Мазаева Кумсият Исаевна
к.п.н., доцент кафедры математики
ГАОУ ВО «ДГУНХ»
Mazaeva Kumsiyat Isaevna

Бабичева Татьяна Анатольевна
старший преподаватель кафедры математики
ГАОУ ВО «ДГУНХ»
Babicheva Tatyana Anatolyevna

Щамхалова Наида Курбановна
старший преподаватель кафедры математики
ГАОУ ВО «ДГУНХ»
Shchamkhalova Naida Kurbanovna

РАСШИРЕННАЯ ЧИСЛОВАЯ ПРЯМАЯ
THE EXTENDED NUMBER LINE

Аннотация. В статье рассматривается конструкция расширенной числовой прямой $R = \mathrm{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ как естественного компактного расширения множества вещественных чисел. Исследуются её топологические свойства (компактность, метризуемость, гомеоморфизм отрезку), алгебраические ограничения и аналитическая полезность в контексте теории меры, интеграла Лебега и теории функций. Показано, как введение бесконечно удалённых элементов $\pm\infty$ унифицирует формулировки теорем и упрощает работу с несобственными пределами и неограниченными функциями.

Abstract. The article considers the construction of the extended number line $R = \mathrm{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$as a natural compact extension of the set of real numbers. Its topological properties (compactness, metrizability, homeomorphism to a segment), algebraic restrictions, and analytical usefulness in the context of measure theory, Lebesgue integral, and function theory are investigated. It is shown how the introduction of infinitely distant elements $\pm\infty$ unifies the formulations of theorems and simplifies the work with non-proper limits and unbounded functions.

Ключевые слова: Расширенная числовая прямая, компактификация, бесконечность в анализе, теория меры, пределы функций, топология.

Keywords: Extended number line, compactification, infinity in analysis, measure theory, limits of functions, topology.

Введение

Понятие бесконечности, будучи одним из центральных в математике, исторически требовало как философского осмысления, так и формального включения в рабочий аппарат анализа. Множество вещественных чисел $\bar{R}$, будучи полным упорядоченным полем, не содержит элементов, которые могли бы трактоваться как «наибольшее» или «наименьшее» число. Однако анализ пределов, теория интегрирования и теория меры постоянно сталкиваются с поведением функций «на бесконечности» и с неограниченными величинами.

Для строгого и единообразного описания таких ситуаций в математике XIX–XX веков была разработана конструкция расширенной числовой прямой $\bar{R}$ [1, с. 58]. Её введение приписывается работам Б. Римана в комплексном анализе и последующим систематизациям в рамках теории множеств и топологии. Расширенная прямая не является полем, но обладает удобной порядковой и топологической структурой, делающей её компактной. Это позволяет применять к функциям со значениями в $\bar{R}$ общие топологические теоремы (например, о достижении непрерывной функцией экстремумов на компакте), а также корректно определять интеграл от неограниченных функций в теории Лебега [2].

Цель данной статьи – дать систематическое изложение конструкции $\bar{R}$, исследовать её ключевые свойства и продемонстрировать её необходимость в фундаментальных разделах современного анализа.

Материалы и методы

Определение 1. Расширенной числовой прямой называется множество

$\bar{R}$ = R ∪{−∞,+∞},

где символы −∞ и +∞ – два различных объекта, не принадлежащих R.

1. Упорядоченная структура. Порядок на R продолжается на $\bar{R}$ по правилу:

$\forall x \in$ R: $-\infty < x < +\infty$.

Таким образом, $\bar{R}$ становится линейно упорядоченным множеством с наименьшим элементом −∞ и наибольшим +∞.

2. Топологическая структура (компактификация). На $\bar{R}$ вводится топология, базу которой образуют:

- Все открытые интервалы $(a, b) \subset$ R;
- Множества вида $[-\infty, a) = \{x \in$ R: $x < a\}$ для a ∈ R;
- Множества вида $(b, +\infty]=\{x \in$ R: $x >$ b} для $b \in$ R.

Эта топология делает $\bar{R}$ гомеоморфным стандартному отрезку [0,1], что является частным случаем теоремы о компактификации порядка [3]. Конкретный гомеоморфизм может быть задан, например, функцией φ (x)= $\frac{\pi}{2}$ arctan (x) для $x \in$ R, с доопределением φ (−∞) = 0 φ (+∞) = 1.

3. Алгебраические операции. Частично операции сложения и умножения распространяются на $\bar{R}$ по общепринятым правилам анализа (например, x + (+∞) = +∞ при x = −∞, $x \cdot (+\infty) = +\infty$ $x > 0$). Однако важнейшее ограничение состоит в том, что $\bar{R}$ не является полем или даже кольцом, так как выражения вида (+∞) + (−∞), 0 · (±∞) остаются неопределёнными [4].

Методологический подход в статье сочетает теоретико-множественные, топологические и аналитические методы. Основные доказательства опираются на теорию компактификаций, свойства непрерывных функций на компактах и аксиоматику вещественных чисел.

Результаты

Теорема 1 (Топологические свойства). Расширенная числовая прямая $\bar{R}$ является:

1. Компактным топологическим пространством.
2. Метризуемым пространством (метрика может быть индуцирована гомеоморфизмом с [0,1]).
3. Сепарабельным и линейно связным пространством.

Доказательство. Компактность следует из гомеоморфизма с [0,1]. Метризуемость и сепарабельность являются следствиями компактности и существования счётной базы в R, пополненной окрестностями бесконечностей. Линейная связность очевидна из порядка.

Теорема 2 (О пределах в терминах $\bar{R}$). Пусть f: E ⊂ R → $\bar{R}$. Тогда стандартные определения пределов функции при $x \to a$ (где a может быть конечным или ±∞) и при $x \to \infty$ унифицируются в одно: предел $\lim_{x \to a} f(x) = = L$ существует и равен $L \in \bar{R}$ тогда и только тогда, когда для любой окрестности $V(L)$ в топологии $\bar{R}$ существует окрестность U (a) такая, что f (U (a) ∩ E \{a}) ⊂ $V(L)$ [5, с. 103].

Этот результат показывает аналитическую мощь конструкции: она позволяет рассматривать все виды пределов (конечные, бесконечные, на бесконечности) в рамках единого топологического определения.

Теорема 3 (Критерий интегрируемости по Лебегу). Пусть f: X → $\bar{R}$ – измеримая функция на пространстве с мерой (X, F, μ). Для того чтобы f была интегрируемой по Лебегу, необходимо и достаточно, чтобы были интегрируемы её положительная и отрицательная части $f^{+} = max\,(f, 0)$ и $f^{-} = -min\,(f, 0)$, принимающие значения в [0,+∞] [2]. При этом допускается, чтобы f принимала значения ±∞ на множестве меры нуль, что не влияет на интеграл.

Данная теорема подчёркивает, что работа с функциями, принимающими бесконечные значения, не просто удобна, но и необходима для корректной формулировки фундаментальных результатов теории интегрирования.

Заключение

Конструкция расширенной числовой прямой $\bar{R}$ представляет собой классический пример того, как введение идеальных элементов («бесконечностей») служит целям систематизации и унификации математической теории. Она является не просто формальным присоединением двух символов, а содержательным компактным расширением, наделённым естественной и полезной топологией.

Как показано в работе, основные преимущества использования $\bar{R}$ заключаются в следующем:

1. Топологическое: компактность позволяет применять общие теоремы о непрерывных функциях (достижение супремума, теорема о промежуточном значении в обобщённом смысле).
2. Аналитическое: унификация понятия предела и упрощение формулировок теорем в теории рядов, несобственных интегралов и теории меры.
3. Теоретико-мерное: возможность корректно работать с функциями, которые могут быть неограниченными или не определены на множествах меры нуль, что является стандартной ситуацией в анализе.

Таким образом, $\bar{R}$ является не просто техническим приёмом, а важным концептуальным инструментом в арсенале современного математика, связывающим реальный анализ, топологию и теорию меры

Список литературы:

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 544 с.
2. Рудин У. Основы математического анализа. – М.: Мир, 1976. – 320 с. (Rudin W. Principles of Mathematical Analysis. 3rd ed.)
3. Энгелькинг Р. Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с. (Engelking R. General Topology.)
4. Зорич В. А. Математический анализ. Часть I. – М.: МЦНМО, 2019. – 564 с.
5. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Начальный курс. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. – 660 с