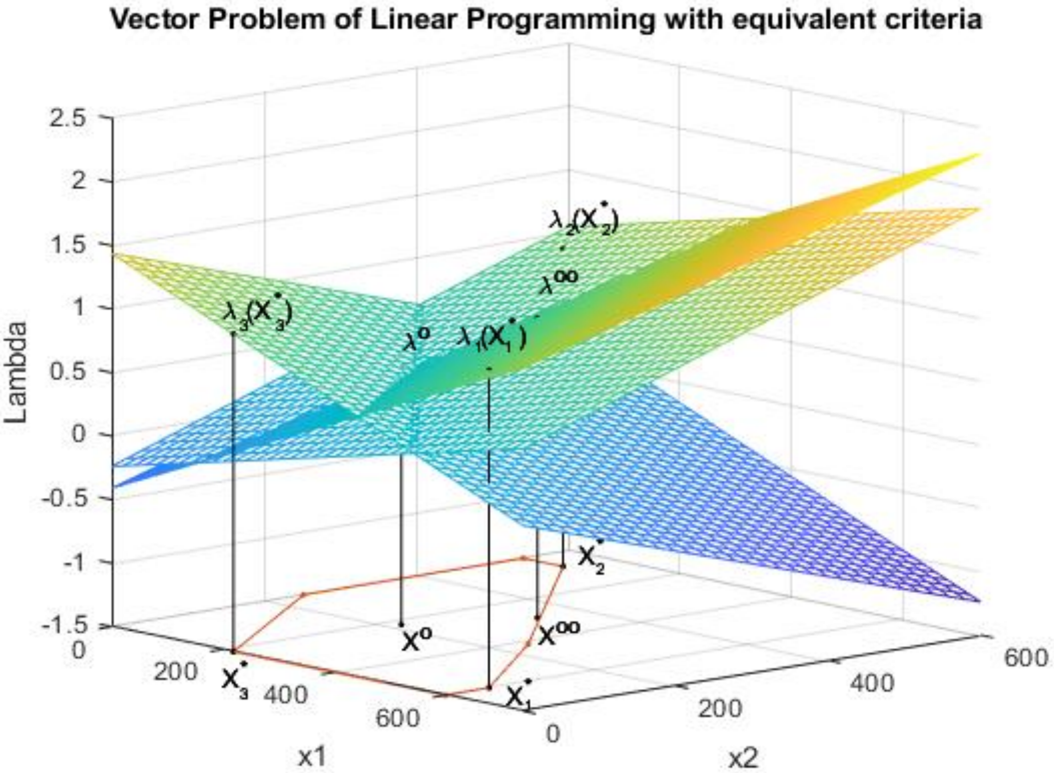

Рис. 2. Результаты решения ВЗЛП (4.11)-(4.17):
функции: $\lambda_1(X), \lambda_2(X)$ *and* $\lambda_3(X)$ точки оптимума X^o и λ^o

Заметим, что ВЗЛП (4.11)-(4.17) на рис. 2 представляет трехмерную математическую задачу с двумя параметрами. Однокритериальная математика такого не может представить.

Lo $= \lambda^o = 0.4711$ представляет оптимальную величину целевой функции. λ^o является максимальным уровнем среди всех минимальных относительных оценках на допустимом множестве $X \in \boldsymbol{S}$:

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{X \in S} \boldsymbol{min}_{k \in K} \lambda_k(X).$$

Функции $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3(X)$ и точки оптимума X^o и λ^o которые получены и представлены на рис. 2. Выполним проверку:

$f_1(X^o) = -17473, f_2(X^o) = -4757, f_3(X^o) = 3485;$

$\lambda_1(X^o) = 0.4711 \lambda_2(X^o) = 0.4711; , \lambda_3(X^o) = 0.4711; \lambda^o \leq \lambda_k(X^o), k = 1, 2, 3.$

Эти результаты показывают, что в точке оптимума X^o три критерия $\lambda_1(X^o), \lambda_2(X^o), \lambda_3(X^o)$, измеренные в относительных единицах, достигли уровня: $\lambda^o = 0.4711$ от своих оптимальных величин f_1^*, f_2^*, f_3^*. Любое увеличение одного из критериев выше этого уровня приводит к уменьшению другого критерия, т.е. точка X^o оптимальна по Парето.

4.4. Модель экономической системы с равнозначными критериями с измененными параметрами (Решение прямой задачи)

Решение прямой задачи, которая состоит в следующем: «Какие будут показатели (характеристики), если изменить параметры». В производственном плане, представленного ВЗЛП (4.11)-(4.17) изменим 3 ограничение по минимальному производственному плану, который должен превышать 2600:

$7.3x_1 + 7.1x_2 \geq \mathbf{2600}$. В итоге ВЗЛП (4.11)-(4.17) примет вид:

$$Opt\, F(X) = \{max\, F_1(X) = \{max\, f_1(X) \equiv 43.2x_1 + 36x_2, \quad (4.21)$$

$$max\, f_2(X) \equiv 7.3x_1 + 14.4x_2\}, \quad (4.22)$$

$$min\, F_2(X) = \{min\, f_3(X) \equiv 7.2x_1 + 8.64x_2\}\}, \quad (4.23)$$

$$7.2x_1 + 8.64x_2 \leq 5184, \quad (4.24)$$

$$8.2x_1 + 7.6x_2 \leq 5355, \quad (4.25)$$

$$7.3x_1 + 7.1x_2 \geq \mathbf{2600}, \quad (4.26)$$

$$x_1 \leq 600, x_2 \leq 540, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad (4.27)$$

Программное обеспечение включает два блока.

1 блок (подпрограмма): Подготовка исходной информации для решения ВЗЛП: VPLP_DATA_N. Подробнее смотри [33].

2 блок (подпрограмма): представляет функцию «Решение векторной задачи линейного программирования». Решение представляет пять шагов.

Шаг 1. Решается векторная задача линейного программирования (4.21)-(4.27) на max по каждому критерию отдельно. Представим результаты решения ВЗНП (4.21)-(4.27) по каждому критерию:

1 критерий. $X_1^* = \{x_1 = 600.0, x_2 = 57.23\}, f_1^* = f_1(X_1^*) = -27981;$

2 критерий. $X_2^* = \{x_1 = 72.0, x_2 = 240.0\}, f_2^* = f_2(X_2^*) = -8301.6;$

3 критерий. $X_3^* = \{x_1 = 336.16, x_2 = 0.0\}, f_3^* = f_3(X_3^*) = -1564.4.$

Шаг 2. Решается векторная задача нелинейного программирования (4.21)-(4.27) решается на min по каждому критерию отдельно. Представим результаты решения ВЗНП (4.21)-(4.27) по каждому критерию:

1 критерий. $X_1^0 = \{x_1 = 0.0, x_2 = 366.19\}, f_1^0 = f_1(X_1^0) = 13183;$

2 критерий. $X_2^0 = \{x_1 = 366.19, x_2 = 0.0\}, f_2^0 = f_2(X_2^0) = 2600.0;$

3 критерий. $X_3^0 = \{x_1 = 425.8, x_2 = 245.08\}, f_3^0 = f_3(X_3^0) = 5184.0.$

Геометрическая интерпретация допустимого множества точек (решений) $\boldsymbol{S}$, определяемых ограничениями (4.24)-(4.27), представлена на рис. 3.

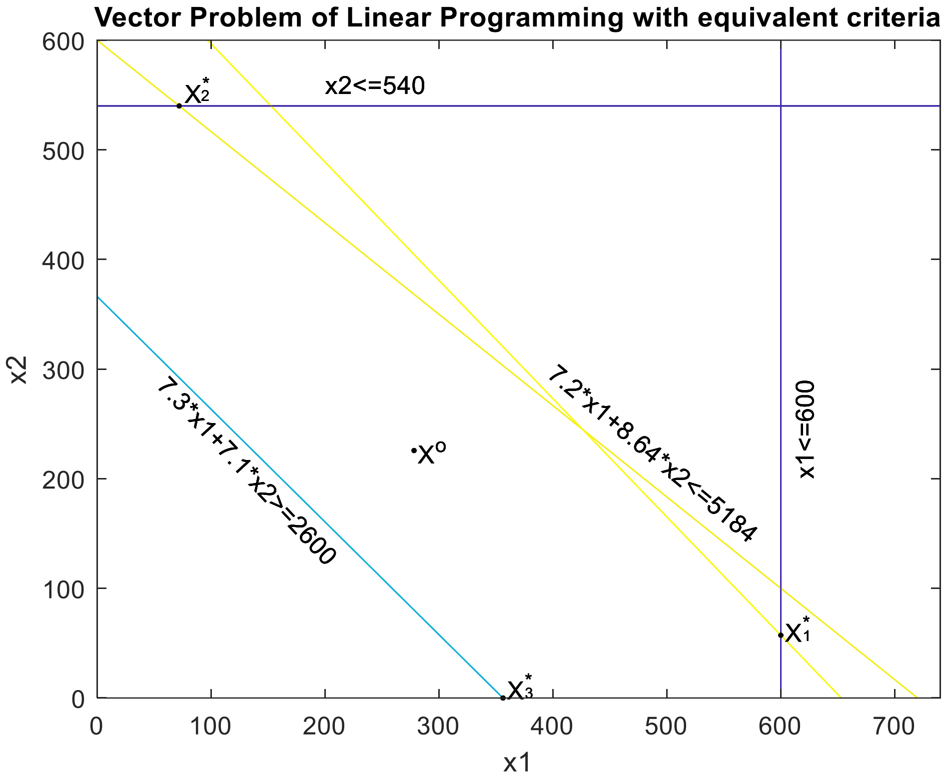

Рис. 3. Допустимое множество точек (4.21)-(4.27),
точки оптимума X_1^*, X_2^* and X_3^* и точка оптимума $\boldsymbol{X^o}$.

Шаг 3. Системный анализ множества точек Парето (результатов решения на 1, 2 шаге) выполняется в системе MATLAB.

В точках оптимума $X^* = \{X_k^*, k = \overline{1,K}\}$, определяются величины целевых функций $F(X^*)$ и относительных оценок $\lambda(X^*)$:

$F(X^*) = \{\{f_q(X_k^*), q = \overline{1,K}\}, k = \overline{1,K},\ K = 3\},$

$\lambda(X^*) = \{\{\lambda_q(X_k^*), q = \overline{1,K}\}, k = \overline{1,K},\ K = 3\},$ в точках оптимума X_1^*, X_2^* and X_3^*. В результате решения ВЗЛП (4.21)-(4.27) получили:

Во-первых, результаты системного анализа, которые включают:

Точки оптимума по каждому критерию:

$$X^* = \{X_k^*,\ k = \overline{1,K},\ K = 3\} = \begin{vmatrix} 600.0000 & 57.2368 \\ 72.0000 & 540.0000 \\ 356.1644 & 0 \end{vmatrix}; \qquad (4.28)$$

величины критериев $f_q(X_k^*), q = \overline{1,K}, k = \overline{1,K},\ K = 3$ в точках X_1^*, X_2^* and X_3^* (4.28):

$$F(X^*) = \{f_q(X_k^*), q = \overline{1,K}, k = \overline{1,K}\} = \begin{vmatrix} -27981 & -5204 & 4815 \\ -22550 & -8302 & 5184 \\ -15386 & -2600 & 2564 \end{vmatrix};$$

величины относительных оценок в точках X_1^*, X_2^* and X_3^* (4.28):

$$\lambda(X^*) = \{\lambda_q(X_k^*), q = \overline{1,K}, k = \overline{1,K},\ K = 3\} = \begin{vmatrix} 1.0 & 0.4568 & 0.141 \\ 0.633 & 1.0 & 0.000 \\ 0.1489 & 0 & 1.0 \end{vmatrix}.$$

Во-вторых, решение ВЗЛП (4.21)-(4.27) на антиоптимум:

Точки оптимума по каждому критерию:

$$X^{min} = \{X_k^0,\ k = \overline{1,K},\ K = 3\} = \begin{vmatrix} 0.0 & 366.2 \\ 356.16 & 0.0 \\ 425.9 & 245.0 \end{vmatrix};$$

величины критериев $f_q(X_k^0), q = \overline{1,K}, k = \overline{1,K},\ K = 3$ в точках антиоптимума X_1^0, X_2^0 and X_3^0:

$$F(X^{min}) = \{f_q(X_k^0), q = \overline{1,K}, k = \overline{1,K}\} = \begin{vmatrix} -13183 & -5273 & 3164 \\ -15386 & -2600 & 2564 \\ -27222 & -6638 & 5184 \end{vmatrix};$$

В-третьих, решение ВЗЛП (4.21)-(4.27) при равнозначных критериях (Решение λ-задачи по аналогии реализовано на четвертом и пятом шаге):

$$\boldsymbol{X^o} = \{ x_1 = 0.4701, x_2 = 278.1, x_3 = 225.7\}. \quad (4.29)$$

где $\boldsymbol{X^o}$ определяет переменные; координаты x_1 соответствуют λ^o– максимальному относительному уровню: $x_1 = \lambda^o$; и x_2, x_3 соответствуют x_1, x_2 задачи (4.21)-(4.27). Критерии в точке X^o равны:

$$F(X^o) = \{f_1(X^o) = 20140, f_2(X^o) = 5280, f_3(X^o) = 3952\}. \quad (4.30)$$

Lo $= \lambda^o =$ 0.4701 представляет оптимальную величину целевой функции.

Величины относительных оценок в точке оптимума X^o:

$$\lambda(X^o) = \{\lambda_1(X^o) = 0.4701, \lambda_2(X^o) = 0.4701, \lambda_3(X^o) = 0.4701\}.$$

λ^o является максимальным уровнем среди всех минимальных относительных оценках на допустимом множестве $X \in \boldsymbol{S}$:

$$\lambda^o = \boldsymbol{max_{X \in S} min_{k \in K}} \lambda_k(X). \quad (4.31)$$

Функции $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3(X)$ и точки оптимума X^o и λ^o, которые получены и представлены на рис. 4.

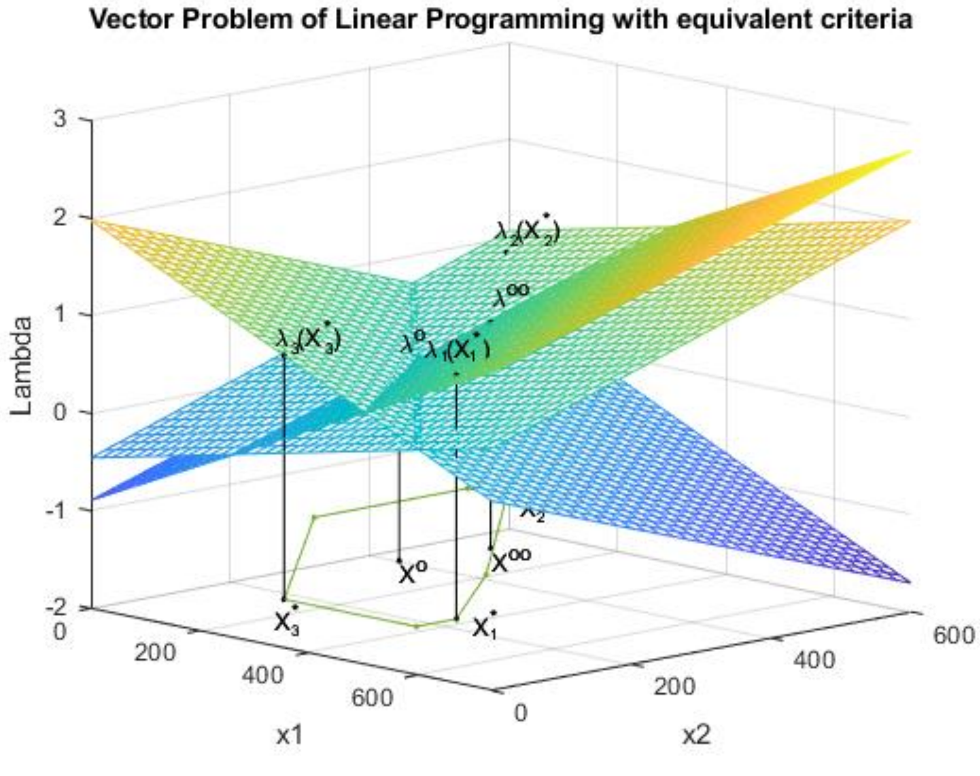

Рис. 3.4. Результат решения ВЗЛП (4.21)-(4.27).
Функции $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3(X)$ и точки оптимума X^o и λ^o.

Заметим, что ВЗЛП (4.21)-(4.27) на рис. 4 представляет трехмерную математическую задачу с двумя параметрами.

4.5. Решение обратной задачи – модели системы с равнозначными критериями

Решение обратной задачи состоит в следующем: «Какие будут параметры системы при заданных показателях (характеристиках) системы».

В нашем примере выберем показатель $f_2(X)$ - «Прибыль». При решении по второму критерию (прибыль) в точке оптимума X_2^* получили (4.12):

$f_2(X_2^*) = 8301.6$. При решении ВЗЛП (4.21)-(4.27) при равнозначных критериях в точке оптимума X^o получили $f_2(X^o) = 5280$, $\lambda_2(X^o) = 0.4701$. Отсюда показатель прибыли лежит в пределах:

$f_2(X^o) = 5280 \leq f_2(X) \leq f_2(X_2^*) = 8301.6$,

или в относительных единицах: $\lambda_2(X^o) = 0.4701 \leq \lambda_2(X) \leq \lambda_2(X_2^*) = 1$.

Встает вопрос, какие должны быть параметры производства x_1, x_2, при которых прибыль будет равна, например, $f_2(X) = 7000$. Далее в соответствии с алгоритмом раздела 2.3.

Шаг 4. Выбор величины приоритетного критерия $q = 2 \in \boldsymbol{K}$. (Decision-making).

На сообщение: «Введите величину приоритетного критерия *fq*=» - вводим, например, f_q=7000.

Шаг 5. *Вычисляется относительная оценка.*

Для выбранной величины приоритетного критерия $f_q = 7000$ вычисляется относительная оценка: %fmin = 2727.3 FXopt(q,q) = -8294.4

$$\lambda_q = \frac{f_q - f_q^0}{f_q^* - f_q^0} = \frac{7000-2727.3}{8294-2727.3} = 0.7717. \tag{4.32}$$

которая при переходе от точки X^o к точке X_q^* лежит в пределах:

$0.4454 = \lambda_2(X^o) \leq \lambda_2 = 0.7717 \leq \lambda_2(X_2^*) = 1, q \in \boldsymbol{K}$.

Шаг 6. Вычислим коэффициент линейной аппроксимации

Предполагая линейный характер изменения критерия $f_q(X)$ и соответственно относительной оценки λ_q, используя стандартные приемы линейной аппроксимации, вычислим коэффициент пропорциональности между $\lambda_q(X^o)$, λ_q, который назовем ρ:

$$\rho = \frac{\lambda_q - \lambda_q(X^o)}{\lambda_q(X_q^*) - \lambda_q(X^o)} = \frac{0.7717-0.4454}{1-0.4454} = 0.5692, q = 3 \in \boldsymbol{K}. \tag{4.33}$$

Шаг 7. Вычислим координаты приоритета критериев размерности f_q.

Предполагая линейный характер изменения вектора $X^q = \{x_1, x_2\}$, q=2 определим координаты для точки с размерностью fq =7000:

$$\begin{aligned} x_{\lambda=0.7}^{q=2} &= \{x_1^q = x_1^o + \rho(x_2^*(1) - x_1^o) = 278.1 + 0.5692(72 - 278.1) = 182.4, \\ x_2^q &= x_2^o + \rho(x_2^*(2) - x_2^o) = 225.7 + 0.5692(540 - 225.7) = 394{,}9\}, \end{aligned} \tag{4.34}$$

где $X^o = \{x_1^o = 278.1, x_2^o = 225.7\}$, $X_2^* = \{x_2^*(1) = 72.0, x_2^*(2) = 540\}$.

Как результат решения мы получим точку с координатами:

$X^q = \{x_1^q = 160.79, x_2^q = 404{,}59\}$.

Шаг 8. Вычисление в точке X^q главных показателей $f_2(X^q)$.

Для полученной точки X^q, вычислим:

все критерии в натуральных единицах $f_k(X^q) = \{f_k(X^q), k = \overline{1,K}\}$,

$$f_1(X) \equiv 43.2x_1^q + 36x_2^q = 43.2 * 160.79 + 36 * 404{,}59 = 21512,$$
$$f_2(X) \equiv 7.3x_1^q + 14.4x_2^q = 7.3 * 160.79 + 14.4 * 404{,}59 = 6983.9,$$
$$f_3(X) \equiv 7.2x_1^q + 8.64x_2^q = 7.2 * 160.79 + 8.64 * 404{,}59 = 4653.4.$$
$$f(X^q) = \{f_1(X^q) = 21512, f_2(X^q) = 6983.9, f_3(X^q) = 4653.4\};$$

все относительные оценки критериев:

$$\lambda^q = \{\lambda_k^q, k = \overline{1,K}\},\ \lambda_k(X^q) = \frac{f_k(X^q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1,K}:$$

$$\lambda_k(X^q) = \{\lambda_1(X^q) = 0.5628, \lambda_2(X^q) = 0.7689, \lambda_3(X^q) = 0.2025\}. \tag{4.35}$$

Минимальная относительная оценка:

$\min\lambda(X^q) = \min\limits_{k \in K}(\lambda_k(X^q)) = 0.2025$.

Допустимое множество точек, представленное ограничениями (4.24)-(4.27) представлено на рис. 5.

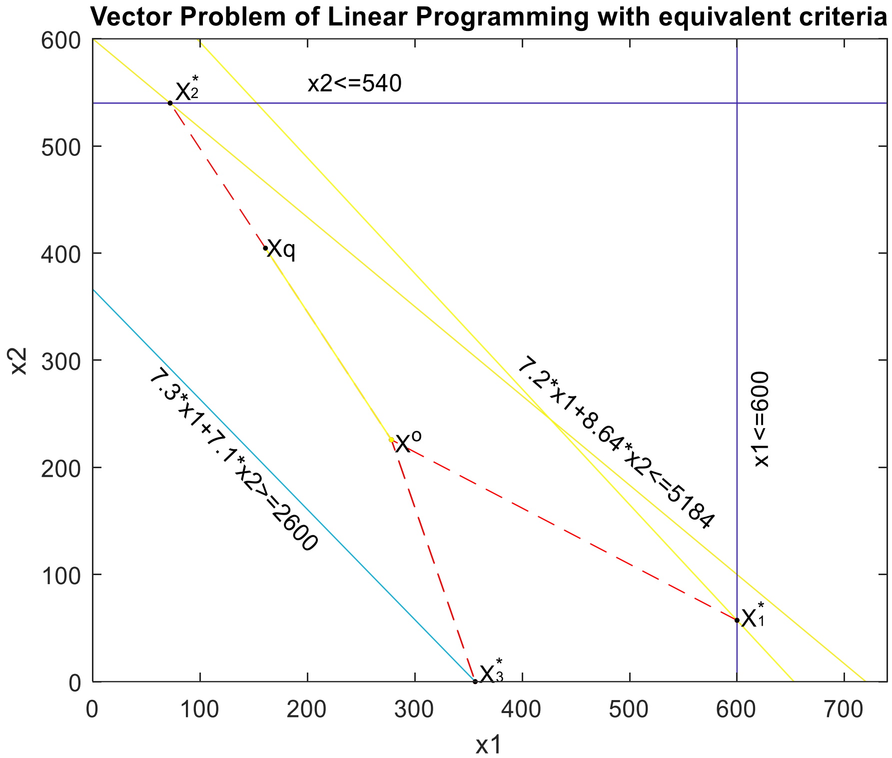

Рис. 5. Допустимое множество точек (4.24)-(4.27), точки оптимума X_1^*, X_2^* and X_3^*, точка оптимума $\boldsymbol{X^o}$ и точка оптимума X^q, полученная при приоритете критерия $q = 2$.

Функции $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3(X)$, точки оптимума X^o, λ^o и точка оптимума X^q, полученная при приоритете критерия q, представлены на рис. 6.

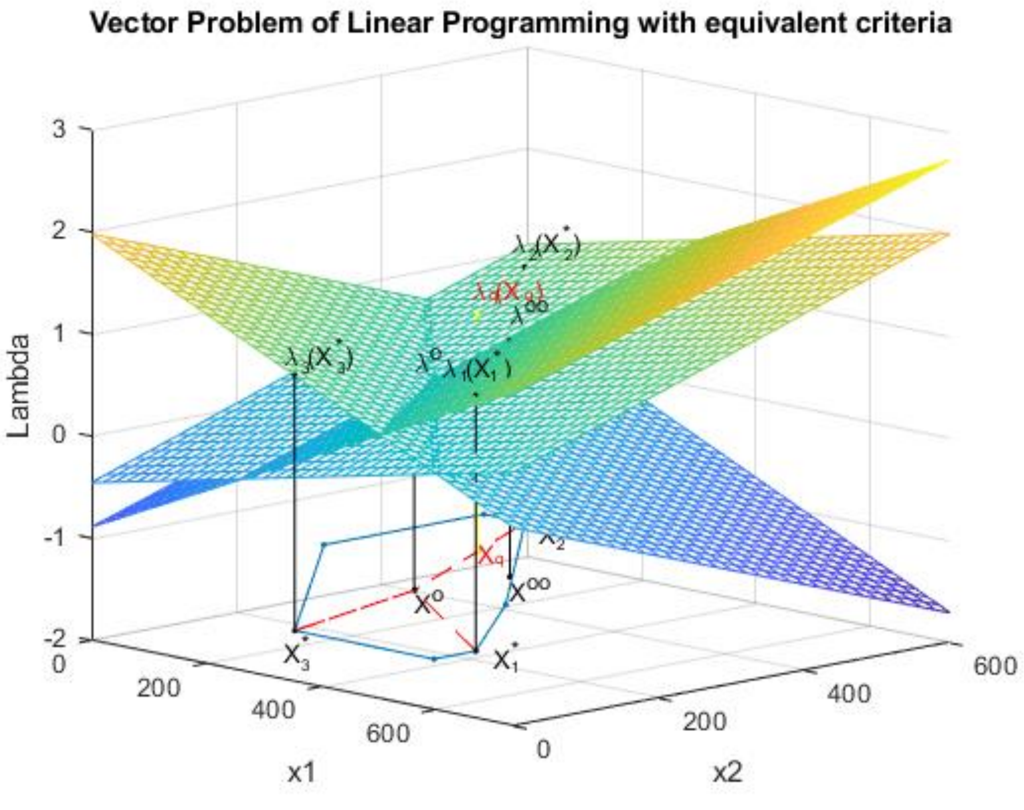

Рис. 6. Функции $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3(X)$, точки оптимума X^o и λ^o и точка оптимума X^q, полученная при приоритете критерия $q = 2$

Вектор приоритетов $P^q(X) = \{p_k^q = \frac{\lambda_q(X^q)}{\lambda_k(X^q)}, k = \overline{1,K}\}$:

$P^{q=2} = [p_1^2 = 1.3661, p_2^2 = 1.0, p_3^2 = 3.7963]$.

4.6. Анализ результатов моделирования

Рассчитанная величина $f_q(X) = 6983.9, q = 2 \in \boldsymbol{K}$ обычно не равна заданной $f_q = 7000$. Ошибка выбора

$\Delta f_q = |f_q(X) - f_q| = |6983.9 - 7000| = 16.1$ определяется ошибкой линейной аппроксимации: $\Delta f_{q\%} = 0.1\%$.

Если ошибка $\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q| = |6983.9 - 7000| = 16.1$, измеренная в натуральных единицах или в процентах $\Delta f_{q\%} = \frac{\Delta f_q}{f_q} * 100 = 0.1\%$, больше заданной $\Delta f, \Delta f_q > \Delta f$, то переходим к шагу 2, если $\Delta f_q \leq \Delta f$, то вычисления завершаются. ***Конец***.

В процессе моделирования могут быть изменены параметрические ограничения и функции, т. е. получено некоторое множество оптимальных решений. Из этого множества оптимальных решений выбираем окончательный вариант (процесс принятия решений). Аналогично другие точки из области Парето $\boldsymbol{X_t^o} = \{\lambda_t^o, X_t^o\} \in \boldsymbol{S^o}$ могут быть получены.

Заключение

Проблема исследования, анализа, разработки теоретических основ и конструктивных методов решения задач многомерной математики. является одной из важнейших задач системного анализа и проектирования.

В работе проведен анализ развития современной математики (одно функциональной). Разработаны теоретические основы: аксиоматика, принципы оптимальности и методы решения многомерных (многофункциональных) систем. Представлено построение математических моделей локальных и сложных объектов. Разработано программное обеспечение решения линейных векторных задач оптимизации. Показаны конструктивные методы решения многомерных (векторных) задач оптимизации при равнозначных критериях, при заданном приоритете критерия. Реализация методологии моделирования многомерных (многофункциональных) систем представлена на численных примерах экономических задач в условиях определенности и неопределенности. Разработанное математическое обеспечение целесообразно использовать для исследования и на стадии проектирования выбора оптимальных параметров экономических систем.

Список литературы:

1. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И. В. Виноградов. –М.: Советская Энциклопедия. Т.1 А - Г. 1977. 1152 с.
2. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И. В. Виноградов. –М.: Советская Энциклопедия. Т.3 Коо -Од - М. 1982. 1184 с.
3. Pareto V. Cours d’Economie Politique. Lausanne: Rouge, 1896.
4. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. - М.: Мир, 1964, 837 с.
5. Гермейер Ю.Б. Игры с не противоположными интересами. – М.: Наука, 1976, 326 стр.
6. Зак Ю.А. Многоэтапные процессы принятия решений в задаче векторной оптимизации // АиТ. 1976. № 6, С. 41-45.
7. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе В.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Физматиз. 1961. 268 с.
8. Красовский Н.Н., Красовский А.Н., Третьяков В.У. Управление динамической системой. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. 195 с.
9. Прядкин Л.Л., Гончаров А.Л., Бойчук В.Г. Автоматизация управления технологическими процессами в прокатном производстве на базе микропроцессорной технике. – М.: ЦНИИТЭИ приборостроения, 1986. 136 с.
10. Ю.Н. Киселёв, С.Н. Аввакумов, М.В. Орлов. Оптимальное управление. Линейная теория и приложения. – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, 2007. – 270 с. ISBN 5-89407-288-3.

11. Добрынина И.С., Карпов И.И., Черноусько Ф.Л. Метод декомпозиции в задачах управления системой твердых тел // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1995.№ 2.

12. Краснощеков П.С., Морозов В.В., Федоров В. В. Последовательное агрегирование в задачах внутреннего проектирования технических систем// Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1979. N 5.

13. Михайлевич В. С., Волкович В. П. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. М.: Наука, 1982, 285 с.

14. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука. 1982. 256 с.

15. Машунин Ю.К. Методы и модели векторной оптимизации. - М.: Наука, 1986. 141 с.

16. Машунин Ю. К., Левицкий В. Л. Методы векторной оптимизации в анализе и синтезе технических систем: монография. - Владивосток: ДВГАЭУ, 1996. 131 с.

17. Машунин Ю.К. Решение композиционных и декомпозиционных задач синтеза сложных технических систем методами векторной оптимизации//Изв. РАН. ТиСУ. 1999. №3. С. 88-93.

Yu. K. Mashunin, “Solving composition and decomposition problems of synthesis of complex engineering systems by vector optimization methods,” Comput. Syst. Sci. Int. 38, 421 (1999). (Scopus).

18. Машунин Ю.К., Машунин К.Ю. Моделирование технических систем в условиях неопределенности и принятие оптимального решения //Изв. РАН. ТиСУ. 2013. №4. С. 19-35.

Mashunin K. Yu., and Mashunin Yu. K. Simulation Engineering Systems under Uncertainty and Optimal Decision Making. Journal of Comput. Syst. Sci. Int. Vol. 52. No. 4. 2013. 519-534. (Scopus)

19. Машунин Ю.К. Теория управления. Математический аппарат управления в экономических системах. – М.: Логос. 2013. 448 с. (Новая университетская библиотека)

20. Mashunin Yu.K. Mashunin K.Yu. Modeling of technical systems on the basis of vector optimization (1. At equivalent criteria) / International Journal of Engineering Sciences & Research Technology. 3(9): September, 2014. P. 84-96 .

21. Mashunin Yu.K. Mashunin K.Yu. Modeling of technical systems on the basis of vector optimization (2. with a Criterion Priority) / International Journal of Engineering Sciences & Research Technology. 3(10): October, 2014. P. 224-240.

22. Yu. K. Mashunin, K. Yu. Mashunin. Simulation and Optimal Decision Making the Design of Technical Systems // American Journal of Modeling and Optimization. 2015. Vol. 3. No 3, 56-67.

23. Yu. K. Mashunin, K. Yu. Mashunin. Simulation and Optimal Decision Making the Design of Technical Systems (2. The Decision with a Criterion Priority) // American Journal of Modeling and Optimization. 2016. Vol. 4. No 2, 51-66.

24. Yu. K. Mashunin, “Methodology of the Choice of Optimum Parameters of Technological Process on Experimental to Data. «American Journal of Modeling and Optimization, vol. 7, no. 1 (2019): 20-28. Doi: 10.12691/ajmo-7-1-4.

25. Yu. K. Mashunin. Vector optimization in the system optimal Decision Making the Design in economic and technical systems // International Journal of Emerging Trends & Technology in Computer Science. 2017. Vol. 7. No 1, 42-57.

26. Mashunin, Yu. K, Optimal designing in the interrelation technical system – Materials (Theory) // Mathematical methods in engineering and technology: proceedings of international. Science. Conf.: 12 tons 4 /under General Ed. A. A. Bolshakova. –SPb.: Publishing house of Polytechnical Institute. Un-t, 2018. P. 40-46.

27. Yu. K. Mashunin. Concept of Technical Systems Optimum Designing (Mathematical and Organizational Statement)// International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2017 Proceedings 8076394. Saint Petersburg. Russia/ WOS: 000414282400287 ISBN:978-1-5090-5648-4. (Web of science)

28. Yu. K. Mashunin. Optimum Designing of the Technical Systems Concept (Numerical Realization) // International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2017 Proceedings 8076395. Saint Petersburg. Russia/ WOS: 000414282400288 ISBN:978-1-5090-5648-4. (Web of science)

29. Mashunin K. Yu., and Mashunin Yu. K. Vector Optimization with Equivalent and Priority Criteria. Journal of Comput. Syst. Sci. Int., 2017, Vol. 56. No. 6. pp. 975-996. https://rdcu.be/bhZ8i (Scopus).

30. Mathematical Apparatus of Optimal Decision-Making Based on Vector Optimization," Appl. Syst. Innov. 2019, 2, 32. https://doi.org/10.3390/asi2040032 (Scopus)
31. Mashunin Yu.K. Theory and Methods Vector Optimization (Volume One), Cambridge Scholars Publishing. 2020, 183 p. ISBN (10): 1-5275-4831-7
32. Торгашов А.Ю., Кривошеев В.П., Машунин Ю.К., Холланд Ч.Д. Расчет и многокритериальная оптимизация статических режимов массообменных процессов на примере абсорбции в производстве газоразделения // Изв. ВУЗов. Нефть и газ, 2001, №3, с. 82-86.
33. Mashunin Yu.K. Theory, Applied Mathematics and Software for Optimal Decision Making on a set of Criteria in Engineering Systems, monograph: monograph / Yu.K. Mashunin. Moscow : RuScience, 2024. – 260 с. ISBN 978-5-466-05940-3.
34. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения: Пер. с англ./Под ред. И. Ф. Шахнова. - М.: Радио и связь, 1981. 560 с.
35. J. Johannes. Vector Optimization: Theory, Applications, and Extensions. New York, Berlin, Heidelberg. Springer-Verlag. 2010. 460 p.
36. Qamrul Hasan Ansari, Jen-Chih Yao. Recent Developments in Vector Optimization. Springer Heidelberg Dordrecht. New York. London. 2010. 550 p.
37. Nakayama Hirotaka, Yun Yeboon, Yoon Min. Sequential Approximate Multiobjective Optimization Using Computational Intelligence. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. 2009. 197 p.
38. Shankar R. Decision Making in the Manufacturing Environment: Using Graft Theory and fuzzy Multiple Attribute Decision Making Methods. Springer; 2007. 373 p.
39. Cooke T., Lingard H., Blismas N. The development end evaluation of a decision support tool for health and safety in construction design // Engineering, Construction and Architectural Management. 2008. V. 15. №4. P. 336-351.
40. Левицкий В. Л. Математическое моделирование и оптимизация магнитоэлектрических линейных индукторных двигателей постоянного тока. Диссертация канд. Техн. Наук, Новосибирск. НЭТИ. 1990. 163 с.
41. Математическая энциклопедия / Гл.ред. И.В.Виноградов. –М.: Советская Энциклопедия. Т.4 Ок-Сло. 1984. 1216 с.
42. Mashunin Yu.K. Theory and Methods Vector Optimization (Volume Two), Cambridge Scholars Publishing. 2021, 270 p. ISBN (10): 1-5275-7413-X
ISBN (13): 978-1-5275-7413-7

References:

1. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И. В. Виноградов. –М.: Советская Энциклопедия. Т.1 А - Г. 1977. 1152 с.
2. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И. В. Виноградов. –М.: Советская Энциклопедия. Т.3 Коо -Од - М. 1982. 1184 с.
3. Pareto V. Cours d'Economie Politique. Lausanne: Rouge, 1896.1. Pareto V. Cours d'Economie Politique. Lausanne: Rouge, 1896.
4. Karlin S. Mathematical methods in game theory, programming and economics. - M.: Mir, 1964, 837 p. [in Russian]
5. Germeyer Y.B. Games with non-opposite interests. – M.: Nauka, 1976, 326 p. [in Russian]
6. Zak Yu.A. Multi-stage decision-making processes in the vector optimization problem // AiT. 1976. No 6, S. 41-45. [in Russian]
7. Pontryagin L.S., Boltyansky V.G., Gamkrelidze V.V., Mishchenko E.F. Mathematical theory of optimal processes. – M.: Fizmatiz. 1961. 268 p. [in Russian]
8. Krasovsky N.N., Krasovsky A.N., Tretyakov V.U. Management of the dynamic system. – Sverdlovsk: UNC AN SSSR, 1985. 195 p. [in Russian]
9. Pryadkin L.L., Goncharov A.L., Boychuk V.G. Automation of process control in rolling production based on microprocessor technology. – M.: TsNIITEI priborostroenie, 1986. 136 p. [in Russian]
10. Yu.N. Kiselyov, S.N. Avvakumov, M.V. Orlov. Optimal control. Linear theory and applications. – M.: Publishing Department of the Faculty of VMiK lomonosov Moscow State University, 2007. – 270 p. ISBN 5-89407-288-3. [in Russian]

11. Dobrynina I.S., Karpov I.I., Chernousko F.L. Method of decomposition in the tasks of managing the system of solids // Izv. WOUNDS. Theory and control systems. 1995.№ 2. [in Russian]

12. Krasnoshchekov P.S., Morozov V.V., Fedorov V. V. Sequential aggregation in the tasks of internal design of technical systems // Izv. AN SSSR. Techn. cybernetics. 1979. N 5. [in Russian]

13. Mikhailevich V. S., Volkovich V. P. Computational methods of research and design of complex systems. M.: Nauka, 1982, 285 p. [in Russian]

14. Podinovsky V.V., Nogin V.D. Pareto-optimal solutions of multi-criteria problems. – M.: Nauka. 1982. 256 p. [in Russian]

15. Mashunin Yu.K. Methods and models of vector optimization. - M.: Nauka, 1986. 141 p. [in Russian]

16. Mashunin Y. K. , Levitsky V. L. Methods of vector optimization in the analysis and synthesis of technical systems: monograph. - Vladivostok: DVGAEU, 1996. 131 s. [in Russian]

17. Mashunin Yu.K. Solution of compositional and decompositional problems of synthesis of complex technical systems by methods of vector optimization //Izv. WOUNDS. TiSU. 1999. No3. p. 88-93. [in Russian]

Yu. K. Mashunin. Solving composition and decomposition problems of synthesis of complex engineering systems by vector_optimization methods, Comput. Syst. Sci. Int. 38, 421 (1999). (Scopus).

18. Mashunin Yu.K., Mashunin K.Yu. Modeling of technical systems in conditions of uncertainty and making the optimal decision // Izv. WOUNDS. TiSU. 2013. №4. S. 19-35. [in Russian]

Mashunin K. Yu., and Mashunin Yu. K. Simulation Engineering Systems under Uncertainty and Optimal Descision Making. Journal of Comput. Syst. Sci. Int. Vol. 52. No. 4. 2013. 519-534. (Scopus)

19. Mashunin Yu.K. Theory of Management. Mathematical apparatus of control in economic systems. – M.: Logos. 2013. 448 p. (New University Library). [in Russian]

20. Mashunin Yu.K. Mashunin K.Yu. Modeling of technical systems on the basis of vector optimization (1. At equivalent criteria) / International Journal of Engineering Sciences & Research Technology. 3(9): September, 2014. P. 84-96 .

21. Mashunin Yu.K. Mashunin K.Yu. Modeling of technical systems on the basis of vector optimization (2. with a Criterion Priority) / International Journal of Engineering Sciences & Research Technology. 3(10): October, 2014. P. 224-240.

22. Yu. K. Mashunin, K. Yu. Mashunin. Simulation and Optimal Decision Making the Design of Technical Systems // American Journal of Modeling and Optimization. 2015. Vol. 3. No 3, 56-67.

23. Yu. K. Mashunin, K. Yu. Mashunin. Simulation and Optimal Decision Making the Design of Technical Systems (2. The Decision with a Criterion Priority) // American Journal of Modeling and Optimization. 2016. Vol. 4. No 2, 51-66.

24. Yu. K. Mashunin, “Methodology of the Choice of Optimum Parameters of Technological Process on Experimental to Data.”American Journal of Modeling and Optimization, vol. 7, no. 1 (2019): 20-28. doi: 10.12691/ajmo-7-1-4.

25. Yu. K. Mashunin. Vector optimization in the system optimal Decision Making the Design in economic and technical systems // International Journal of Emerging Trends & Technology in Computer Science. 2017. Vol. 7. No 1, 42-57.

26. Mashunin, Yu. K, Optimal designing in the interrelation Technical system – Materials (Theory) // Mathematical methods in engineering and technology: proceedings of international. Science. Conf.: 12 tons 4 /under General Ed. A. A. Bolshakova. –SPb.: Publishing house of Polytechnical Institute. Un-t, 2018. P. 40-46.

27. Yu. K. Mashunin. Concept of Technical Systems Optimum Designing (Mathematical and Organizational Statement)// International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2017 Proceedings 8076394. Saint Petersburg. Russia/ WOS: 000414282400287 ISBN:978-1-5090-5648-4. (Web of science)

26. Yu. K. Mashunin. Optimum Designing of the Technical Systems Concept (Numerical Realization) // International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2017 Proceedings 8076395. Saint Petersburg. Russia/ WOS: 000414282400288 ISBN:978-1-5090-5648-4. (Web of science)

29. Mashunin K. Yu., and Mashunin Yu. K. Vector Optimization with Equivalent and Priority Criteria. Journal of Comput. Syst. Sci. Int., 2017, Vol. 56. No. 6. pp. 975-996. https://rdcu.be/bhZ8i (Scopus).

30. Mathematical Apparatus of Optimal Decision-Making Based on Vector Optimization," Appl. Syst. Innov. 2019, 2, 32. https://doi.org/10.3390/asi2040032 (Scopus)

31. Mashunin Yu.K. Theory and Methods Vector Optimization (Volume One), Cambridge Scholars Publishing. 2020, 183 p. ISBN (10): 1-5275-4831-7

32. Torgashov A.Yu., Krivosheev V.P., Mashunin Yu.K., Holland Ch.D. Calculation and multi-criteria optimization of static modes of mass transfer processes on the example of absorption in the production of gas separation // Izv. Universities. Oil and Gas, 2001, No. 3, pp. 82-86. [in Russian]

33. Mashunin Yu.K. Theory, Applied Mathematics and Software for Optimal Decision Making on a set of Criteria in Engineering Systems, monograph: monograph / Yu.K. Mashunin. Moscow : RuScience, 2024. – 260 c. ISBN 978-5-466-05940-3.

34. Keeney R.L., Rifa H. Decision-making under many criteria: preferences and substitutions: Per. with English/Ed. by I. F. Shakhnov. - M.: Radio i svyaz', 1981. – 560 p. [in Russian]

35. J. Johannes. Vector Optimization: Theory, Applications, and Extensions. New York, Berlin, Heidelberg. Springer-Verlag. 2010. 460 p.

36. Qamrul Hasan Ansari, Jen-Chih Yao. Recent Developments in Vector Optimization. Springer Heidelberg Dordrecht. New York. London. 2010. 550 p.

37. Nakayama Hirotaka, Yun Yeboon, Yoon Min. Sequential Approximate Multiobjective Optimization Using Computational Intelligence. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg . 2009. 197 p.

38. Shankar R. Decision Making in the Manufacturing Environment: Using Graft Theory and fuzzy Multiple Attribute Decision Making Methods. Springer; 2007. 373 p.

39. Cooke T., Lingard H., Blismas N. The development end evaluation of a decision support tool for health and safety in construction design // Engineering, Construction and Architectural Management. 2008. V. 15. №4. P. 336-351.

40. Levitsky V. L. Mathematical Modeling and Optimization of Magnetoelectric Linear DC Inductor Motors. Thesis: Cand. Techn. Sci., Novosibirsk. NETI. 1990. 163 p.

41. Математическая энциклопедия / Гл.ред. И.В.Виноградов. –М.: Советская Энциклопедия. Т.4 Ок-Сло. 1984. 1216 с.

42. Mashunin Yu.K. Theory and Methods Vector Optimization (Volume Two), Cambridge Scholars Publishing. 2021, 270 p. ISBN (10): 1-5275-7413-X ISBN (13): 978-1-5275-7413-7