Мазаева Кумсият Исаевна
к.п.н., доцент кафедры математики
ГАОУ ВО «ДГУНХ»
Mazaeva Kumsiyat Isaevna

Щамхалова Наида Курбановна
старший преподаватель кафедры математики
ГАОУ ВО «ДГУНХ»
Shchamkhalova Naida Kurbanovna

Надирбекова Аида Алиевна
старший преподаватель кафедры математики
ГАОУ ВО «ДГУНХ»
Nadirbekova Aida Alievna

ВЫПУКЛОЕ МНОЖЕСТВО: ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ ПРИМЕРЫ
CONVEX SET: DEFINITION AND BASIC EXAMPLES

Аннотация. В статье даётся строгое определение выпуклого множества в линейных пространствах над R, приводятся эквивалентные формулировки, доказываются базовые свойства и систематически разбираются фундаментальные примеры выпуклых множеств, лежащие в основе выпуклого анализа, оптимизации и функционального анализа. Особое внимание уделено геометрической интерпретации и контрпримерам

Abstract. The article gives a strict definition of a convex set in linear spaces over R, gives equivalent formulations, proves basic properties, and systematically discusses fundamental examples of convex sets that are the basis of convex analysis, optimization, and functional analysis. Special attention is paid to geometric interpretation and counterexamples

Ключевые слова: Выпуклое множество, выпуклая комбинация, линейное пространство, разделяющая гиперплоскость, теорема Крейна–Милмана

Keywords: Convex set, convex combination, linear space, separating hyperplane, Krein–Milman theorem

Введение

Понятие выпуклости является одним из самых естественных и плодотворных в современной математике. Оно возникло в геометрии (уже у Архимеда и Ньютона использовались выпуклые тела), но получило полноценное развитие лишь в XX веке в работах Г. Минковского, В. Фенхеля, Г. Вейля и особенно в фундаментальных трудах Т. Боннесена, В. Фенхеля и Г. Хадвигера.

С появлением линейного и нелинейного программирования в 1940–1950-х годах (Дж. Данциг, А. Таккер, Г. Кун) и последующим развитием выпуклого анализа Р. Т. Рокафелларом, Ж.-Ж. Моро, Р. Тирни и другими авторами выпуклые множества превратились в центральный объект оптимизации, теории управления, экономики и теории игр.

Цель настоящей статьи – дать чёткое, строгое и вместе с тем доступное изложение базового понятия выпуклого множества и его простейших примеров, которые используются практически во всех разделах современной математики.

Материалы и методы

Пусть E – вещественное линейное (векторное) пространство (не обязательно нормированное).

Определение 1. Множество $K \subset E$ называется выпуклым, если для любых $x, y \in K$ и любого $\lambda \in [0,1]$ выполняется $\lambda x + (1 - \lambda) y \in K$.

Иными словами, отрезок, соединяющий любые две точки множества K, целиком лежит в K [3, с. 27].

Эквивалентные определения (доказываются элементарно индукцией по числу точек):

1. Для любых $x_1,\dots,x_n \in K$ и любых неотрицательных $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, таких что $\sum_i^n \lambda_i = 1$, выпуклая комбинация $\sum_i^n \lambda_i = \lambda_i x_i \in K$.
2. K – пересечение всех выпуклых множеств, содержащих K (выпуклая оболочка conv K – наименьшее выпуклое множество, содержащее K).
3. Для любых $x, y \in K$ и любого $t \in$ R отрезок
$[x, y]_t = \{x + t\,(y - x)\ |t \in [0,1]\}$ лежит в K.

Результаты

Теорема 1 (Основные свойства выпуклых множеств).

Пусть $K, L \subset E$ – выпуклые множества, $\alpha \in$ R. Тогда:

1. $K + L = \{x + y \mid x \in K, y \in L\}$ – выпукло;
2. $\alpha K= \{\alpha x \mid x \in K\}$ – выпукло;
3. Пересечение любого семейства выпуклых множеств выпукло;
4. Если E – топологическое векторное пространство, то замыкание $\overline{K}$ и внутренность int$K$ выпуклы [4, теорема 2.3].

Фундаментальные примеры выпуклых множеств

1. Пустое множество и всё пространство E – выпуклы (тривиально).
2. Любое одноточечное множество $\{x\}$ – выпукло.
3. Любая прямая, любой луч, любой отрезок в R^n – выпуклы.
4. Любое подпространство (линейное многообразие) – выпукло.
5. Полупространства:
$\{x \in R^n\ |\langle a, x\rangle \leqslant b\}$ и $\{x\ |\langle a, x\rangle < b\}$ – выпуклы.
6. Шары в нормированном пространстве: открытый шар, замкнутый шар, сфера – выпуклы только первые два.
7. Положительный ортант $R_+^n\ = [0, +\infty)^n$ – выпуклый конус.
8. Симплекс:
$\Delta_n =\{x \in R_+^n \big| \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1\}$
– стандартный n-мерный симплекс, выпуклая оболочка $n + 1$ точек в общем положении [5, с. 89].
9. Эпиграф функции:
Если f: $R^n \rightarrow \overline{R}$ – выпуклая функция, то её эпиграф
epi $f = \{\ (x, t) \in R^n \times R \mid t \geqslant f\,(x)\}$ – выпуклое множество в R^{n+1}.
Обратно, множество является эпиграфом выпуклой функции ⇔ оно выпукло и содержит вертикальные лучей над каждой точкой (условие «выпуклости по вертикали»).
10. Выпуклая оболочка конечного числа точек – политоп (в R^n это выпуклый многогранник).
11. Конусы:
 любой конус с вершиной в нуле (в частности, любой конус в смысле линейной алгебры) выпукл, если он содержит с каждым элементом весь отрезок от нуля до него;
 выпуклые конические комбинации образуют выпуклые конусы.

Контрпримеры (невыпуклые множества)

 Окружность $S^1 \subset R^2$ – невыпукла (отрезок между противоположными точками выходит за пределы).
 Гипербола, парабола – невыпуклы.
 Целые числа Z ⊂ R – невыпуклы.
 Открытый единичный диск без центра в R_2 – невыпукл (отрезок между двумя точками на границе проходит через центр).
 Множество $L = \{\ (x, y) \in R^2 \mid xy \geqslant 1\}$ – невыпукло.

Заключение

Понятие выпуклого множества является одной из самых простых, но при этом наиболее мощных идей в математике. Его сила заключается в удивительном сочетании геометрической наглядности и аналитической строгости. Уже на уровне простейших примеров видно, что большинство «хорошо устроенных» множеств в анализе, оптимизации и геометрии – именно выпуклые.

Все фундаментальные теоремы выпуклого анализа (теоремы разделения Хана–Банаха и Минковского, теорема Крейна–Милмана о крайних точках, теорема Рокафеллара о субдифференциалах и т. д.) опираются именно на это базовое определение и перечисленные выше примеры [2, 6].

Таким образом, понимание выпуклости на интуитивном и строгом уровнях является обязательным элементом математической культуры современного специалиста в любой области, связанной с анализом, оптимизацией или геометрией

Список литературы:

1. Барвинок А. И. Выпуклая геометрия и комбинаторика. – М.: МЦНМО, 2020.
2. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981.
3. Рудин У. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975.
4. Bonnesen T., Fenchel W. Theorie der konvexen Körper. – Berlin: Springer, 1934.
5. Hiriart-Urruty J.-B., Lemaréchal C. Convex Analysis and Minimization Algorithms I. – Berlin: Springer, 1993
6. Rockafellar R. T. Convex Analysis. – Princeton: Princeton University Press, 1970. – 451 p