

Зюзин Борис Федорович,
д.т.н., профессор, ТвГТУ
Zyuzin Boris Fyodorovich, TvSTU

Жигульская Александра Ивановна,
к.т.н., доцент, ТвГТУ
Zhigulskaya Alexandra Ivanovna, TvSTU

Гамаюнов Сергей Николаевич,
д.т.н., профессор, ТвГТУ
Gamayunov Sergey Nikolaevich, TvSTU

Березовский Николай Иванович,
д.т.н., профессор, БНТУ
Berezovsky Nikolai Ivanovich, BNTU

ДИСТОРТНОСТЬ В ВОЛНОВОЙ ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ DISTORTION IN THE WAVE THEORY OF STRENGTH

Аннотация. Рассмотрены положения волновой теории прочности в твёрдых телах с позиций предельных инвариантов дистортности.

Abstract. The provisions of the wave theory of strength in solids are considered from the standpoint of the limiting invariants of distortion.

Ключевые слова: Волновая теория прочности, инварианты дистортности.

Keywords: Wave theory of strength, invariants of distortion.

Законы распространения упругих волн в твёрдых телах вытекают из общих уравнений движения.

Рассмотрим ряд известных положений волновой теории с целью выявления предельных напряжённо-деформированных состояний, возникающих в сплошных средах на основании предельных инвариантов дистортности [1]. Особенности распространения упругих волн в изотропном твёрдом теле проявляются главным образом на границах в виде возникновения различного рода поверхностных волн, смешанных деформаций, трансформации волн при отражении от границ и т.д. В твёрдом теле наряду с продольными упругими волнами могут распространяться ещё и сдвиговые деформации в виде так называемых поперечных волн. Различие скоростей распространения этих волн связано только с различием упругих характеристик, которые как бы определяют жёсткость среды по отношению к данному типу динамических деформаций.

Мерой отношения скоростей поперечных C_T и продольных волн C_L в данной среде может служить коэффициент Пуассона μ

$$C_T/C_L = \sqrt{(1-2\mu)/(2-2\mu)}.$$

Его максимальное значение $\mu = 0,5$ соответствует жидкости, для которой эффективной жёсткостью является модуль объёмной упругости, определяющий скорость продольной волны.

Значению $\mu=0$ отвечает максимальное отношение скоростей

$$C_T/C_L = 1/\sqrt{2}.$$

Следовательно, в любой среде скорость распространения продольных волн превышает скорость распространения сдвиговых волн не менее чем в 1,41 раза. Обычно величина μ для твёрдых материалов лежит в пределах 0,4–0,25; при этом различие скоростей составляет 50–70 %.



В табл. 1 приведены некоторые результаты исследования упругих и прочностных свойств горных пород [1], полученные в ИГД им. А.А. Скочинского статистическими (на прессе) и динамическими методами.

Таблица 1

Физико-технические свойства горных пород

Горная порода	Коэффициент Пуассона, μ	Скорость продольных волн, C_L , м/с	Скорость поперечных волн, C_T , м/с	Соотношение скоростей	Фрактальная размерность, D
Белая магнетитовая руда	0,39	6750	3250	0,48	1,694
Диорит порфирит	0,18	6300	4300	0,68	1,882
Графит порфирит	0,38	4950	2800	0,565	1,323
Жильный сиенит порфир	0,31	4800	2960	0,616	1,612
Альбитофир	0,39	5450	2725	0,50	1,566
Порфирит диабазовый	0,29	5350	2950	0,55	2,194
Песчаник кварцевый	-	5650	2180	0,386	-
Известняк	0,22	4950	3500	0,707	1,613
Руда железная окисленная	-	3380	1620	0,48	-

В медицине [2] исследование скорости распространения пульсовой волны по крупным артериям показало, что у подавляющего большинства здоровых детей скорость распространения пульсовой волны по сосудам мышечного типа C_M больше скорости распространения пульсовой волны по сосудам эластичного типа C_E .

Результаты исследований по отдельным возрастным группам приведены в табл. 2.

Таблица 2

Анализ распространения скорости пульсовой волны

Возраст, лет	C_M , см/с	C_E , см/с	C_M/C_E
3-6	699	661	1,06
7-11	783	616	1,27
12-16	871	610	1,42

Выражение для соотношения скоростей деформаций можно преобразовать в виде предельного потенциала распространения волн в твёрдом теле, тогда будем иметь соотношение $(C_T/C_L)^2 = (1 - 2\mu) / [2(1 - \mu)]$.

$$\text{далее } 2\mu (C_T/C_L)^2 = \mu(1 - 2\mu) / (1 - \mu) = K_\epsilon, \quad (1)$$

где K_ϵ – критерий предельного равновесного состояния или предельный потенциал распространения волн в твёрдом теле.

Анализ отражения волн на границе твёрдого тела [2] показал, что при некотором угле падения θ , удовлетворяющем условию

$$C_T^2 \sin(2\theta) \sin(2\theta') - C_L \cos^2(2\theta) = 0,$$

поперечная отраженная волна, при угле отражения θ' , исчезает, т.е. падающая поперечная волна полностью трансформируется в продольную.



Это условие выполняется только для таких сред, в которых отношение скоростей $C_T/C_L > \sqrt{3}$, или для которых коэффициент Пуассона не превышает значения $\mu < 0,25$. Падающая сдвиговая волна не трансформируется при нормальном падении ($\theta=0^\circ$), а также при угле падения $\theta=45^\circ$.

Однако угол $\theta=45^\circ$ превышает величину критического угла падения, при котором угол отражения продольной волны становится равным 90° .

Этот критический угол определяется соотношением $\sin(\theta_{кр}) = C_T/C_L$.

Из формулы (1) следует, что отношение скоростей C_T/C_L не может превышать величины $1/\sqrt{2}$. Таким образом, для любой среды

$$\theta_{кр} = \arcsin(C_T/C_L) < 45^\circ \quad (2)$$

и становится равным 45° только в случае жидкостей, для которых $\mu=0$.

В жидкостях же не может распространяться сдвиговая волна, поэтому фактически всегда $\theta_{кр} < 45^\circ$. Таким образом, значения критических углов для различных сред определяются величиной коэффициента Пуассона.

При обычном для простых твёрдых тел значении $\mu=0,3$ критический угол составляет около $30-35^\circ$. Данному диапазону критических углов $\theta_{кр}$ в механике разрушения соответствуют углы наклона площадок скольжения $\beta=30-35^\circ$. При этом определяющий параметр напряжённо-деформированного состояния (НДС) равен $PK(H)=tg(\beta)$. Согласно выражению (2), получаем предельное условие распространения волн в твёрдом теле с учётом нелинейного характера их соотношения $\sin^2(\theta_{кр}) = K_B/(2\mu)$.

Экстремальным расчётным значениям параметров распространения волн соответствуют величины $\mu_M = 1-1/\sqrt{2}=0,292$; $K_{Bmax} = (\sqrt{2}-1)^2=0,171$.

В табл. 3 приведены расчётные данные параметров распространения волн.

Таблица 3

Параметры распространения волн

μ	0	0,2	0,25	0,292	0,333	0,5
K_B	0	0,15	0,166	0,171	0,166	0
$\theta_{кр}, \text{град}$	45	37,76	35,26	32,8	30	0
X_θ	0,5	0,41	0,39	0,364	0,333	0
$PK(H)$	1	0,774	0,707	0,644	0,577	0

На рис. 1 показан потенциал предельного распространения волн в твёрдом теле.

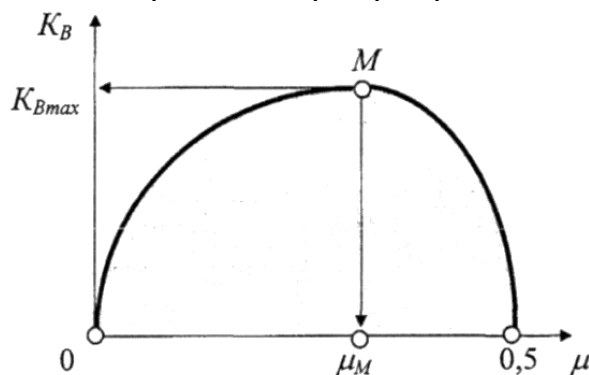


Рисунок 1 – Потенциал предельного распространения волн в твёрдом теле

Реальному положению предельного равновесия системы соответствует точка, расположенная несколько правее (относительно направления изменения определяющего параметра) чем точка резонанса μ_M .



Этим объясняется отличие приближённых значений экспериментальных результатов по определению предельных НДС в различных средах.

Значения C_T и C_L для некоторых безграничных изотропных твёрдых сред для комнатных температур приведены в табл. 4.

Таблица 4

Характеристики некоторых изотропных твёрдых тел

Вещество	Коэффициент Пуассона, μ	Скорость продольных волн, C_L , м/с	Скорость поперечных волн, C_T , м/с	Соотношение скоростей, C_T/C_L	Фрактальная размерность, D
Алюминий	0,34	6260	3080	0,492	2,221
Висмут	0,33	2180	1100	0,505	2,213
Вольфрам	0,35	5460	2620	0,479	2,222
Железо	0,28	5850	3230	0,552	2,252
Золото	0,42	3240	1200	0,370	2,150
Кадмий	0,30	2780	1500	0,539	2,203
Константан	0,33	5240	2640	0,504	2,222
Латунь	0,35	4430	2120	0,478	2,232
Манганин	0,33	4660	2350	0,504	2,222
Медь	0,35	4700	2260	0,481	2,204
Никель	0,31	5630	2960	0,525	2,233
Олово	0,33	3320	1670	0,503	2,231
Платина	0,39	3960	1670	0,421	2,209
Свинец	0,44	2160	700	0,324	2,149
Серебро	0,38	3600	1590	0,441	2,172
Цинк	0,25	4170	2410	0,578	2,245
Стекло	0,22	4260	2560	0,600	2,240
Плексиглас	0,35	2670	1120	0,419	2,905
Гипс	0,34	4790	2370	0,495	2,194
Лёд	0,33	3980	1990	0,495	2,303
Полистирол	0,32	2350	1120	0,476	2,605
Фарфор	0,23	5340	3120	0,584	2,311

Там же указаны коэффициенты Пуассона μ и величина фрактальной размерности D структуры вещества.

На рис. 2 приведён график зависимости $\mu = f(C_T/C_L)$ для экспериментальных данных (см. табл. 4).



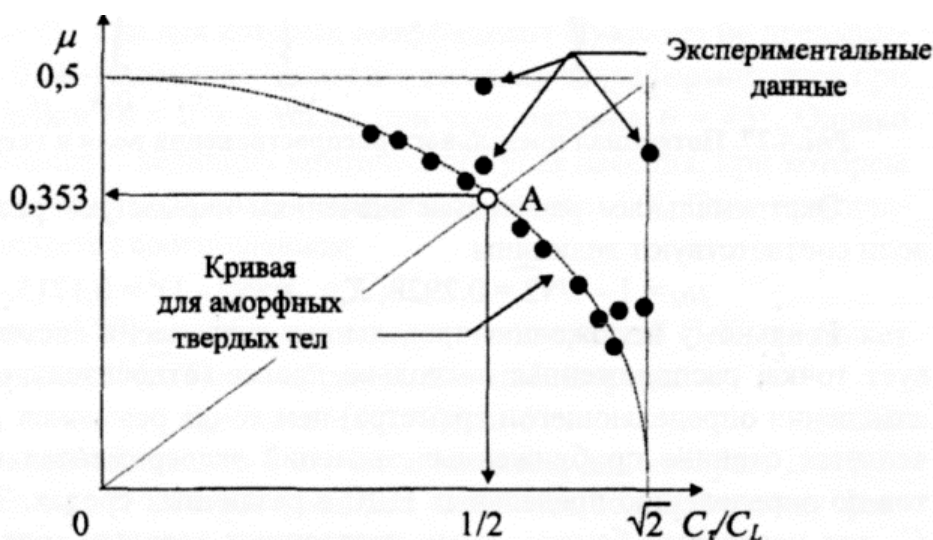


Рисунок 2 – Зависимость $\mu=f(C/C_L)$

Модельное уравнение для предельной кривой может быть выражено зависимостью $(C/C_L)^2 + D\mu^2 = 1$.

В волновой теории адиабатическое уравнение состояния среды, которое в общем случае является нелинейным, может быть с достаточной точностью описано в виде первых двух членов бесконечного ряда Тейлора

$$p \approx Ks + (B/2)s^2, \quad (3)$$

где p – давление; $s = \Delta p/p_0$ – относительное сжатие среды; ρ – плотность среды; K – адиабатический модуль объёмной упругости; B – нелинейный модуль объёмной упругости.

Ряд Тейлора – разложение функции в бесконечную сумму степенных функций. Ряд назван в честь английского математика Тейлора, хотя ряд Тейлора был известен задолго до публикаций Тейлора – его использовали ещё в XVII веке Грегори, а также Ньютон. Ряды Тейлора применяются при аппроксимации функции многочленами. В частности, линейризация уравнений происходит путём разложения в ряд Тейлора и отсечения всех членов выше первого порядка. Дифференцируя выражение (3) по плотности ρ , на основании обозначения $c^2 = dp/d\rho$, где c – местная скорость волны, получаем

$$c = (dp/d\rho)^{1/2} = c_0 [1 + Bs/(2K)], \quad (4)$$

здесь $c_0 = (K/\rho_0)^{1/2}$ есть скорость распространения волны бесконечно малой амплитуды, а множитель в скобках даёт небольшую поправку к этой скорости, связанную с учётом квадратичного члена в уравнении состояния.

Используя линейное соотношение между относительным сжатием и колебательной скоростью $s = v/c_0$ и подставляя его в выражение (4), получаем

$$c = c_0 + Bv/(2K).$$

Полученная зависимость обусловлена только упругой нелинейностью среды, которая определяется отношением коэффициентов при квадратичном и линейном членах адиабатического уравнения состояния (3).

Поэтому отношение B/K принято называть нелинейным параметром среды. Другим параметром состояния является нелинейный коэффициент ϵ_0 , который равен $\epsilon_0 = (B/K + 2)/2$.

Поясним физическую сущность приведённых нелинейных характеристик среды. Нелинейный параметр B/K или коэффициент ϵ_0 могут быть вычислены, если уравнение состояния среды задано в явном виде.

Для адиабатического процесса в качестве уравнения состояния может служить уравнение Пуассона

$$P/P_0 = (\rho/\rho_0)^n. \quad (5)$$

Дифференцируя данное уравнение дважды по плотности в точке $\rho = \rho_0$ и умножая на ρ_0^2 , имеем по данным [351] следующие соотношения

$$B/K = \gamma - 1 \text{ и } \varepsilon_0 = (\gamma + 1)/2.$$

Опыты по сжимаемости простых жидкостей и твёрдых изотропных тел показывают, что адиабатическое уравнение состояния для этих сред может быть приблизительно представлено уравнением, аналогичным (5), называемым эмпирическим уравнением Тэта $P/P_0 = (\rho/\rho_0)^n$, в котором показатель изоэнтропы n эквивалентен параметру γ (эмпирическому отношению теплоемкостей) в уравнении Пуассона. Этот эмпирический параметр связан с параметром нелинейности B/K и нелинейным коэффициентом ε_0 соотношениями $n = \gamma = (B/K) + 1 = 2\varepsilon_0 - 1$.

Изложение классической теории многомерных тэта-функций рассматривается в связи с современными приложениями к теории нелинейных уравнений. Нелинейные уравнения позволяют вывести определяющие соотношения для тэта-функций римановых поверхностей.

Сводный анализ предельных напряжённо-деформированных состояний различных материалов показал на прямую взаимосвязь

$$n = K_d = 1 + \sin(\varphi).$$

Тогда $B/K = \sin(\varphi)$; $\varepsilon_0 = 1 + \sin(\varphi/2)$, где φ – угол внутреннего трения (связности) материала.

Прохождение и отражение плоской волны при нормальном падении на границу раздела двух сред определено рядом закономерностей.

Уравнение сохранения энергии может быть представлено в виде

$\rho_1 + d_1 = 1$, где ρ_1 – амплитудный коэффициент отражения; d_1 – коэффициент прохождения по энергии.

Численное значение рассматриваемых коэффициентов определяется из следующих выражений

$$\rho_1 = [(z_1 - z_3)/(z_1 + z_3)]^2, \quad d_1 = 1 - \rho_1 = 4z_1z_3/(z_1 + z_3)^2,$$

где $z = \rho C$ – удельное волновое сопротивление.

Физический смысл приведённых величин можно выяснить, перейдя к определяющим параметрам напряжённо-деформированного состояния, для этого проведем замену параметров волнового процесса $X_1 = z_1$, $X_3 = z_3$.

Тогда получим

$$\rho_1 = [(X_1 - X_3)/(X_1 + X_3)]^2 = \sin^2(\varphi),$$

$$d_1 = 4X_1X_3/(X_1 + X_3)^2 = X_M/R = \cos^2(\varphi) = \mathcal{K}^2,$$

где $X_M = 2X_1X_3/(X_1 + X_3)$ – параметр равновесного НДС; $R_{max} = (X_1 + X_3)/2$ – радиус главного круга НДС; $\mathcal{K} = \cos(\varphi)$ – жёсткость структурной системы.

При нормировке определяющих параметров НДС, для которой $X_1 + X_3 = 1$, получаем уравнение $d_1 = 4X_3(1 - X_3)$, которое соответствует логистическому уравнению вида $Y = \mu X(1 - X)$, где $0 < \mu < 4$ – параметр состояния системы. Таким образом, получаем тождество: $Y = d_1 - \cos^2(\varphi) = \mathcal{K}^2$.

Раскроем данное тождество относительно аргумента X логистической функции Y .

В результате получаем квадратичное уравнение

$$X^2 - X + \mathcal{K}^2/\mu = 0.$$

Корни данного уравнения определены решением

$$X_{1,2} = (1 \pm \sqrt{1 - 4\mathcal{K}^2/\mu})/2.$$

Здесь аргумент X функции определяет уровень нелинейности – X_A .

Максимальным значениям логистической функции Y_{max} соответствует условие $X_A = 1/2$, при котором выполняется тождество

$$\mathcal{K} = \sqrt{\mu}/2 \text{ или } \sqrt{\mu}/\mathcal{K} = 2 = const.$$

В табл. 5 приведены расчётные значения определяющих параметров НДС.



Таблица 5

Параметры НДС при $X_A=1/2$

μ	0	1	2	3	3,283	3,555	3,5699	4
$P_{K(H)}$	0	$2 - \sqrt{3}$	$\sqrt{2} - 1$	$1/\sqrt{3}$	$2/\pi$	$1/\sqrt{2}$	0,711	1
φ , град	90	60	45	30	25,04	19,47	19,14	0
\mathcal{J}	0	0,5	0,707	0,866	0,906	0,943	0,944	1

При $\mu = \mu_{\infty} = 3,569\dots$, когда бифуркационный цикл достигает бесконечно большого периода [3], значение параметра НДС весьма близко к выражению $P_{K(H)} = 1 - (\pi/e)/4 = 1 - 0,288 = 0,711\dots$

Предложенная в работе [3] модель деформирования грунта способствует раскрытию сущности закона Мейера (аналога эмпирического уравнения Тэта), который применялся различными авторами для решения многих задач контактной механики. Модель упрочняющейся упругопластической среды позволила раскрыть смысл параметра закона n , зависящего от вида напряжённого состояния материала среды, и показать, что этот закон характеризует свойства любой упруго-пластичной среды. Показатель n принимает различные, но постоянные значения в каждой фазе напряжённо-деформированного состояния. В упругой фазе $n=3$, в фазе локальной пластичности $n=2$. При этом эпюры распределения напряжений в соответствующих фазах также будут неизменными. Таким образом, при применении закона Мейера к механике грунтов при исследовании распределения напряжений, возможно исключить нагрузки, заменяя их через параметр n . Ценность такого способа расчёта, предложенного А.А. Ланковым [4], состоит в том, что в конкретных условиях он применим для мёрзлых грунтов, а также других изотропных низкомодульных сред. Ранее индекс n никогда не связывали с фазами НДС среды, определяя распределение напряжения по контактной площадке через нагрузку. Как следует из анализа штамповых испытаний – зависимости нормированного диаметра отпечатка и давления от степени нагружения k для мерзлых грунтов (торф, глина, сапрпель), экспериментальные результаты ложатся на единый график [5], несмотря на различие в видах мёрзлых грунтов, температурах, времени нагружения, величинах нагрузок и диаметрах штампов. Представление используемых в эксперименте величин в нормированном виде (например, $k=P/P_0$) при обработке экспериментальных результатов позволяет представить полученные величины в унифицированном виде, так как они не будут зависеть от абсолютных значений нагрузок, диаметров шаровых штампов, температуры, времени выдержки под нагрузкой, и, главное, от материала среды.

Таблица 6

Характеристики фаз НДС

Фазы напряжённо-деформированного состояния			
Область локальной пластичности (ОЛП)	Область ограниченной пластичности (ООП)	Условие «качения» по теории предельных НДС	Упругая фаза
$n = 2$	$n = 2,222$	$n = 2,666$	$n = 3$
$k \rightarrow \infty$		$k = 1$	$k = 0,25$
$\sin(\varphi) = 0$	$\sin(\varphi) = 0,111$	$\sin(\varphi) = 1/3$	$\sin(\varphi) = 1/2$
$\varphi = 0^\circ$	$\varphi = 6^\circ,38$	$\varphi = 19^\circ,47$	$\varphi = 30^\circ$
$\mu = 0,5$		$\mu = 1/3$	$\mu = 0,25$
Классификация предельных НДС			
Верчение		Качение	Скольжение
$P_{K(H)} = 1$		$P_{K(H)} = 1/\sqrt{2}$	$P_{K(H)} = 1/\sqrt{3}$



Обобщённая степень нагружения k является критерием подобия НДС.

Области локальной пластичности соответствует значения $k > 1$, область ограниченной пластичности имеет место при $k < 1$ (табл. 6).

В области развитой упруго-пластичности (ОРУП) индекс n зависит от степени нагружения k : $n = 2 + 1/(\sqrt{k} + 0,5)$ и меняется от 2,666 до 2,0 при $k \rightarrow \infty$.

Преобразуем данное выражение в классическое S -образное уравнение НДС $(n - 2)/2 = 1/[1 + 1/[1/(\sqrt{2} \sqrt{k})^2]]$.

Индекс-показатель степени закона Мейера n определяет значение коэффициента Пуассона μ в каждом НДС среды – упругом, переходном, упругопластическом и пластичном. В фазе ОРУП он изменяется от $\mu = 0,317$ до 0,5 и в значительной степени влияет на предельные значения механических свойств, никогда не достигающих значений, характерных для состояния пластичности. Аналогичный S -образный характер носит и эмпирическое уравнение связи между результирующим девиаторным напряжением S_d и результирующей девиаторной деформацией ε_d

$$S_d = \varepsilon_d / (a + b\varepsilon_d) \text{ или } S_d = 1/[b + 1/(\sqrt{\varepsilon_d/a})^2].$$

Обобщённый принцип подобия сводится к тому, что при внедрении твёрдых упругих шаровых штампов разного диаметра в упругопластические материалы, отличающиеся своими механическими характеристиками, все нормированные величины остаются одинаковыми (степени пластических и упругих деформаций, упругие, пластические и полные деформации, давление текучести, работа упругопластического деформирования, коэффициенты восстановления скорости, гистерезисных потерь и т.д.), если одинаковы степени нагружения k или нормированные внедрения ψ

Список литературы:

1. Миронов В.А., Зюзин Б.Ф., Лотов В.Н. Дистортность в механике горных пород: монография. Тверь: ТвГТУ, 1995. 196 с.
2. Зюзин Б.Ф. Дистортность вокруг нас: монография. Тверь: ТвГТУ, 2023. 164 с.
3. Миронов В.А., Зюзин Б.Ф., Лотов В.Н., Терентьев А.А. Дистортность в природных системах: монография. Минск: Беларуская навука, 1997. 415 с.
4. Ланков А.А. Научные основы прогнозирования физико-механических свойств мерзлых торфяных грунтов. Дисс. докт. техн. наук. Тверь: ТвГТУ, 2000.
5. Богатов Б.А., Зюзин Б.Ф., Миронов В.А., Лотов В.Н. Прогнозирование предельных состояний в нелинейной геомеханике: монография. Минск: ОО Белорусская горная академия, 2000. 340 с

