Костюшина Алиса Максимовна
«Гимназии №3» городского округа Балашиха

МУЗЫКАЛЬНЫЙ СТРОЙ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ

Аннотация. В данной работе выполнено исследование о том, как с помощью математических вычислений, можно создать мелодическое музыкальное произведение. С помощью математических моделей и отношения частот соседних нот, создаётся мелодический рисунок, что придаёт произведению необыкновенную свободу выразительности. В статье разбирается непосредственная связь музыки и математики.

Ключевые слова: МУЗЫКАЛЬНЫЙ СТРОЙ, музыкальное произведение, математическая модель, мелодический рисунок, МУЗЫКА, математика.

ВВЕДЕНИЕ

Тема моего индивидуального проекта – «Музыкальной строй в математическом описании» тесно связана с моим увлечением музыкой. Проблема сохранения мелодического рисунка при попытке изменения произведения, поставила передо мной ряд задач, что привело к необходимости удовлетворить индивидуальный запрос и показать связь музыки и математики.

Актуальность этой темы заключается в том, так как она переводит музыку из области чистого вдохновения в область точной системы, позволяя использовать достижения математики для развития музыкальных технологий, сохранения культурного наследия и поиска новых форм звуковой выразительности в XXI веке.

Цель работы дать представление о том, что с помощью математических вычислений, можно создать музыкальное произведение не только с помощью вдохновения и таланта, но и отношением частот соседних нот, а, следовательно, сохраняется и мелодический рисунок и даёт моему произведению необыкновенную свободу выразительности.

Задачи исследования:

- Собрать все необходимые материалы и литературу по теме исследования
- Составить и проанализировать таблицу частот нот
- Показать пример написания собственного произведения

Объект исследования: музыкальный строй как система звуковысотных соотношений.

Предмет исследования: числовые отношения (частоты, интервалы) и математические модели (логарифмические, геометрические), описывающие эти отношения.

Методы и методики, которые использовались при разработке исследования: анализ, синтез, сравнение и обобщение, моделирование, импровизация.

Новизна исследования

Мое исследование, не только имеет фундаментальное обоснование, но и показывает связь с историей. Так же оно актуализирует междисциплинарный подход и способствует межличностному росту.

Практическая значимость

Математика в современном мире не только даёт знание в изучении существующих музыкальных произведений и получение знаний ученикам, но и новые творческие перспективы, новые способы создания музыки для людей, которые не имеют музыкального образования, но знают математику.

ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ И ЭВОЛЮЦИЯ МУЗЫКАЛЬНОГО СТРОЯ

1.1. Определение и физико-математическая природа музыкального строя.

Музыкальный строй представляет собой математически детерминированную систему организации звуковысотных отношений. С точки зрения акустики, строй – это алгоритм отбора частот из непрерывного звукового спектра для формирования устойчивого звукоряда. Основу любого строя составляют количественные соотношения между частотами колебаний (f) звучащих тел (см. Приложение 1).

Музыкальный интервал в данном контексте рассматривается как отношение частот двух звуков ($f2 / f1$). Человеческий слух обладает логарифмической природой восприятия: равные отношения частот воспринимаются как равные музыкальные интервалы. Математическая чистота интервала определяется простотой соответствующей ему дроби (согласно закону Пифагора).

1.2. Пифагорейская система и проблема акустической несовместимости.

Основы математической эстетики и физики звука были заложены пифагорейской школой (VI в. до н.э.). Пифагор установил, что высота звука обратно пропорциональна длине колеблющейся струны (монохорда). Были выделены фундаментальные консонансы, соответствующие отношениям целых чисел:

• Октава (1:2) – двукратное увеличение частоты;
• Квинта (2:3) – полуторное увеличение частоты;
• Кварта (3:4).

Пифагоров строй формируется путем последовательного наслоения чистых квинт (умножение частоты на 1,5). Однако данная математическая модель содержит внутреннее противоречие. При попытке замкнуть двенадцатиступенчатый квинтовый круг ($(3/2)^{12}$) теоретическое значение двенадцатой квинты должно совпасть со значением седьмой октавы (2^7). Математический расчет показывает расхождение:

$(1,5)^{12} = 129,746... \neq 2^7 = 128$

Данная разность ($129,746 / 128 \approx 1,0136$) получила название пифагоровой коммы. Наличие коммы делает невозможным построение абсолютно замкнутой и чистой системы, основанной только на целочисленных пропорциях (см. Приложение 2-3)

1.3. Классификация исторических видов строя.

В процессе исторического развития музыкальной акустики выделялись различные подходы к разрешению проблемы коммы:

1. Чистый строй (натуральный): Основан на использовании обертонового ряда. Включает в систему чистую большую терцию (отношение 4:5). Несмотря на исключительную гармоничность созвучий, данный строй крайне ограничен: он применим только в одной тональности, так как при модуляции (переходе в другую тональность) возникают резкие акустические искажения.

2. Среднетоновые строи (мезотонические): Характерны для эпохи Возрождения и раннего Барокко. В этих системах квинты намеренно сужались, чтобы достичь чистоты терций. Это расширило возможности композиторов, однако некоторые тональности оставались непригодными для использования из-за «волчьих интервалов» (крайне фальшивых созвучий).

3. Равномерно-темперированный строй (РТС): Математический прорыв XVIII века, окончательно канонизированный в трудах И. С. Баха (цикл «Хорошо темперированный клавир») (см. Приложение 4).

1.4. Математический аппарат равномерной темперации.

Суть равномерной темперации заключается в геометрическом делении октавы на 12 абсолютно равных полутонов. В этой системе пифагорова комма равномерно распределяется (растворяется) между всеми ступенями звукоряда.

Отношение частот соседних полутонов является иррациональным числом и вычисляется по формуле:

$x = \sqrt{2} \approx 1,059463$

Таким образом, частота любой ступени хроматической гаммы вычисляется как:

$fn = f1 \cdot (\sqrt{2})^n$

где f1 – частота эталонного звука, а n – количество полутонов от него.

С переходом к РТС музыкальная система трансформировалась из системы рациональных чисел (дробей) в систему иррациональных величин. Это позволило достичь энгармонизма (равенства, например, до-диеза и ре-бемоля) и обеспечило полную свободу модуляции во все 24 тональности.

1.5. Влияние математического строя на музыкальную практику и органологию.

Тип строя определяет не только эстетическое восприятие гармонии, но и конструктивные особенности музыкальных инструментов:

• Клавишные инструменты: Фиксированный строй фортепиано и органа требует жесткой темперации.

• Струнные смычковые инструменты: Отсутствие ладов позволяет исполнителям на скрипке или виолончели интонировать в строе, близком к чистому (пифагорейскому), подстраиваясь под акустический контекст.

• Духовые инструменты: Длина воздушного столба рассчитывается с учетом выбранной системы темперации, однако исполнитель может корректировать высоту звука амбушюром (См. Приложение 5).

В современной акустике для измерения микроинтервалов используется логарифмическая единица – цент. Октава делится на 1200 центов, где один равномерно-темперированный полутон равен 100 центам. Это позволяет проводить прецизионный сравнительный анализ различных музыкальных систем.

Таким образом, мы можем сделать вывод, что музыкальный строй эволюционировал от строгих пифагорейских пропорций к сложным логарифмическим моделям. Равномерная темперация, ставшая фундаментом профессионального музыкального искусства, является примером компромисса между физической чистотой звука и математической универсальностью системы. В последующих разделах будет представлен практический расчет частотных характеристик звукоряда на основе данных теоретических положений.

ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВРЕМЕННОЙ ОРГАНИЗАЦИИ И КОМПОЗИЦИОННЫХ СТРУКТУР В МУЗЫКЕ.

2.1. Математика ритмических структур и аддитивно-дискретное деление времени

Ритмическая организация в музыке представляет собой строго детерминированную систему квантования времени. Временной континуум музыкального произведения базируется на принципе иерархического деления целого.

1. Геометрическая прогрессия длительностей: Традиционная система нотации основывается на делении временной единицы (целой ноты) по степеням числа 2. Это формирует убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем q = 0,5 (1, 1/2, 1/4, 1/8... 1/2^n). Подобная структура позволяет математически точно соотносить длительность каждого звука с общей временной сеткой произведения.

2. Метрическая цикличность: Музыкальный размер (метроритм) функционирует как дробный коэффициент, определяющий периодичность акцентных структур. С точки зрения математики, такт является замкнутым циклом, внутри которого сумма всех длительностей (t) должна строго соответствовать заданному вектору: ∑ t = (a)/ (b), где a – количество долей, а b – их относительная длительность.

3. Иррациональное деление: В современной музыке часто применяются корригирующие группы (триоли, квинтоли и т. д.), которые представляют собой деление временного отрезка на нечетные простые числа (3, 5, 7, 11). Это усложняет математическую модель, вводя полиритмию и нелинейное распределение временных единиц.

2.2. Геометрические инварианты и симметрия в музыкальной композиции.

Композиционные процессы, особенно в эпоху барокко и классицизма, обнаруживают глубокую связь с геометрическими преобразованиями. Музыкальная тема в данном контексте рассматривается как объект в двухмерном пространстве «высота – время».

• Транспозиция (Параллельный перенос): Сдвиг мелодической линии вдоль оси частот при сохранении неизменными интервальных коэффициентов. В геометрии это соответствует вектору перемещения V (0, y).

•Инверсия (Зеркальное отражение): Преобразование мелодии относительно горизонтальной оси (оси симметрии). Интервалы, направленные вверх, заменяются на аналогичные интервалы, направленные вниз. Это форма осевой симметрии, сохраняющая внутреннюю структуру мотива.

• Ракоход (Центральная симметрия): Чтение музыкального текста от конечной точки к начальной (инверсия времени). Математически это соответствует отражению относительно вертикальной оси t.

• Ракоходная инверсия: Комбинация зеркального отражения и ракохода, представляющая собой сложную симметрию, характерную для полифонических фуг И. С. Баха и додекафонии XX века (например, в творчестве А. Шёнберга).

2.3. Пропорциональная архитектоника: Золотое сечение и последовательность Фибоначчи.

Принципы самоподобия и гармонических пропорций, описываемые числом Ф (Золотое сечение, ≈ 1,618), являются фундаментальными для формообразования в музыке.

1. Золотое сечение (Ф): Анализ произведений В. А. Моцарта, Л. Ван Бетховена и Ф. Шопена показывает, что точка кульминации (высшего эмоционального или динамического напряжения) часто делит общую длительность произведения в пропорции Ф. Формула золотого сечения в музыке выражается как L (total) / L (major) = L (major) / L (minor), где L – длительность тактов или временных отрезков.

2. Ряд Фибоначчи: Математическая последовательность (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...), где каждое последующее число является суммой двух предыдущих, используется для структурного деления произведения. Исследователи отмечают, что количество тактов в экспозициях, разработках и репризах классических сонат часто соответствует числам данного ряда, что создает интуитивно воспринимаемое ощущение «естественной» гармонии формы (см. Приложение 6).

2.4. Психофизический закон восприятия и логарифмическая шкала высоты звука.

Современная музыкальная акустика базируется на понимании того, что слуховой аппарат человека воспринимает физические раздражители не линейно, а логарифмически (закон Вебера-Фехнера).

• Логарифмическая зависимость: Ощущение высоты звука (S) пропорционально логарифму физической частоты (f). Математически это выражается формулой: S = k ·log (f). Именно поэтому равномерно-темперированный строй, использующий коэффициент √2, является логарифмически обоснованным (см. Приложение 7).

• Математический коэффициент темперации: Деление октавы на 12 полутонов превращает звукоряд в геометрическую прогрессию со знаменателем 2^ (1/12). Частота любой ступени (fn) определяется уравнением:

fn = f (ref)· 2^ (n/12)

где n – количество полутонов от эталона f (ref) (см. Приложение 8).

• Единица цента: Для измерения микрохроматических отклонений используется логарифмическая единица цент (cent). Один полутон равен 100 центам. Формула разности в центах между двумя частотами:

n = 1200 ·log2 (f2/f1)

Данный аппарат позволяет проводить точный математический анализ различий между этническими, историческими и современными музыкальными системами (см. Приложение 9).

В заключении этой второй главы, стоить отметить, что математические закономерности пронизывают все уровни музыкальной организации – от микроструктуры звуковой волны до макроструктуры многочастных композиций. Музыка может быть интерпретирована как сложная динамическая система, функционирующая по законам теории чисел, геометрии и математического анализа. Понимание этих связей позволяет глубже осознать объективную природу эстетического восприятия звуковой реальности.

ГЛАВА 3. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА.

3.1. Вычисление частоты нот.

Нота «ля» помогает музыкантам настроить инструменты в унисон – все звуки становятся единым целым. Ч**асто эта нота используется в качестве тонального центра** – многие музыкальные произведения строятся вокруг этой ноты. **При настройке музыкальных инструментов** ноту «ля» первой октавы используют как отправной звук – по частоте этого тона определяют частоты всех других тонов октавы, которые должны соответствовать строю инструмента.

При этом действительные частоты тонов, полученные после настройки инструмента, близки к табличным, но полного совпадения никогда не бывает.

Формула для вычисления частот на клавишах фортепиано

$$\boxed{F=f1\times 2^{i/12}}$$

Где:

F1- Частота исходной ноты (ноты ля 1 октавы, 440 Гц)

i- количество полутонов от исходной точки

Ля 1 октавы 440 Гц
Соль # 440 × 2^-1/12=415
Соль 1 октавы 440 × 2^-2/12=392
Фа # 440 × 2^-3/12= 370 Левая ветвь от ноты ля 1 октавы
Фа 1 октавы 440 × 2^-4/12=349
Ми 440 × 2^-5/12=330
Ре #440 × 2^-6/12=311
Ре 440 × 2^-7/12=294
До# 440 × 2^-8/12= 277
До 440 × 2^-9/12=262
Ля 1 октавы 440 Гц
Ля # 1 октавы 440 × 2^1/12=466
Си 1 октавы 440 × 2^2/12=494
До 2 октавы 440 × 2^3/12= 523
До# 2 октавы440 × 2^4/12=554
Ре 2 октавы440 × 2^5/12=587
Ре# 2 октавы 440 × 2^6/12=622 Правая ветвь от ноты ля 1 октавы
Ми 2 октавы 440 × 2^7/12=659
Фа 2 октавы 440 × 2^8/12=698
Фа # 2 октавы 440 × 2^9/12= 740
Соль 2 октавы 440 × 2^10/12= 784
Соль# 2 октавы 440 × 2^11/12=831
Ля 2 октавы 440 × 2^12/12=880
Ля# 2 октавы 440 × 2^13/12=932
Си 2 октавы 440 × 2^14/12= 988

После вышеизложенных вычислений, с помощью приложения «Детектор тона» (https://share.google/TCp9AiOwaKqgvCdkf) и фортепиано, я проверила частоты, которые посчитала по формуле. Звук фортепиано совпал с математическими вычислениями, что также доказывает их связь.

С помощью этих частот можно создавать аккорды, интервалы и конечно сами произведения (см. Приложение 10).

3.2. Импровизация.

С помощью полученных вычислений, я сочинила произведение, которое назвала «Меланхолия» (см. Приложение 11).

Основной вывод, который мы можем сделать, после практического применения полученных знаний, что каждое произведение может сочиняться не только на слух, но и с помощью математических решений. По которым мы понимаем, где звук хорош, а где нет.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, делаем вывод, что музыкальный строй – это система соотношения частот, которая находит строгое описание в виде числовых закономерностей (например, геометрическая прогрессия). Постоянство «мультипликативного» шага у равномерно темперированного строя обусловило его главное преимущество перед историческими предшественниками – возможность «сдвигать» музыкальные мелодии на произвольное число ступеней. При сдвиге фрагмента отношение частот соседских нот остаётся неизменным, а следовательно, сохраняется и мелодический рисунок.

Математическое описание помогает понять развитие музыкальной культуры, включая переход к равномерно темперированному строю, который канонизировал И.С. Бах.

Изучение темы демонстрирует единство музыки и математики, что способствует лучшему пониманию обеих дисциплин.

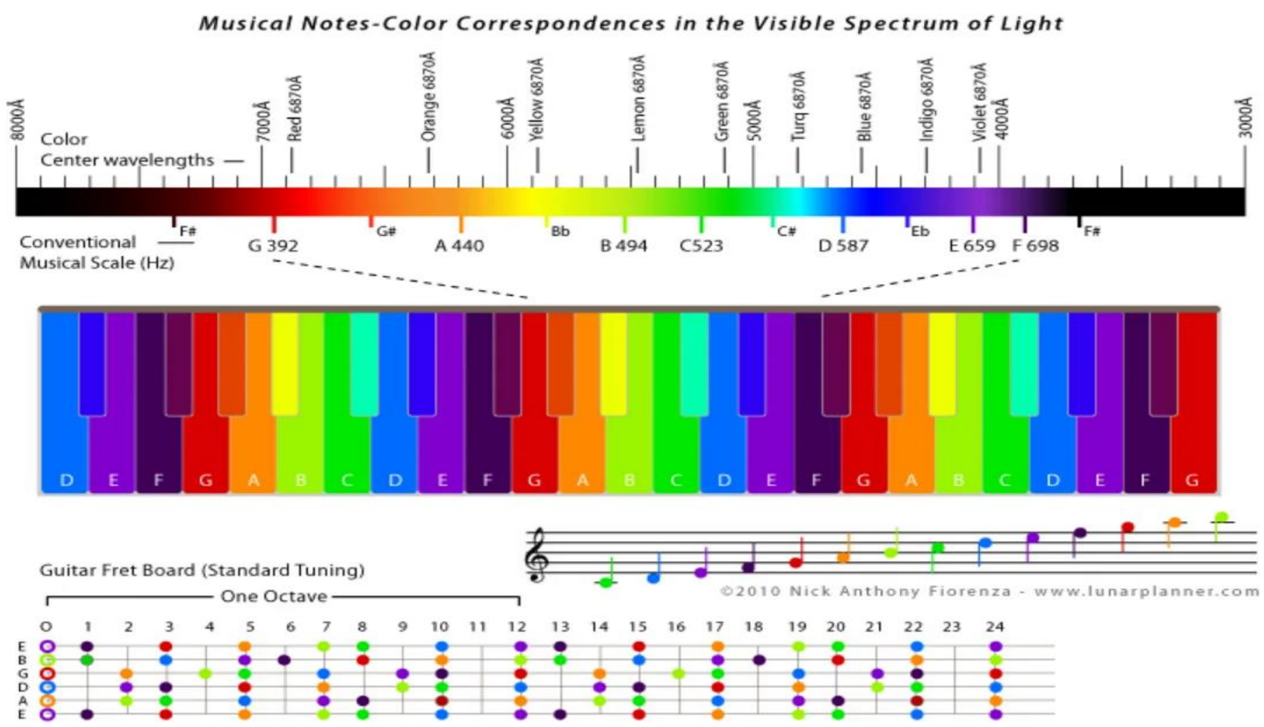
Занятия, связывающие музыку и математику, способствуют гармоничной работе полушарий мозга и повышению интеллекта.

Математическое описание позволяет сопоставить звуковые частоты и ноты, что делает эту тему важной для понимания основ музыкальной акустики.

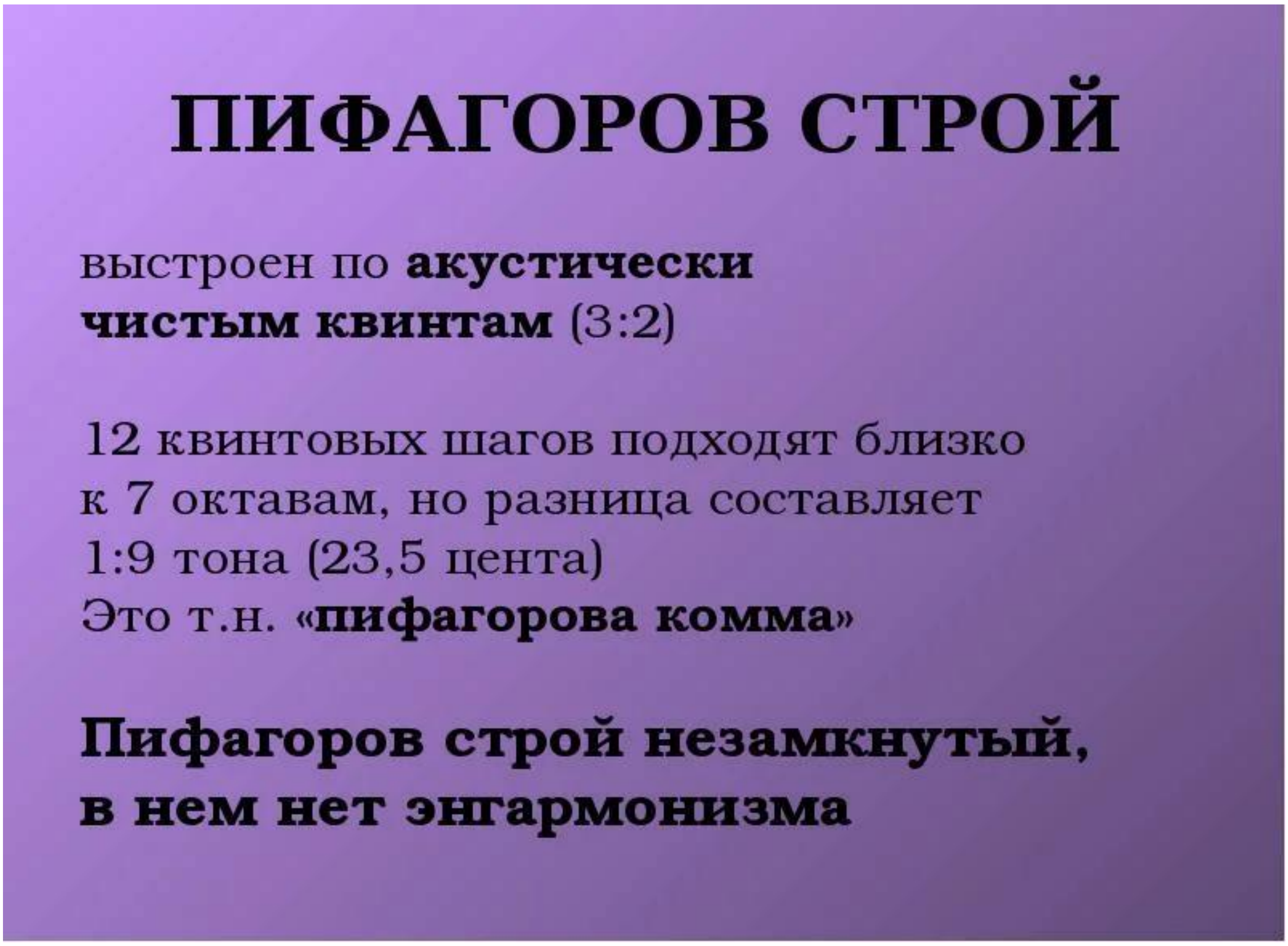
Для меня разработка темы музыкального строя в математическом описании показала, что новый изученный материал не только доказал, что поставленные мною цели достигнуты, но и изученный материал поможет мне в дальнейшем писать, импровизировать и творить.

ПРИЛОЖЕНИЯ

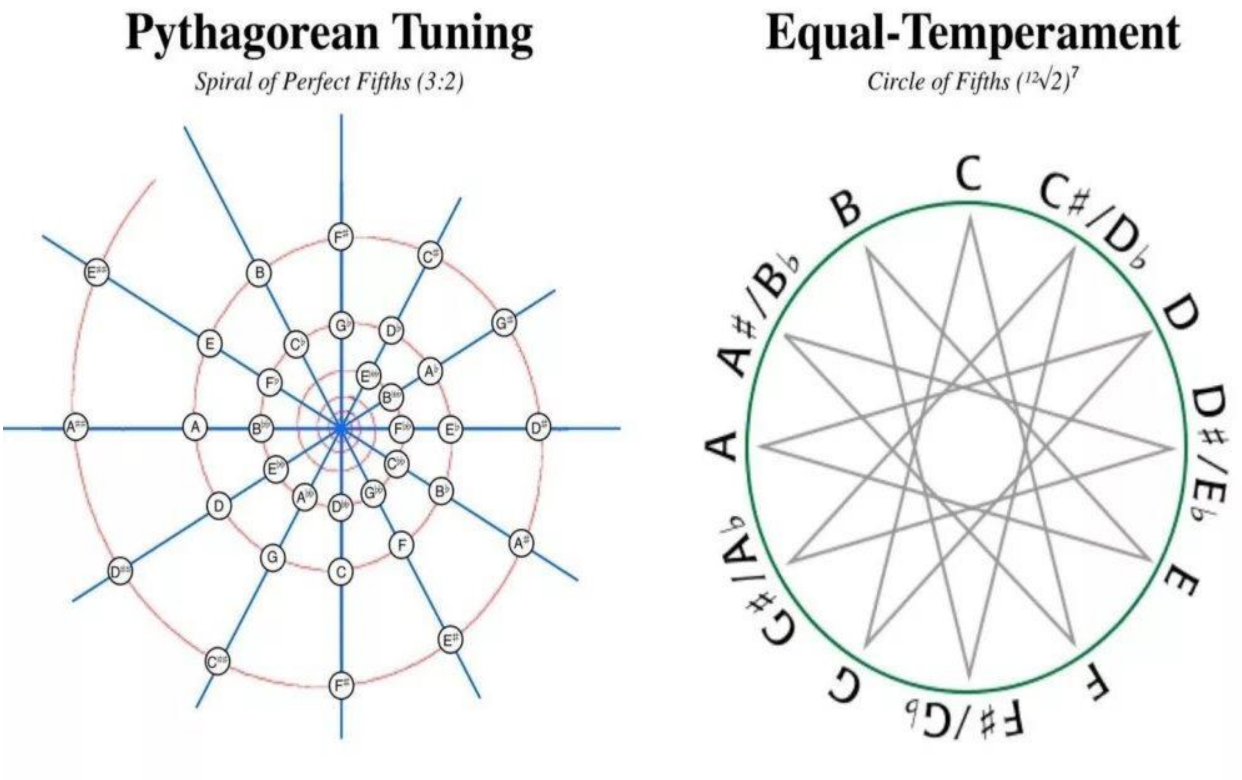
Приложение 1



Приложение 2



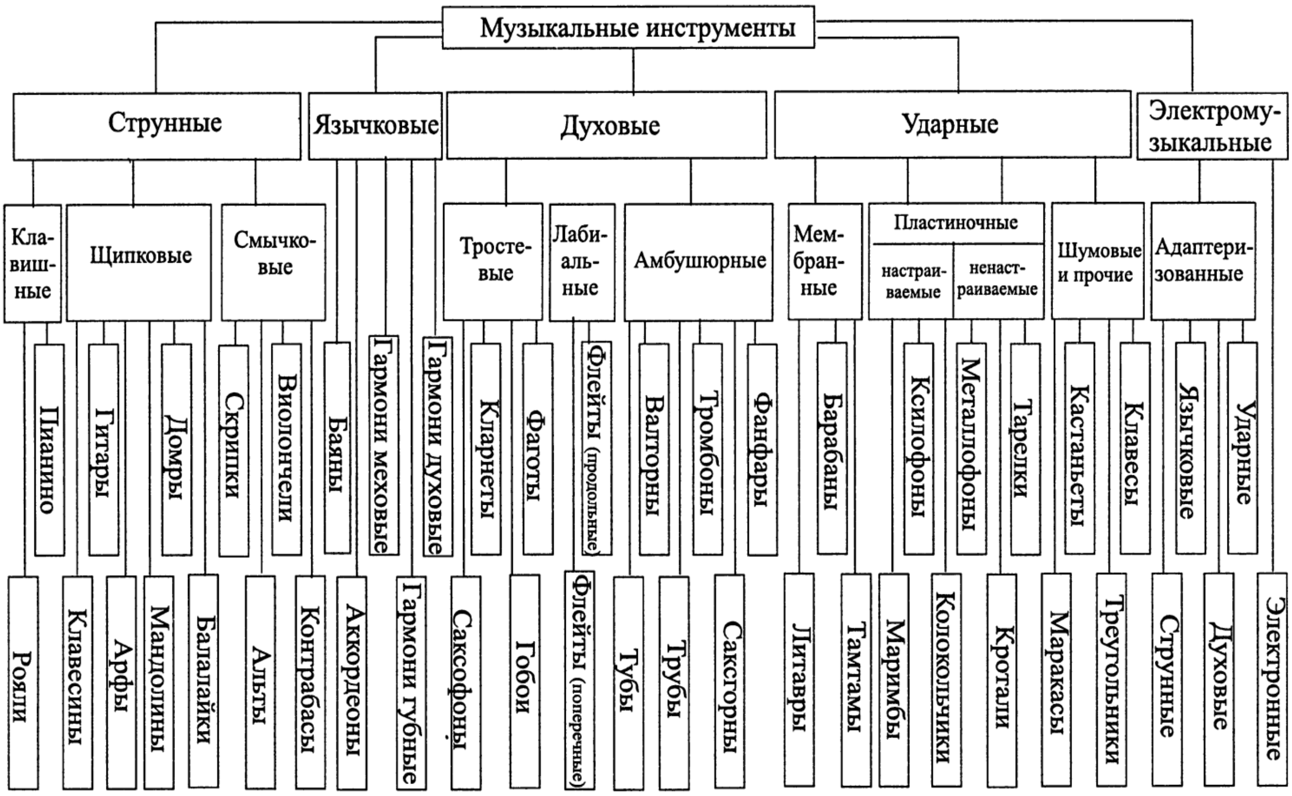
Приложение 3



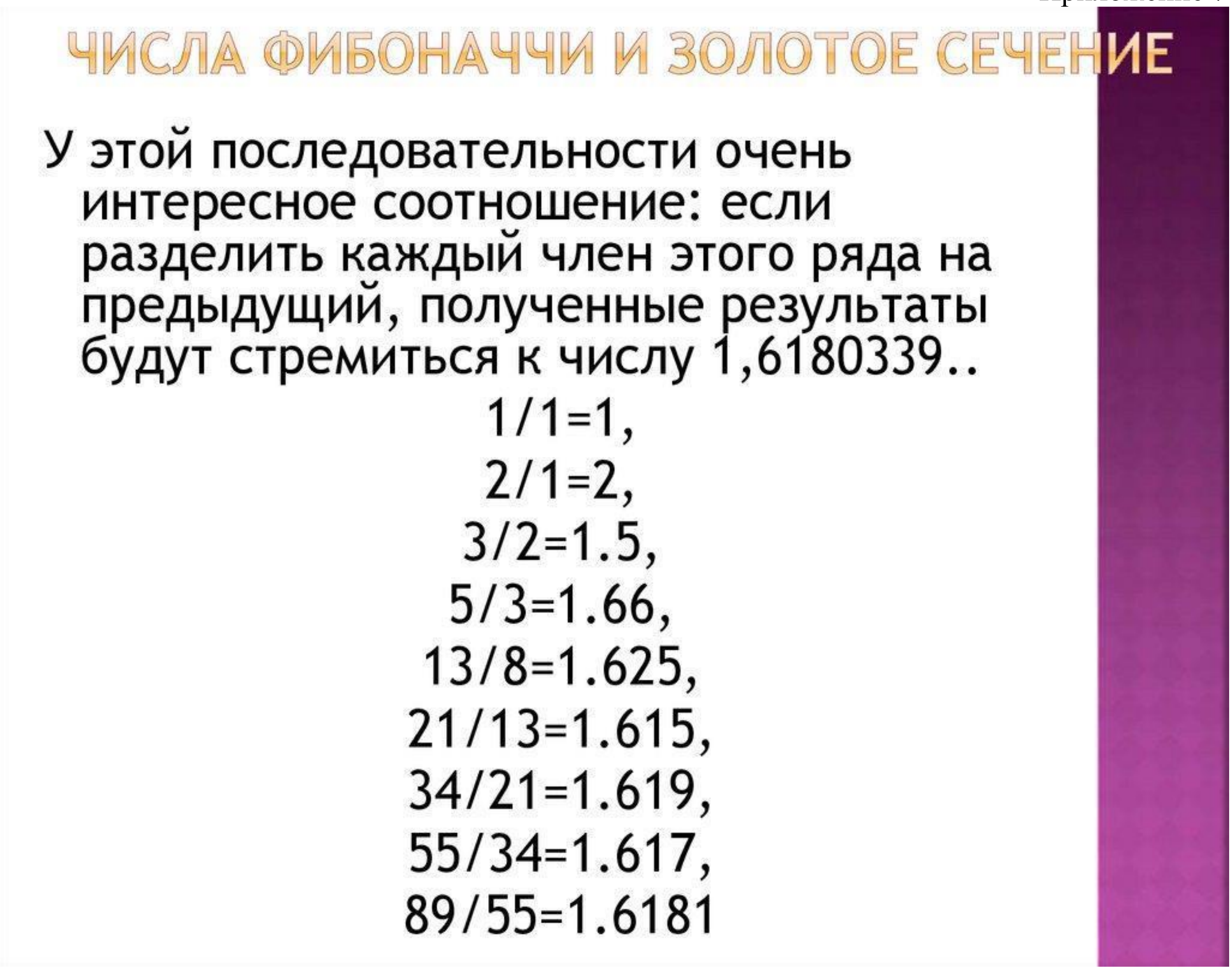
Приложение 4

Приложение 5

Приложение 6



Приложение 7



Приложение 8

Музыка и логарифмы

Нажимая на клавиши современного рояля, мы, можно сказать, играем на логарифмах.

Так называемые ступени частот звуковых колебаний представляют собой логарифмы. Только основание этих логарифмов равно 2 (а не 10, как принято в других случаях). Номера клавишей рояля представляют собой логарифмы чисел колебаний соответствующих звуков; номер октавы представляет собой характеристику, а номер звука в данной октаве мантиссу этого логарифма.

Приложение 9

МАТЕМАТИКА

Пример 1:

- Можно вычислить частоту звука на тон (2 полутона) ниже от камертона Ля (первая октава, 440 Гц) — ноты соль:

$$f(i) = f_0 \cdot 2^{i/12}$$

$$i = -2$$

$$f(-2) = 440\,\mathrm{Hz} \cdot 2^{-2/12} \approx 391{,}995\,\mathrm{Hz}$$

Приложение 10

Приложение 11

Список литературы:

1. Волошин А.В. Математика и музыка с. 115-190 // Волошин А.В. Математика и искусство. М.: Просвещение, 2000. – 399 с.
2. Способин И.В. Элементарная теория музыки. М.: «Кифара», 1996. – 208 с.
3. Шилов Г.Е. Простая гамма: устройство музыкальной шкалы. М., 1980. – 24 с.
4. Гарбузов Н. А. Музыкальная акустика. М.: МУЗГИЗ, 1954 – 237 с.
5. Холопов Ю. Н. Гармония. Теоретический курс: Учебник. СПб.: Издательство «Лань», 2003. -272 с.
6. Рагс Ю. Н., Руденко В. П. «Акустика для музыкантов».
7. Васильев А. А. Математика и музыка. – М.: Знание, 1983
8. Газеев А. А. Математические основы музыкального строя. – СПб.: Лань, 2018.
9. Ермолаев В. Г. Золотое сечение в музыке. – М.: Музыка, 1970.
10. Лосев А. Ф. Музыка как предмет логики. – М.: Академический проект, 2012.
11. Мазель Л. А. Строение музыкальных произведений. – М.: Музыка, 1986.
12. Пифагор и пифагорейцы. Сборник текстов.
13. Тихонов А. Н. Математика и музыкальный ритм. // Журнал «Математика в школе», №4, 2015.
14. Шерман Н. С. Формирование равномерно-темперированного строя. – М.: Музыка, 1982