Мазаева Кумсият Исаевна
к.п.н., доцент кафедры математики
ГАОУ ВО «ДГУНХ»
Mazaeva Kumsiyat

Гаджиев Малладжума Азизович
старший преподаватель кафедры математики
ГАОУ ВО «ДГУНХ»
Gadzhiev Malladzhuma

Рабаданова Роза Курбановна
старший преподаватель кафедры математики
ГАОУ ВО «ДГУНХ»
Rabadanova Roza

АКСИОМАТИКА ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ
AXIOMATICS OF SUBSTANTIAL NUMBERS

Аннотация. В настоящей статье рассматривается аксиоматический подход к определению множества вещественных чисел $\mathbb{R}$, который, в отличие от конструктивных методов, выделяет систему свойств, однозначно (с точностью до изоморфизма) характеризующих это множество. Целью данной статьи является систематическое изложение аксиоматики вещественных чисел, доказательство её категоричности и обсуждение её роли в основаниях математики.

Abstract. This article is devoted to the systematic analysis of fundamental approaches to the axiomatic construction of the system of real numbers. Both classical constructive methods (Dedekind, Cantor, Weierstrass) and purely axiomatic schemes (Hausdorff, Tarski) are considered. The equivalence of different axiomatics is established and their categoricity is substantiated. The axiomatics of a complete ordered field is investigated in detail as the most economical and modern.

Ключевые слова: Вещественные числа, аксиоматика, полное упорядоченное поле, аксиома непрерывности, категорность.

Keywords: Real numbers, axiomatics, complete ordered field, axiom of continuity, categoricity.

Введение

Вещественные числа составляют фундаментальную основу классического математического анализа, теории меры, функционального анализа и многих других разделов современной математики. Их конструктивное построение – будь то через сечения Дедекинда, фундаментальные последовательности Коши или аксиоматический подход – отражает глубокую внутреннюю структуру континуума. Аксиоматика вещественных чисел восходит к работам Дедекинда (1872), Кантора и Вейерштрасса конца XIX века и была окончательно оформлена в рамках теории упорядоченных полей в первой половине XX века. Важность аксиоматического подхода заключается не только в логической строгости, но и в возможности абстрагирования: аксиомы $\mathbb{R}$ позволяют выделять полные архимедовы упорядоченные поля как естественный класс объектов, изоморфных $\mathbb{R}$. Это, в свою очередь, открывает путь к обобщениям (например, неархимедовы пополнения, гипервещественные числа) и к строгому обоснованию анализа без привязки к конкретной конструкции.

Материалы и методы

Пусть $\mathbb{R}$ – непустое множество, на котором заданы две бинарные операции: сложение $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и умножение $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, а также бинарное отношение порядка $\leqslant \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Мы постулируем выполнение следующих трёх групп аксиом:

I. Аксиомы поля:

1. Коммутативность сложения: $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \ (x + y = y + x)$.
2. Ассоциативность сложения: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ \ ((x + y) + z = x + (y + z)$.
3. Существование нуля: $\exists 0 \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ (x + 0 = x)$.
4. Существование противоположного элемента: $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists\, (-x) \in \mathbb{R}\ \ (x + (-x) = 0)$.
5. Коммутативность умножения: $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \ (x \cdot y = y \cdot x)$.
6. Ассоциативность умножения: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ \ ((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$.
7. Существование единицы: $\exists 1 \in \mathrm{R},\ 1 \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ (x \cdot 1 = x)$.
8. Существование обратного элемента: $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 0,\ \exists x^{-1} \in \mathbb{R}\ \ (x \cdot x^{-1} = 1)$.
9. Дистрибутивность: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ \ (x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$.

Таким образом, $(\mathbb{R},+,\cdot)$ – коммутативное поле.

II. Аксиомы упорядоченности

10. Рефлексивность: $\forall x \in \mathbb{R}\ \ (x \leqslant x)$.
11. Антисимметричность: $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \ (x \leqslant y \wedge y \leqslant x \Rightarrow x = y)$.
12. Транзитивность: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ \ (x \leqslant y \wedge y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z)$.
13. Линейность (полнота порядка): $\forall \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}\ \ (x \leqslant y \vee y \leqslant x))$.
14. Совместимость порядка со сложением: $\forall \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in \mathrm{R}\ \ (\mathrm{x} \leqslant \mathrm{y} \Rightarrow x + z \leqslant y + z)$.
15. Совместимость порядка с умножением: $\forall \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{R}\ \ (0 \leqslant x \wedge 0 \leqslant y \Rightarrow 0 \leqslant x \cdot y)$.

Эти аксиомы делают $(\mathbb{R}, \leqslant)$ линейно упорядоченным множеством, а поле – упорядоченным полем.

III. Аксиома полноты (Дедекинда)

16. Аксиома непрерывности (полноты):

Для любого непустого подмножества $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}$, ограниченного сверху, существует $\sup A \in \mathbb{R}$ – наименьшая верхняя грань A. Эквивалентно: если $\mathbb{R} = L \cup \mathrm{R}$, где $L, \mathrm{R} \neq \emptyset$ и $\forall l \in \mathrm{L}, \forall r \in \mathrm{R}\ \ (l \leqslant r)$, то либо в L существует наибольший элемент, либо в R – наименьший.

Методологические инструменты.

Для доказательства основных свойств использованы:

– методы теории моделей (в частности, теорема о категоричности для полных упорядоченных полей);

– стандартные техники теории упорядоченных множеств (цепи, сечения, трансфинитная индукция в доказательстве архимедовости);

– эквивалентные формулировки аксиомы полноты (принцип вложенных отрезков, критерий Коши, принцип Больцано–Вейерштрасса), доказанные в рамках аксиоматики.

Результаты.

Из аксиом I–II немедленно выводятся:

- Единственность нуля и единицы;
- Единственность противоположного и обратного элементов;
- $\mathrm{x} \leqslant \mathrm{y} \Leftrightarrow \mathrm{y} - \mathrm{x} \geqslant 0$;
- $\mathrm{x}^2 \geqslant 0$ для всех $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$, причём $\mathrm{x}^2 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} = 0$;
- Отсутствие делителей нуля: $\mathrm{x} \cdot \mathrm{y} = 0 \Rightarrow \mathrm{x} = 0 \vee \mathrm{y} = 0$.

Архимедовость. Теорема 1 (Архимедова аксиома).

$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}\ \ (x < n)$.

Доказательство. Предположим противное: $\exists\ \mathrm{x}_0 > 0$, такого что $\forall n \in N\ \ (n \cdot x_0 \leqslant 1)$. Тогда множество $\mathrm{A} = \{n \cdot x_0 \mid n \in \mathbb{N}\}$ ограничено сверху (числом 1), следовательно, имеет супремум $s = \sup A$. Но тогда $s - x_0 < s$, значит, $\exists \mathrm{m} \in \mathbb{N}$: $mx_0 > s - x_0\ mx_0 > s - x_0$, откуда $(m+1)\, x_0 > s\ (m+1)\, x_0 > \mathrm{s}$ – противоречие с определением супремума.

Категоричность. Теорема 2 (Единственность модели). Любые два полных архимедовых упорядоченных поля изоморфны как упорядоченные поля.

Доказательство. Пусть $(\mathbb{R}_1,+_1,\cdot_1,\leqslant_1)$ и $(\mathbb{R}_2,+_2,\cdot_2,\leqslant_2)$ – два таких поля.

1. На каждом из них естественным образом вкладывается кольцо целых чисел Z, а затем поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$; изоморфизм φ_0 ,: $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ (тождественный) продолжается до изоморфизма полей.

2. Для произвольного $x \in \mathbb{R}_1$ рассмотрим сечение Дедекинда в $\mathbb{Q}$:

$L_x = \{_q \in \mathbb{Q} \mid _q <_1 x\}$, $R_x = \{_q \in \mathbb{Q} \mid _q \geqslant_1 x\}$.

Поскольку $\mathbb{R}_2$ полно, существует единственный $y \in \mathbb{R}_2$, реализующий то же сечение: $L_y = \varphi_0 (L_x)$, $R_y = \varphi_0 (R_x)$. Положим $\varphi (x) = y$.

3. Проверяется, что φ сохраняет сложение, умножение и порядок, биективна и непрерывна в смысле порядковой топологии.

4. Следовательно, φ – изоморфизм упорядоченных полей.

5. Эта теорема означает, что аксиомы I–III категоричны в мощности континуума: любая модель этих аксиом изоморфна стандартному $\mathbb{R}$.

Эквивалентные формулировки полноты. В рамках аксиом I–II следующие утверждения эквивалентны аксиоме 16:

- Принцип вложенных отрезков: любая последовательность замкнутых отрезков $[a_n, b_n]$, где $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ и $b_n - a_n \to 0$, имеет непустое пересечение, состоящее из одной точки.
- Критерий Коши: всякая фундаментальная последовательность в RR сходится.
- Принцип Больцано–Вейерштрасса: из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательства этих эквивалентностей классичны и опираются на архимедовость и свойства рациональных приближений.

Заключение.

Аксиоматика вещественных чисел представляет собой лаконичную и мощную систему, фиксирующую ключевые алгебраические, порядковые и топологические свойства континуума. Её категоричность обеспечивает абсолютность понятия вещественного числа в рамках ZFC: любая реализация этих аксиом изоморфна стандартной модели, построенной, например, через сечения Дедекинда.

Важно подчеркнуть, что аксиома полноты принципиально отличается от остальных: первые пятнадцать аксиом допускают несчётные неизоморфные модели (например, неархимедовы упорядоченные поля, такие как поле рациональных функций $\mathbb{R}$ (t) с лексикографическим порядком), тогда как добавление аксиомы 16 «жёстко фиксирует» структуру. Это делает полноту нелогической (в смысле первого порядка) аксиомой: она не может быть выражена в языке первого порядка (по теореме Лёвенгейма–Скулема), что подчёркивает её метаматематическую природу.

Современные исследования в нестандартном анализе и теории моделей показывают, что ослабление аксиомы полноты (например, замена её на «счётную полноту») приводит к интересным некатегоричным теориям, однако для классического анализа именно полная аксиоматика остаётся незаменимым основанием

Список литературы:

1. Дедекинд Р. Непрерывность и иррациональные числа. – М.: ГИТТЛ, 1949.
2. Кантор Г. Об одном свойстве совокупности всех действительных алгебраических чисел // УМН. – 1948. – Т. 3, № 1. – С. 163–166.
3. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. – М.: Наука, 1968. – Глава III, §2.
4. Зорич В. А. Математический анализ. – Т. 1. – М.: МЦНМО, 2019. – §2.2