DOI 10.58351/2949-2041.2024.11.6.011

Машунин Юрий Константинович,
доктор экономических наук, доцент, профессор кафедры
«Государственного и муниципального управления»
Дальневосточного федерального университета,
Mashunin Yury Konstantinovich, Doctor of Economics, associate professor,
professor of the Department «State and municipal management»
Far Eastern Federal University

МАТЕМАТИКА ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ В ТЕОРИИ ПРИНЯТИЯ УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В ИНЖЕНЕРНЫХ СИСТЕМАХ

Abstract: Целью данной работы является представление математики векторной оптимизации и ее использование в прикладных методах теории принятия управленческих решений в инженерных системах. В рамках теории векторной оптимизации математического программирования https://rdcu.be/bhZ8i представлены принципы оптимальности решения векторных задач с эквивалентными критериями и с заданным приоритетом критерия. (Работа «Векторная оптимизация с эквивалентными и приоритетными критериями» издательства Springer Nature распространяется бесплатно.). На основе теории разработаны конструктивные методы решения задач векторной оптимизации, позволяющие принять решение, во-первых, с эквивалентными критериями, а во-вторых, с заданным приоритетом критерия. При исследовании задачи векторной оптимизации показана взаимосвязь векторной оптимизации с проблемой аксиоматики. В работе представлено, что в результате решения любой векторной задачи решается проблема аксиоматики в относительных единицах. Практическая направленность работы связана с автоматизированным проектированием инженерных систем на основе векторной оптимизации. Разработанные конструктивные методы решения векторных задач математического программирования (ВЗМП) используются в теоретических и прикладных работах. Во-первых, в проблемах принятия решений в условиях определенности и неопределенности. Во-вторых, конструктивные методы решения ВЗМП, основаны на экспериментальных данных, и используются при проектировании технических систем различных отраслей промышленности: Численный пример включает: исходные данные (техническое задание) для моделирования; преобразование математической модели в условиях неопределенности в модель в условиях определенности; принятие оптимального решения с эквивалентными критериями (решение численной модели); принятие оптимального решения с заданным приоритетом критерия.

Abstract: The purpose of this work is to present the mathematics of vector optimization and its use in applied methods of the theory of managerial decision-making in engineering systems. Within the framework of the theory of vector optimization, the principles of optimality of solving vector problems with equivalent criteria and with a given priority of the criterion are presented https://rdcu.be/bhZ8i. (The work "Vector optimization with equivalent and priority criteria» by Springer Nature is distributed free of charge.). On the basis of the theory, constructive methods for solving vector optimization problems have been developed, which make it possible to make a decision, first, with equivalent criteria, and second, with a given priority of the criterion. When studying the problem of vector optimization, the relationship of vector optimization with the problem of axiomatics is shown. The paper presents that as a result of solving any vector problem, the problem of axiomatics in relative units is solved. The practical orientation of the work is associated with computer-aided design of engineering systems based on vector optimization.

The formed constructive methods of solving vector problems of mathematical programming are used in theoretical and applied works. First, in the problems of decision-making in conditions of certainty and uncertainty. Secondly, constructive methods for solving vector problems of mathematical (convex) programming, based on experimental data, are used in the design of technical systems of various industries: Numerical example includes: initial data (terms of reference) for modeling; transformation of a mathematical model under conditions of uncertainty into a model under conditions of certainty; making an optimal decision with equivalent criteria (numerical model solution); making an optimal decision with a given priority of the criterion.

Keywords: Векторная оптимизация, Методы решения векторных задач, Теория принятия решений, Моделирование технической системы, Моделирование экономической системы.

Keywords: Vector optimization, Axiomatics, Methods of solving vector problems, Decision theory, Modeling of technical system.

1. Introduction

Исследования в рамках теории принятия управленческих решений в инженерных системах показали, что производственная деятельность этих систем зависит от некоторого множества функциональных характеристик, которые необходимо учитывать на стадии проектирования. К инженерным системам мы относим технические системы, технологические процессы, структура материала.

В производственной деятельности улучшение по одной из характеристик инженерной системы приводит к ухудшению других характеристик системы. А для улучшения функционирования производственной деятельности инженерной системы необходимо улучшения всех характеристик системы в совокупности.

При моделировании инженерных систем, множество характеристик рассматривается как множество критериев. Так возникли многокритериальные оптимизационные задачи. Не нарушая общности множество критериев можно представить в виде вектора критериев. Так формируется векторная задача оптимизации. Для решения задача векторной оптимизации необходимо создание аксиоматики, принципов оптимальности и методов решения векторных (многокритериальных) задач оптимизации.

Исследования такого класса задач началось более ста лет тому назад в работе Pareto V. [1]. Исследование многокритериальной оптимизации проводилось как на теоретическом уровне зарубежными [3, 25-30] и русскими авторами [4-23, 46, 47], так и на решении практических задач сначала в области экономики [31-45], а за тем в области инженерных систем [6-21, 46, 47].

Целью данной работы является представление математики векторной оптимизации и ее использование в прикладных методах теории принятия управленческих решений в инженерных системах. Мы представили теорию векторной оптимизации, которая включает: аксиоматику, принципы оптимальности и методы прикладной математики: векторные задачи линейного программирования и векторные задачи нелинейного программирования.

В области инженерных систем, к которым относятся технические системы [11-14, 18, 19], технологические процессы [15, 21], материалы [17]. В работе сформированные конструктивные методы решения векторных задач математического (выпуклого) программирования, используя экспериментальные данные, представлены при проектировании технической системы. Реализация методологии представлена на решении численной задачи принятия решений в технической системе с четырьмя параметрами. Решение проблемы принятия решений включает: построение численной модели объекта в виде векторной задачи; решение задачи принятия решений при равнозначных критериях; решение векторной задачи принятия решений с приоритетом критерия.

2. Векторная задача математического программирования: исследование, анализ, теория векторной оптимизации

2.1. Векторная задача математического программирования

Векторная задача математического программирования (ВЗМП) – это стандартная задача математического программирования, имеющая некоторое множество критериев, которые в совокупности представляют вектор критериев.

ВЗМП подразделяются на однородные и неоднородные ВЗМП.

Однородные ВЗМП максимизации – это векторная задача, у которой каждая компонента множества критериев направлена на максимизацию.

Однородные ВЗМП минимизации – это векторная задача, у которой каждая компонента множества критериев направлена на минимизацию.

Неоднородные ВЗМП – это векторная задача, у которой множество критериев разделено на два подмножества (вектора) критериев – максимизации и минимизации соответственно, т. е. неоднородные ВЗМП – это объединение двух видов однородных задач.

В соответствии с этими определениями представим выпуклую векторную задачу математического программирования с неоднородными критериями [5, 19, 21].

$$Opt\, F(X) = \{\max F_1(X) = \{\max f_k(X),\ k = \overline{1, K_1}\}, \quad (2.1)$$

$$\min F_2(X) = \{\min f_k(X),\ k = \overline{1, K_2}\}\}, \quad (2.2)$$

$$G(X) \le B, \quad (2.3)$$

$$X \ge 0, \quad (2.4)$$

где $X = \{x_j,\ j = \overline{1, N}\}$ - вектор переменных, т.е. это вектор из N-мерного евклидова $\boldsymbol{R}^N$, (обозначение $j = \overline{1, N}$ эквивалентно $j = 1,...,N$);

$F(X)$ - вектор-функция (векторный критерий), имеющая K – компонент-функций, (K - мощность множества $\boldsymbol{K}$), $F(X) = \{f_k(X),\ k = \overline{1, K}\}$. Множество $\boldsymbol{K}$ состоит из подмножества $\boldsymbol{K}_1$ компонент максимизации и подмножества $\boldsymbol{K}_2$ минимизации; $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_1\cup\boldsymbol{K}_2$, для оценки совокупности критериев вводится обозначение операция «*opt*», которое включает в себя *max* и *min*;

$F_1(X) = \{f_k(X),\ k = \overline{1, K_1}\}$ – это векторный критерий, каждая компонента которого максимизируется, K_1 – число критериев, а $K_1 \equiv \overline{1, K_1}$ - множество критериев максимизации (задача (2.1), (2.3), (2.4) представляют собой ВЗМП с однородными критериями максимизации). В дальнейшем будем предполагать, что $f_k(X), k = \overline{1, K_1}$ - непрерывные вогнутые функции (иногда будем их называть критериями максимизации);

$F_2(X) = \{f_k(X),\ k = \overline{1, K_2}\}$ - векторный критерий, каждая компонента которого минимизируется, $K_2 \equiv \overline{K_1 + 1, K} \equiv \overline{1, K_2}$ - множество критериев минимизации, K_2 – число, (задача (2.2) -(2.4) это ВЗМП с однородными критериями минимизации). Предполагаем, что $f_k(X), k = \overline{1, K_2}$ - непрерывные выпуклые функции (будем иногда их называть критериями минимизации), т. е.: $\boldsymbol{K}_1 \cup \boldsymbol{K}_2 = \boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}_1 \subset \boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}_2 \subset \boldsymbol{K}$.

$G(X) \le B, X \ge 0$ - стандартные ограничения, $g_i(X) \le b_i, i = 1, \ldots, M$, где b_i - набор вещественных чисел, а функции $g_i(X)$ предполагаются непрерывными и выпуклыми.

Обозначим: $\boldsymbol{S} = \{X \in \boldsymbol{R}^n | G(X) \le 0, X^{min} \le X \le X^{max}\} \ne \emptyset$ - (2.5)

это допустимое множество точек (или более кратко - допустимое множество), задающиеся стандартными ограничениями (2.3)-(2.4) и тривиальными ограничениями $X \ge 0$. Предполагаем, что допустимое множество точек не пусто и представляет собой компакт.

Векторная функция (критерий) минимизации $F_2(X)$ может быть преобразован в векторную функцию (критерий) максимизации умножением каждой компоненты $F_2(X)$ на минус единицу. Векторный критерий $F_2(X)$ введен в ВЗМП (2.1)-(2.4) для того, чтобы показать, что в задаче имеется два подмножества критериев $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ с принципиально различными направлениями оптимизации.

Предполагаем, что точки оптимума, полученные по каждому критерию, не совпадают хотя бы для двух критериев. Если все точки оптимума совпадают между собой для всех критериев, то считаем решение тривиально.

2.2. Исследование и анализ современных подходов к решению задач векторной оптимизации

В последние три десятилетие методам решения векторных (многокритериальных) задач посвящено большое количество монографий и отдельных статей. Это связано с широким использованием этих методов в решении практических задач. Анализ методов и алгоритмов решения многокритериальных задач в соответствии со своей классификацией представлен в ряде работ [6, 10, 22, 39, 45].

Представим анализ нижеперечисленных методов в соответствии с классификацией, данной в работе [6, 22]:

методы решения ВЗМП, основанные на свертывании критериев с весовыми коэффициентами [3, 5, 25]. Это направление исследований с весовыми коэффициентами является основным в большинстве работ [26, 27]. Исследование и анализ недостатков оптимизационных задач с весовыми коэффициентами представлен в разделе 6.3;

методы решения ВЗМП, использующие ограничения на критерии [26, 27];

методы целевого программирования [28];

методы, основанные на отыскании компромиссного решения [29, 30];

методы, основанные на человеко-машинных процедурах принятия решения [5, 30].

В монографии [22, стр. 83-95] на тестовом примере показаны недостатки этих методов в совокупности. Это связано с тем, что решение проблемы векторной оптимизации обусловлено рядом трудностей, причем концептуального характера, и главная из них понять: «что значит решить задачу векторной оптимизации», т.е. сформировать принцип оптимальности, показывающий, почему одно решение лучше другого, и определяющий правило выбора наилучшего решения.

2.3. Заключение по современным методам решения векторной задачи оптимизации

Оценивая в целом результаты исследования и анализа современных методов решения векторных задач, а также моделирования инженерных и экономических систем приходим к следующим выводам:

1) большинство задач принятия решений, а также технические, экономические системы имеют множество характеристик, которые используются как цели развития. Для их моделирования и принятия оптимального решения требуется решение векторных (многокритериальных) задач, лежащих в основе этих моделей;

2) для большинства современных методов (а вернее, подходов) решения векторных задач не решена проблема соизмеримости критериев в ВЗМП;

3) для большинства современных методов не решена проблема выбора оптимального решения, т. е. построения принципа оптимальности, указывающего, почему одно решение лучше другого;

4) не решена проблема выбора оптимального решения, как при равнозначных критериях, так и при заданном предпочтении (приоритете) критерия (такая задача решается при условии: «что, если»).

Оценивая в целом представленные недостатки современных подходов к решению многокритериальных (векторных) задач, мы приходим к выводу, что основной недостаток – это отсутствие аксиоматики и принципа оптимальности, которое определяет: «чем одно решение лучше другого».

В работе указанные проблемы решаются в следующей последовательности:

Во-первых, разработана нормализация критериев, которая позволяет сравнивать критерии между собой, измеренных в различных физических единицах;

Во-вторых, разработана аксиоматика, которая определяет равнозначность критериев и приоритет того или иного критерия в векторной задаче;

В-третьих, разработаны принципы оптимальности, которые определяют оптимальность при равнозначных критериях, и при заданном приоритете того или иного критерия в векторной задаче;

В-четвертых, разработаны конструктивные методы решения векторных задач математического программирования с равнозначными критериями и с заданным приоритетом одного из критериев, которые позволяют решать практические задачи в различных областях исследований: при принятии решений, моделировании на стадии проектирования инженерных систем, моделировании развития экономических систем.

2.4. Теория векторной оптимизации

Теория векторной оптимизации направлена на решение векторных задач математического программирования (2.1)-(2.4) с однородными и неоднородными критериями.

Теория векторной оптимизации включает теоретические основы (аксиоматику) и методы решения векторных задач, во-первых, с равнозначными критериями и, во-вторых, с заданным приоритетом критерия. В совокупности теория векторной оптимизации представляет математический аппарат моделирования и принятия оптимального решения «объекта принятия решений».

«Объектом принятия решений» является: социальная система, экономическая и техническая система. Математический аппарат позволяет выбрать любую точку из множества точек, оптимальных по Парето, и показать ее оптимальность. Мы представили аксиоматику, принцип оптимальности и методы решения задач векторной оптимизации (2.1)-(2.4) с равнозначными критериями и заданным приоритетом критериев. [6, 20]. Для простоты исследования критерии и ограничения ВЗМП (2.1)-(2.4) представлены полиномами второй степени, т.е. рассматриваются выпуклые векторные задачи, которые также включают векторные задачи линейного программирования. Выпуклые ВЗМП характеризуются свойством, что точка оптимума существует и такая точка только одна (Теорема Вейерштрасса).

3. Аксиоматика и принцип оптимальности векторной оптимизации с равнозначными критериями

Определение Аксиомы. Аксиома - это утверждение, не требующее логического доказательства. На основе этих утверждений (исходных положений) строится та или иная теория. Аксиоматический метод - это способ построения научной теории, при котором в основу теории кладутся некоторые исходные положения, называемые Аксиомами теории. В итоге все остальные положения теории получаются как логические следствия аксиом, [2].

В математике Аксиоматический метод зародился в работах древнегреческих геометров. Образцом аксиоматического метода является древнегреческий ученый Евклид, аксиомы которого были заложены в его знаменитом сочинении «Начала».

3.1. Исходные определения для построения аксиоматики векторной оптимизации с равнозначными критериями

Определение 1. (*Нормализация критерия*).

Нормализация критериев (математическая операция: сдвиг плюс нормирование) представляет однозначное отображение функции $f_k(X)\ \forall k \in K$, в одномерное пространство $\boldsymbol{R}^1$ (сама функция $f_k(X)\ \forall k \in K$ представляет собой функцию преобразования из N-мерного евклидова пространства $\boldsymbol{R}^N$ в $\boldsymbol{R}^1$). Для нормализации критериев в векторных задачах будут использоваться линейные преобразования:

$$f_k(X) = a_k f'_k(X) + c_k\ \forall k \in K, \text{ или}$$
$$f_k(X) = (f'_k(X) + c_k)/a_k\ \forall k \in K,$$

где $f'_k(X)\,, k=\overline{1,K}$ - старое (до нормализации) значение критерия; $f_k(X), k=\overline{1,K}$ - нормализованное значение, $a_k,\ c_k$- постоянные.

Нормализация критериев $f_k(X)=(f'_k(X)+c_k)/a_k\ \forall k\in$К представляет простое (линейное) инвариантное преобразование полинома, в результате которого структура полинома остается неизменной. В оптимизационной задаче нормализация критериев $f_k(X)=(f'_k(X)+c_k)/a_k\ \forall k\in$К не влияет на результат решения.

Действительно, если решается выпуклая оптимизационная задача:

$\boldsymbol{max}_{X\in S}\, f(X)$, то в точке оптимума $X^*\in S$: $\frac{df(X^*)}{\mathrm{d}X}=0$.

В общем случае (в том числе с нормализацией критерия (2.1)) решается задача:
$\boldsymbol{max}_{X\in S}\,(a_k f'_k(X)+c_k)$, то в точке оптимума $X^*\in S$:

$$\frac{d(a_k f(X^*)+c_k)}{\mathrm{d}X}=a_k\frac{d\big(f(X^*)\big)}{\mathrm{d}X}+\frac{d(c_k)}{\mathrm{d}X}=0.$$

Результат идентичен, т.е. точка оптимума $X^*_k, k=\overline{1,K}$ является одной и той же для ненормализованных и нормализованных задач.

Определение 2. (*Определение относительной оценки критерия*).

В векторной задаче (2.1)-(2.4) мы введем обозначение:

$$\lambda_k(X)=\frac{f_k(X)-f_k^0}{f_k^*-f_k^0},\ \forall k\in\boldsymbol{K} \qquad (3.1)$$

это относительная оценка k-го критерия в точке $X\in\boldsymbol{S}$, где f_k^* наилучшая величина k-го критерия, полученная при решении ВЗМП (2.1)-(2.4) отдельно по k-му критерию;

f_k^0- наихудшая величина k-го критерия (антиоптимум) в точке X_k^0 (верхний индекс 0 - ноль) на допустимом множестве $\boldsymbol{S}$;

в задаче на *max* (2.1), (2.3), (2.4) величина f_k^0 является наименьшим значением k-го критерия: $f_k^0=min_{X\in S}f_k(X)\ \forall k\in K_1$,

а в задаче на *min* (2.2), (2.3), (2.4) величина f_k^0 является наибольшим значением k-го критерия: $f_k^0=max_{X\in S}f_k(X)\ \forall k\in K_2$.

Относительная оценка $\lambda_k(X)\ \forall k\in K$, во-первых, измеряется в относительных единицах; во-вторых, относительная оценка $\lambda_k(X)\ \forall k\in K$: на допустимом множестве меняется с нуля в точке X_k^0: $\forall k\in\boldsymbol{K}\ \lim\limits_{X\to X_k^0}\lambda_k(X)\,\lambda_k(X)=0$,

к единице в точке оптимума X_k^*:

$$\forall k\in\boldsymbol{K}\ \lim_{X\to X_k^*}\lambda_k(X)=1:$$

$$\forall k\in\boldsymbol{K}\ 0\le\lambda_k(X)\le 1, \mathrm{X}\in\boldsymbol{S}, \qquad (3.2)$$

В результате такой нормализации все критерии ВЗМП (2.1)-(2.4) соизмеримы в относительных единицах, что позволяет, сравнимая их друг с другом, использовать критерии при совместной оптимизации.

3.2. Аксиоматика векторной оптимизации с равнозначными критериями

Аксиома 1. **(***О равенстве и равнозначности критериев в допустимой точке векторной задачи математического программирования***)**

В векторной задаче два критерия с индексами $k\in\boldsymbol{K}, q\in\boldsymbol{K}$ будем считать равными в точке $X\in\boldsymbol{S}$, если относительные оценки по k-му и q-му критерию равны между собой в этой точке, т. е. $\lambda_k(X)=\lambda_q(X), k,q\in\boldsymbol{K}$.

Критерии будем считать равнозначными в векторной задаче, если в точке $\mathrm{X}\in\boldsymbol{S}$ при сравнении по числовой величине относительных оценок $\lambda_k(X),\ k=\overline{1,K}$, между собой, на каждый критерий $f_k(X), k = \overline{1,K}$, и, соответственно, относительные оценки $\lambda_k(X)$, не накладывается условий о приоритетах критериев.

Определение 3. (*Определение минимального уровня среди всех относительных оценок критериев*). *Относительный уровень* λ в векторной задаче представляет нижнюю оценку точки $X \in S$ среди всех относительных оценок $\lambda_k(X), k = \overline{1,K}$::

$$\forall X \in \boldsymbol{S}\ \lambda \le \lambda_k(X), k = \overline{1,K}, \tag{3.3}$$

нижний уровень для выполнения условия (3.3) в точке $X \in \boldsymbol{S}$ определяется формулой

$$\forall X \in S\ \lambda = \boldsymbol{min}_{k \in K} \lambda_k(X). \tag{3.4}$$

Соотношения (3.3) и (3.4) являются взаимосвязанными. Они служат переходом от операции (3.4) определения min к ограничениям (3.3) и наоборот. Уровень λ позволяет объединить все критерии в векторной задаче одной числовой характеристикой λ и производить над ней определенные операции, тем самым, выполняя эти операции над всеми критериями, измеренными в относительных единицах. Уровень λ функционально зависит от переменной $X \in \boldsymbol{S}$, изменяя X, можем изменять нижний уровень - λ.

3.3. Принцип оптимальности векторной оптимизации с равнозначными критериями

Определение 4. (*Принцип оптимальности 1 с равнозначными критериями*).

Векторная задача математического программирования при равнозначных критериях решена, если найдена точка $X^o \in \boldsymbol{S}$ и максимальный уровень λ^o (верхний индекс o - оптимум) среди всех относительных оценок такой, что

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{X \in S} \boldsymbol{min}_{k \in K} \lambda_k(X) \tag{3.5}$$

Используя взаимосвязь выражений (3.3) и (3.4), преобразуем максиминную задачу (3.5) в экстремальную задачу:

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{X \in S} \lambda \tag{3.6}$$

при ограничениях $\lambda \le \lambda_k(X), k = \overline{1,K}$. (3.7)

Полученную задачу (3.6)-(3.7) назовем λ-задачей. λ-задача (3.6)-(3.7) имеет (N+1) размерность, как следствие результат решения λ-задачи (3.6)-(3.7) представляет собой оптимальный вектор $X^o \in R^{N+1}$, (N+1)-я компонента которого суть величина λ^o, т. е. $\boldsymbol{X^o} = \{x_1^o, x_2^o, \dots, x_N^o, x_{N+1}^o\}$, при этом $x_{N+1}^o = \lambda^o$, (N+1) компонента вектора $\boldsymbol{X^o}$ выделена в λ^o.

Полученная пара $\{\lambda^o, X^o\} = \boldsymbol{X^o}$ характеризует оптимальное решение λ-задачи (3.6)-(3.7) и соответственно векторной задачи математического программирования (2.1)-(2.4) с равнозначными критериями, решенную на основе нормализации критериев и принципе гарантированного результата. Назовем в оптимальном решении $\boldsymbol{X^o} = \{\lambda^o, X^o\}$, X^o - оптимальной точкой, а λ^o - максимальным уровнем.

Важным результатом алгоритма решения векторной задачи с равнозначными критериями (2.1)-(2.4) является следующая теорема.

Теорема 1. (*Теорема о двух наиболее противоречивых критериях* в векторной задаче математического программирования с равнозначными критериями).

В выпуклой векторной задаче математического программирования (2.1)-(2.4) при эквивалентных критериях, решенной на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата, в оптимальной точке $\boldsymbol{X^o} = \{\lambda^o, X^o\}$ всегда имеется два критерия - обозначим их индексами $q \in \boldsymbol{K}, p \in \boldsymbol{K}$ (которые являются самыми противоречивыми из множества критериев $k = \overline{1,K}$), и для которых выполняется равенство:

$$\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_p(X^o), q, p \in \boldsymbol{K}, X \in \boldsymbol{S}, \tag{3.8}$$

и другие критерии определяются неравенством:

$$\lambda^o \le \lambda_k(X^o), \forall k \in \boldsymbol{K},\ q \ne p \ne k. \tag{3.9}$$

Впервые доказательство теоремы 1 представлено в [5, стр.22], в дальнейшем повторено в работе [10, стр.234], но толком не понято до сих пор.

Вместе с тем, что точка X^o является оптимальным решением ВЗМП.

3.4. Метод решения задачи векторной оптимизации с равнозначными критериями

Для решения векторных задач математического программирования (2.1)-(2.4) предложены методы, основанные на аксиоматике нормализации критериев и принципе гарантированного результата, вытекающие из аксиомы 1 и принципа оптимальности 1.

Мы представим в виде ряда шагов.

Шаг 1. Решается задача (2.1)-(2.4) по каждому критерию отдельно, т.е. для $\forall k \in \boldsymbol{K}_1$ решается на максимум, а для $\forall k \in \boldsymbol{K}_2$ решается на минимум.

В результате получим:

X_k^*- точка оптимума по соответствующему критерию, $k = \overline{1, K}$;

$f_k^* = f_k(X_k^*)$ – величина k-го критерия в этой точке, $k = \overline{1, K}$.

Шаг 2. Определяем наихудшую величину каждого критерия (антиоптимум): f_k^0, $k = \overline{1, K}$. Для чего решается задача (2.1)-(2.4) для каждого критерия $k = \overline{1, \boldsymbol{K}_1}$ на минимум:

$f_k^0 = min\, f_k(X), G(X) \leq B, X \geq 0, k = \overline{1, \boldsymbol{K}_1}$

для каждого критерия $k = \overline{1, \boldsymbol{K}_2}$ на максимум:

$f_k^0 = max\, f_k(X), G(X) \leq B, X \geq 0, k = \overline{1, \boldsymbol{K}_2}$. (3.10)

В результате решения получим: $X_k^0 = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ - точка оптимума по соответствующему критерию, $k = \overline{1, K}$;

$f_k^0 = f_k(X_k^0)$ – величина k-го критерия в точке, $X_k^0, k = \overline{1, K}$.

Шаг 3. Выполняется системный анализ множества точек, оптимальных по Парето. В точках $X^* = \{X_k^*, k = \overline{1, K}\}$ определяются величины целевых функций $F(X^*)$ и относительных оценок $\lambda(X^*)$: $\lambda_k(X) = \frac{f_k(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, \forall k \in \boldsymbol{K}$.

$$F(X^*) = \{f_k(X_k^*), q = \overline{1, K}, k = \overline{1, K}\} = \begin{vmatrix} f_1(X_1^*), \dots, f_K(X_1^*) \\ \dots \\ f_1(X_K^*), \dots, f_K(X_K^*) \end{vmatrix}, \tag{3.11}$$

$$\lambda(X^*) = \{\lambda_q(X_k^*), q = \overline{1, K}, k = \overline{1, K}\} = \begin{vmatrix} \lambda_1(X_1^*), \dots, \lambda_K(X_1^*) \\ \dots \\ \lambda_1(X_K^*), \dots, \lambda_K(X_K^*) \end{vmatrix}. \tag{3.12}$$

В целом по задаче относительная оценка (3.12) $\lambda_k(X), k = \overline{1, K}$ лежит в пределах:

$0 \leq \lambda_k(X) \leq 1, k = \overline{1, K}$.

Шаг 4. Построение λ-задачи. Создание λ-задачи осуществляется в два этапа: первоначально строится максиминная задача оптимизации с эквивалентными критериями, которые на втором этапе преобразуются в стандартную задачу математического программирования, названной λ-задачей. Для построения максиминная задача используем определение 2: $\forall X \in \boldsymbol{S}\ \ \lambda = \boldsymbol{min}_{\boldsymbol{k \in K}} \lambda_k(X)$.

Нижний уровень λ максимизируем по $X \in S$. В результате сформулируем максиминную задачу оптимизации с нормализованными критериями:

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{\boldsymbol{X \in S}} \boldsymbol{min}_{\boldsymbol{k \in K}} \lambda_k(X). \tag{3.13}$$

На втором этапе задача (3.13) преобразуется в стандартную задачу математического программирования, названную λ-задача:

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{\boldsymbol{X \in S}}\, \lambda, \qquad \lambda^o = \boldsymbol{max}_{\boldsymbol{X \in S}}\, \lambda, \tag{3.14}$$

$$\lambda - \lambda_k(X) \le 0, k = \overline{1,K}, \quad \rightarrow \quad \lambda - \frac{f_k(X)-f_k^0}{f_k^*-f_k^0} \le 0, k = \overline{1,K}, \tag{3.15}$$

$$G(X) \le B, X \ge 0, \qquad G(X) \le B, X \ge 0, \tag{3.16}$$

где вектор неизвестных $\boldsymbol{X}$ имеет размерность $N+1$: $X = \{\lambda, x_1, \dots, x_N\}$.

Шаг 5. Решение λ-задачи. λ-задача (3.14)-(3.16) – стандартная задача выпуклого программирования и для ее решения используются стандартные методы, в результате решения λ-задачи получим:

$\boldsymbol{X^o} = \{\lambda^o, X^o\}$ - точку оптимума; (3.17)

$f_k(X^o), k = \overline{1,K}$- величины критериев в этой точке; (3.18)

$\lambda_k(X^o) = \frac{f_k(X^o)-f_k^0}{f_k^*-f_k^0}, k = \overline{1,K}$- величины относительных оценок; (3.19)

λ^o - максимальная относительная оценка, которая является максимальным нижним уровнем для всех относительных оценок $\lambda_k(X^o)$, гарантированным результатом в относительных единицах. λ^o гарантирует, что в точке X^o относительные оценки $\lambda_k(X^o)$ больше или равны λ^o:

$$\lambda_k(X^o) \ge \lambda^o, k = \overline{1,K} \text{ or } \boldsymbol{\lambda^o} \le \lambda_k(X^o), k = \overline{1,K}, X^o \in \boldsymbol{S}, \tag{3.20}$$

и в соответствии с теоремой 1 точка оптимума $X^o = \{\boldsymbol{\lambda^o}, x_1, \dots, x_N\}$ является оптимальной по Парето.

4. Прикладная математика: Векторные задачи линейного и нелинейного программирования с равнозначными критериями

4.1. *Векторные задачи линейного программирования с равнозначными критериями*

4.1.1. Векторной задачи линейного программирования

Представим векторную задачу линейного программирования с неоднородными критериями.

$$opt\, F(X(t)) = \{max\, F_1(X(t)) = \{max\, f_k(X(t)) = \textstyle\sum_{j=1}^{N} c_j^k x_j(t), k = \overline{1,K_1}, \tag{4.1}$$

$$min\, F_2(X(t)) = \{min\, f_k(X(t)) = \textstyle\sum_{j=1}^{N} c_j^k x_j(t), k = \overline{1,K_2}\}\}, \tag{4.2}$$

$$\textstyle\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t) x_j(t) \le b_i(t), i = \overline{1,M}, \tag{4.3}$$

$$\textstyle\sum_{j=1}^{N} c_j^k x_j(t) \ge b_k(t), k \in K, \tag{4.4}$$

$$0 \le x_j(t) \le x_j(t), j = \overline{1,N}, \tag{4.5}$$

где $X = \{x_j(t), j = \overline{1,N}\}$ - вектор переменных, т.е. это вектор из N-мерного евклидова пространства R^N, (обозначение $j = \overline{1,N}$ эквивалентно $j = (1, \dots, N)$);

$F(X)$- вектор-функция (векторный критерий), имеющая K – компонент-функций, (K - мощность множества K). Множество K состоит из подмножества K_1 компонент максимизации и подмножества K_2 минимизации: $K = K_1 \cup K_2$, для оценки совокупности критериев вводится обозначение операция «*opt*», которое включает в себя max и min;

$F_1(X(t)) = \{max\, f_k(X(t)), k = \overline{1,K_1}$ – это векторный критерий, каждая компонента которого максимизирует, K_1 – число критериев, а $K_1 \equiv \overline{1,K_1}$ - множество критериев максимизации (задача (4.1), (4.3)-(4.5) представляют собой ВЗЛП с однородными критериями максимизации);

$F_2(X(t)) = \{min\, f_k(X(t)), k = \overline{1, K_2}$ - векторный критерий, каждая компонента которого минимизируется, $K_2 \equiv \overline{K_1 + 1, K} \equiv \overline{1, K_2}$ - множество критериев минимизации, K_2 – число, (задача (4.2)-(4.5) это ВЗЛП с однородными критериями минимизации).

$K_1 \cup K_2 = K,\ K_1 \subset K,\ K_2 \subset K.$

(4.3)-(4.5) - стандартные ограничения.

$S = \{X \in R^n | G(X) \leq 0, X^{min} \leq X \leq X^{max}\} \neq \emptyset$

это допустимое множество точек, задающиеся стандартными ограничениями (4.3)-(4.5) и тривиальными ограничениями $0 \leq x_j(t) \leq u_j(t), j = \overline{1, N}$. Предполагаем, что допустимое множество точек не пусто и представляет собой компакт.

4.1.2. Практика решения векторной задачи линейного программирования

Рассмотрим решение векторной задачи линейного программирования (ВЗЛП): неоднородная ВЗЛП.

Пример 4.1.

Дано. Векторная задача линейного программирования с двумя критериями максимизации и одним критерием минимизации:

$$Opt\, F(X) = \{max\, F_1(X) = \{max\, f_1(X) \equiv 43.2x_1 + 36x_2, \quad (4.6)$$

$$max\, f_2(X) \equiv 7.2x_1 + 14.4x_2\}, \quad (4.7)$$

$$min\, F_2(X) = \{min\, f_3(X) \equiv 7.2x_1 + 8.64x_2\}\}, \quad (4.8)$$

$$7.2x_1 + 8.64x_2 \leq 5184, \quad (4.9)$$

$$2.64x_1 + 2.4x_2 \geq 528, \quad (4.10)$$

$$x_1 \leq 56, x_2 \leq 40, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad (4.11)$$

Требуется. Найти неотрицательное решение x_1, x_2 в системе неравенств (4.9)-(4.11) такое, при котором функции $f_1(X), f_2(X)$ принимают, возможно, максимальное значение $f_3(X)$ минимальное значение.

Решение. Мы представим геометрическую интерпретацию допустимого множества решений ***S***, определяемых ограничениями (4.9)-(4.11), на рис. 1.

Решение векторной задачи линейного программирования (4.6)-(4.11) в соответствии с алгоритмом решения ВЗЛП на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата представим в системе Matlab. Для решения задачи линейного программирования на каждом шаге используется функция linprog(…), [24].

Алгоритм представим в системе *Matlab* как последовательность шагов.

Шаг 0. Формируются *исходные данные*:

```
cvec = [-43.2 -36;
       -7.2 -14.4;
        7.2   8.64]; % Векторная целевая функция в виде матрицы.        (4.12)
a = [7.2 8.64;
     -2.64 -2.4];          % Матрица линейных ограничений
b=[5184. -528.];           % Вектор, содержащий ограничения (bi)
Aeq=[]; Beq=[];            % Ограничения равенства
Lb=[0. 0.];                % Lower bound of variables
Ub=[600. 540.];            %Upper bound of variables                   (4.13)
```

Шаг 1. Решается ВЗЛП (4.6)-(4.11) по каждому критерию.

1. Решение по первому критерию представляет обращение к функции linprog(…):

[X1, f1]=linprog(cvec(1,:),a,b,Aeq,Beq,Lb,Ub),

где (…) – исходные данные (4.12), (4.13), представленные на нулевом шаге;

[X1, f1] – выходные данные: X1 - вектор неизвестных переменных; f1 – величина целевой функции.

В результате решения получим:

$X1 = X_1^* = \{x_1 = 600, x_2 = 100\}$ - оптимальные значения переменных;

$f1 = f_1^* = -29520$ - оптимальное значение целевой функции

2. Решение по второму критерию:

[X2,f2]=linprog(cvec(2,:),a,b,Aeq,Lb,Ub)

В результате решения по второму критерию получили:

$\mathrm{X2} = X_2^* = \{x_1 = 72, x_2 = 540\};\ \mathrm{f2} = f_2^* = -8294.4$

3. Решение по третьему критерию:

[X3,f3]=linprog(cvec(2,:),a,b,Aeq,Lb,Ub)

В результате решения по третьему критерию получили:

$\mathrm{X3} = X_3^* = \{x_1 = 200, x_2 = 0\};\ \mathrm{f3} = f_3^* = 1440$

Полученные точки оптимума показаны на рис. 1.

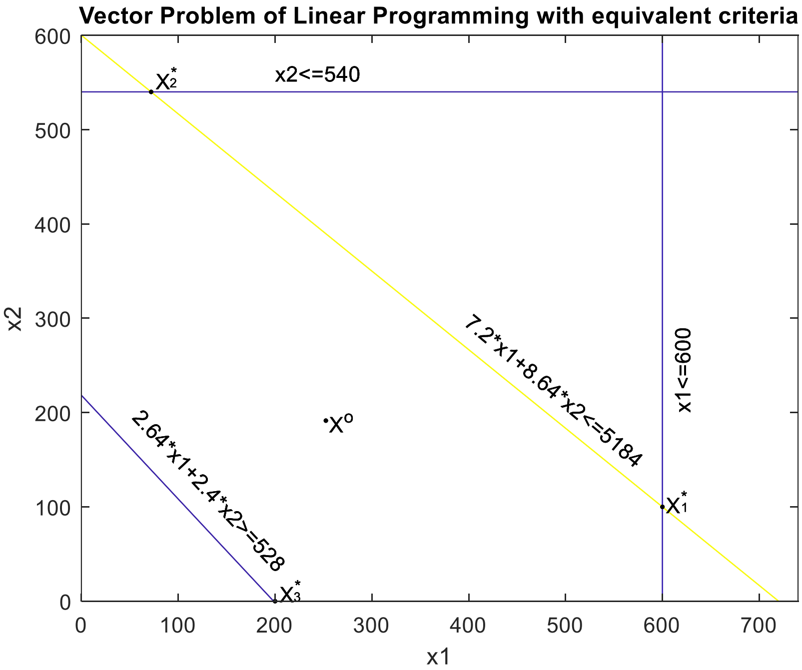

Рис. 1. Допустимое множество решений ВЗЛП (4.6)-(4.11)

Шаг 2. Решается ВЗЛП (4.6)-(4.11) по каждому критерию.

1. Решение по первому критерию представляет обращение к функции linprog(…):

[X1min, f1min]=linprog(-1*cvec(1,:),a,b,Aeq,Beq,Lb,Ub),

где (…) – исходные данные, представленные на нулевом шаге;

[X1min, f1min] – выходные данные: X1min - вектор неизвестных переменных; f1min – величина целевой функции.

В результате решения получим:

$X1min = X_1^0 = \{x_1 = 0, x_2 = 220\}$ - оптимальные значения переменных;

$f1min = f_1^0 = 7920$ - оптимальное значение целевой функции

2. Решение по второму критерию:

[X2min,f2min]=linprog(-1*cvec(2,:),a,b,Aeq,Lb,Ub)

В результате решения по второму критерию получили:

$\mathrm{X2min} = X_2^0 = \{x_1 = 200, x_2 = 0\};\ \mathrm{f2min} = f_2^0 = 1440$

3. Решение по третьему критерию:

[X3max,f3max]=linprog(-1*cvec(3,:),a,b,Aeq,Lb,Ub)

В результате решения по третьему критерию получили:

$\mathrm{X3max} = X_3^0 = \{x_1 = 600, x_2 = 100\};\ \mathrm{f3} = f_3^0 = -5184.$

Шаг 3. Выполняется системный анализ критериев в ВЗЛП. Для этого в оптимальных точках: X_1^*, X_2^* и X_3^* определяются величины целевых функций $F(X^*)$ и относительных оценок:

$$\lambda(X^*),\ \lambda_k(X) = \frac{f_k(X)-f_k^0}{f_k^*-f_k^0}, \forall k \in \boldsymbol{K}:$$

$$F(X^*) = \{f_k(X_k^*), q = \overline{1,K}, k = \overline{1,K},\ K = 3\} = \begin{vmatrix} -29520 & -5760 & 5184 \\ -22550 & -8294 & 5184 \\ -8640 & -1440 & 1440 \end{vmatrix}, \quad (4.14)$$

$$\lambda(X^*) = \{\lambda_q(X_k^*), q = \overline{1,K}, k = \overline{1,K},\ K = 3\} = \begin{vmatrix} 1.0000 & 0.6303 & 0 \\ 0.6773 & 1.0000 & 0 \\ 0.0333 & 0 & 1.0000 \end{vmatrix}. \quad (4.15)$$

Шаг 4. Строится λ-задача:

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{X \in S}\, \lambda, \quad (4.16)$$

при ограничениях: $\lambda - \frac{f_1(X)-f_1^0}{f_1^*-f_1^0} \leq 0,\ \lambda - \frac{f_2(X)-f_2^0}{f_2^*-f_2^0} \leq 0,\ \lambda - \frac{f_3(X)-f_3^0}{f_3^*-f_3^0} \leq 0,$ (4.17)

$$7.2x_1 + 8.64x_2 \leq 5184, \quad (4.18)$$

$$2.64x_1 + 2.4x_2 \geq 528, \quad (4.19)$$

$$x_1 \leq 56, x_2 \leq 40, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad (4.20)$$

Шаг 5. Решение λ-задачи. Для решения λ-задачи (4.16)-(4.20) в системе MATLAB аналогично шагу 0 задаются исходные параметры.

Обращение к функции linprog() для решения λ-задачи представлено в виде:

[Xo, Lo]=linprog(Lo,Ao,bo,Aeq,Beq,Lbo,Ubo).

Результаты решения λ-задачи:

$\boldsymbol{X^o} = \{\, x_1 = 0.4573, x_2 = 252.4, x_3 = 191.4\}$**.**

где $\boldsymbol{X^o}$ определяет оптимальные значения переменных; координата x_1 соответствует λ^o– максимальному относительному уровню: x_1=λ^o; а x_2, x_3 соответствует x_1, x_2задачи (4.6)-(4.11).

$\mathrm{Lo} = \lambda^o = 0.4573$ представляет оптимальное значение целевой функции.

λ^o является максимальным уровнем среди всех минимальных относительных уровней на допустимом множестве $X \in S$:

$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{X \in S} \boldsymbol{min}_{k \in K} \lambda_k(X).$

Функции $\lambda_1(X), \lambda_2(X)\ and\ \lambda_3(X)$ а также точки оптимума X^o и λ^o, которые получены на их пересечении, показаны на рис. 2.

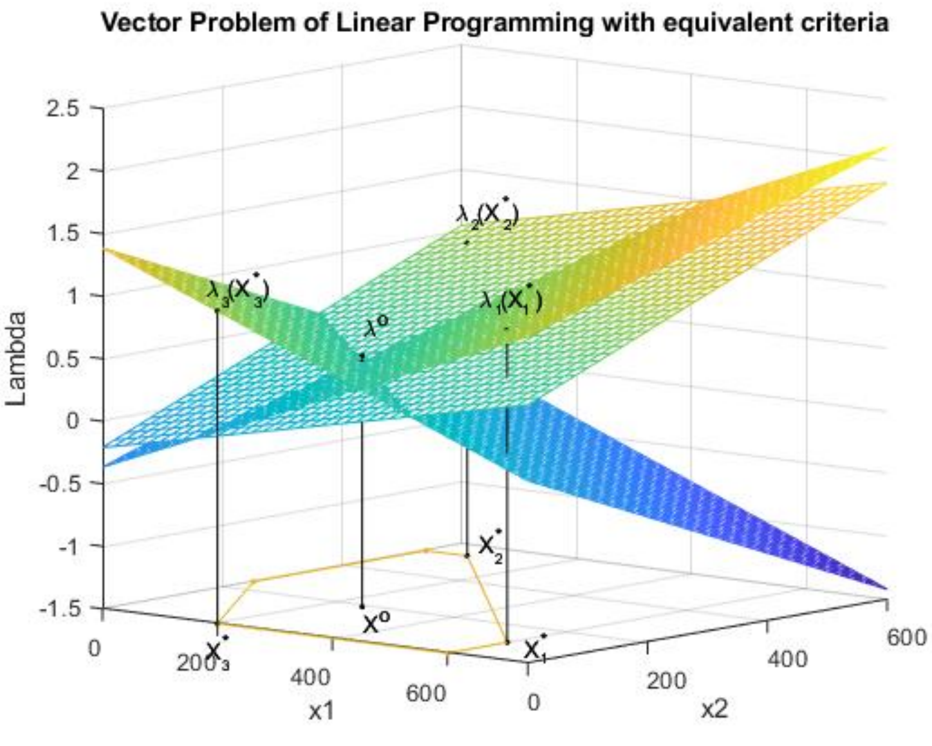

Рис. 2. Результаты решения ВЗЛП: функции: $\lambda_1(X), \lambda_2(X)$ and $\lambda_3(X)$ точки оптимума X^o $и$ λ^o

Заметим, что стандартной (однокритериальной) математики построение таких фигур невозможно.

Выполним проверку: $f_1(X^o) = -17798, \lambda_1(X^o) = 0.4573$;

$f_2(X^o) = -4575, \lambda_2(X^o) = 0.4573$; $f_3(X^o) = 3472, \lambda_3(X^o) = 0.4573$;

т. е. $\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), k = 1, 2, 3$.

Эти результаты показывают, что в точке оптимума X^o три критерия $\lambda_1(X^o), \lambda_2(X^o), \lambda_3(X^o)$, измеренные в относительных единицах, достигли уровня:

$\lambda^o = 0.4573$ от своих оптимальных величин f_1^*, f_2^*, f_3^*. Любое увеличение одного из критериев выше этого уровня приводит к уменьшению другого критерия, т.е. точка X^o оптимальна по Парето.

4.2. ***Векторные задачи нелинейного программирования с равнозначными критериями***

4.2.1. Векторная задача нелинейного программирования

Векторная задача нелинейного программирования (ВЗНП) – это стандартная задача математического программирования, имеющая некоторое множество критериев, которые в совокупности представляют вектор критериев. ВЗНП подразделяются на однородные и неоднородные ВЗЛП. В соответствии с этими определениями представим векторную задачу нелинейного программирования с неоднородными критериями.

$Opt\ F(X) = \{\max F_1(X) = \{\max f_k(X) = c_{0k} + c_{1k}x_1 + \cdots + c_{N+1,k}x_1x_2 + \cdots + c_{n1,k}x_1^2 + \cdots + c_{nnk}x_n^2, k = \overline{1, K_1}$, (4.21)

$min\ F_2(X) = \{min\ f_k(X) = c_{0k} + c_{1k}x_1 + \cdots + c_{N+1,k}x_1x_2 + \cdots + c_{n1,k}x_1^2 + \cdots + c_{nnk}x_n^2, k = \overline{1, K_2}\}\}$, (4.22)

$a_{0k} + a_{1i}x_1 + \cdots + a_{N+1,i}x_1x_2 + \cdots + a_{n1,i}x_1^2 + \cdots + a_{nni}x_n^2 \leq b_i, i = \overline{1, M}$, (4.23)

$0 \leq x_j(t) \leq u_j\ , j = \overline{1, N}$, (4.24) где $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ - вектор переменных, т.е. это вектор из N-мерного евклидова пространства R^N, (обозначение $j = \overline{1, N}$ эквивалентно $j = (1, \dots, N)$;

$F(X)$ - вектор-функция (векторный критерий), имеющая K – компонент-функций. Функция представляет квадратичный полином.

Множество критериев (полиномов) K состоит из подмножества K_1 компонент максимизации и подмножества K_2 минимизации: $K = K_1 \cup K_2$, для оценки совокупности критериев вводится обозначение операция «*opt*», которое включает в себя max и min;

$F_1(X) = \{max\, f_k(X), k = \overline{1, K_1}$ – это векторный критерий (4.21), каждая компонента которого максимизирует, K_1 – число критериев, а $K_1 \equiv \overline{1, K_1}$ - множество критериев максимизации (задача (4.21), (4.23)-(4.24) представляют собой ВЗЛП с однородными критериями максимизации);

$F_2(X) = \{min\, f_k(X), k = \overline{1, K_2}$ - векторный критерий, каждая компонента которого минимизируется, $K_2 \equiv \overline{K_1 + 1, K} \equiv \overline{1, K_2}$ - множество критериев минимизации, K_2 – число критериев, (задача (4.22), (4.23)-(4.24) это ВЗНП с однородными критериями минимизации). $K_1 \cup K_2 = K,\ K_1 \subset K,\ K_2 \subset K.$

(4.23)-(4.24) - стандартные нелинейные ограничения (в виде полиномов, в том числе линейных).

$S = \{X \in R^n | G(X) \le 0, X^{min} \le X \le X^{max}\} \ne \emptyset$ -

это допустимое множество точек (или более кратко - допустимое множество), задающиеся стандартными ограничениями (4.23)-(4.24) и тривиальными ограничениями $0 \le x_j(t) \le u_j, j = \overline{1, N}$. Предполагаем, что допустимое множество точек не пусто и представляет собой компакт.

4.2.2. Practice of the solution of a vector problem of the nonlinear programming

***Пример* 4.2.**

Дано. Рассматривается *векторная задача нелинейного (выпуклого) программирования* с четырьмя однородными критериями. В качестве критериев используем окружность, а на переменные наложены линейные ограничения, поэтому задача решается устно.

$$opt\, F(X) = \{min\, F_2(X) = min\, f_1(X) \equiv (x_1 - 80)^2 + (x_2 - 80)^2, \quad (4.25)$$

$$min\, f_2(X) \equiv (x_1 - 80)^2 + (x_2 - 20)^2, \quad (4.26)$$

$$min\, f_3(X) \equiv (x_1 - 20)^2 + (x_2 - 20)^2, \quad (4.27)$$

$$min\, f_4(X) \equiv (x_1 - 20)^2 + (x_2 - 80)^2, \quad (4.28)$$

при ограничениях $0 \le x_1 \le 100,\ 0 \le x_2 \le 100,$ (4.29)

Требуется. Найти неотрицательное решение x_1, x_2 в системе неравенств (4.29) такое, при котором функции $f_1(X), f_2(X)\ f_3(X), f_4(X)$ принимают, возможно минимальное значение.

Решение векторной задачи нелинейного программирования.

Для решения задачи (4.25)-(4.29) по каждому критерию, а в дальнейшем и λ-задачи, используется система MATLAB (функция fmincon(…) - решение нелинейной задачи оптимизации) [23].. Решение представлено, как последовательность шагов.

Шаг 1. Решается векторная задача (4.25)-(4.29) на max по каждому критерию отдельно. Результаты решения ВЗМП (4.25)-(4.29) по каждому критерию:

1 критерий $X_1^* = \{x_1 = 0, x_2 = 0\}, f_1^* = f_1(X_1^*) = -12800;$ (4.30)

2 критерий $X_2^* = \{x_1 = 0, x_2 = 100\}, f_2^* = f_2(X_2^*) = -12800;$

3 критерий $X_3^* = \{x_1 = 100, x_2 = 100\}, f_3^* = f_3(X_3^*) = -12800;$

4 критерий $X_4^* = \{x_1 = 100, x_2 = 0\}, f_4^* = f_4(X_4^*) = -12800;$

Шаг 2. Решается векторная задача (4.25)-(4.29) на min по каждому критерию отдельно. Результаты решения ВЗМП (4.25)-(4.29) по каждому критерию:

1 критерий $X_1^0 = \{x_1 = 80, x_2 = 80\}, f_1^0 = f_1(X_1^0) = 0$: (4.31)
2 критерий $X_2^0 = \{x_1 = 80, x_2 = 20\}, f_2^0 = f_2(X_2^0) = 0$:
3 критерий $X_3^0 = \{x_1 = 20, x_2 = 20\}, f_3^0 = f_3(X_3^0) = 0$:
4 критерий $X_4^0 = \{x_1 = 20, x_2 = 80\}, f_4^0 = f_4(X_4^0) = 0$:

Представим геометрическую интерпретацию ограничений ВЗНП (4.25)-(4.29) и результатов решения на рис. 3.

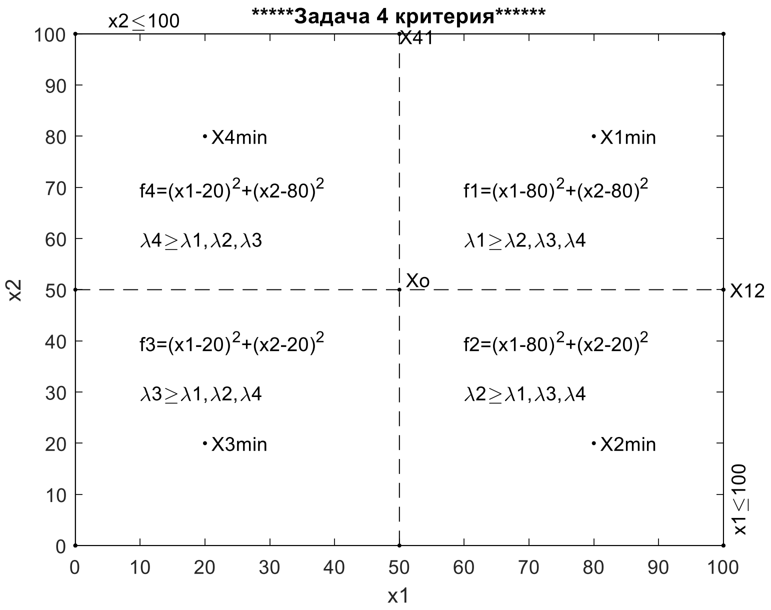

Рис. 3. Ограничения ВЗМП (4.25)-(4.29),
точки оптимума $X_1^0 = X1min, X_2^0 = X2min, X_3^0 = X3min, X_4^0 = 4min$
и относительные оценки

Шаг 3. Выполняется системный анализ множества точек Парето.

В точках оптимума $X^* = \{X_k^*, k = \overline{1,K}\}$, определяются величины целевых функций $F(X^*)$ и относительных оценок $\lambda(X^*)$:

$$F(X^*) = \{\{f_q(X_k^*), q = \overline{1,K}\}, k = \overline{1,K}\},\ \lambda(X^*) = \{\{\lambda_q(X_k^*), q = \overline{1,K}\}, k = \overline{1,K}\},$$

В системе MATLAB в точках оптимума: X1min, X2min, X3min, X4min вычисление этих функций будет следующим (Результат системного анализа):

$$F(X^*) = \begin{vmatrix} f_1(X_1^*)\ f_2(X_1^*)\ f_3(X_1^*)\ f_4(X_1^*) \\ f_1(X_2^*)\ f_2(X_2^*)\ f_3(X_2^*)\ f_4(X_2^*) \\ f_1(X_3^*)\ f_2(X_3^*)\ f_3(X_3^*)\ f_4(X_3^*) \\ f_1(X_4^*)\ f_2(X_4^*)\ f_3(X_4^*)\ f_4(X_4^*) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0\ 3600\ 7200\ 3600 \\ 3600\ 0\ 3600\ 7200 \\ 7200\ 3600\ 0\ 3600 \\ 3600\ 7200\ 3600\ 0 \end{vmatrix}, \quad (4.32)$$

$$\lambda(X^*) = \begin{vmatrix} \lambda_1(X_1^*)\ \lambda_2(X_1^*)\ \lambda_3(X_1^*)\ \lambda_4(X_1^*) \\ \lambda_1(X_2^*)\ \lambda_2(X_2^*)\ \lambda_3(X_2^*)\ \lambda_4(X_2^*) \\ \lambda_1(X_3^*)\ \lambda_2(X_3^*)\ \lambda_3(X_3^*)\ \lambda_4(X_4^*) \\ \lambda_1(X_4^*)\ \lambda_2(X_4^*)\ \lambda_3(X_4^*)\ \lambda_4(X_4^*) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.0\ 0.7188\ 0.4375\ 0.7188 \\ 0.7188\ 1.0\ 0.7188\ 0.4375 \\ 0.4375\ 0.7188\ 1.0\ 0.7188 \\ 0.7188\ 0.4375\ 0.7188\ 1.0 \end{vmatrix} \quad (4.33)$$

В точках оптимума $X_k^*, k = \overline{1,K}$ все относительные оценки (нормализованные критерии) равны единице: $\lambda_k(X_k^*) = \frac{f_k(X_k^*) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0} = 1, k = \overline{1,K}, K = 4$.

В точках оптимума $X_k^0, k = \overline{1,K}$ все относительные оценки равны нулю:

$\lambda_k(X_k^0) = \frac{f_k(X_k^0)-f_k^0}{f_k^*-f_k^0} = 0, k = \overline{1,K}, K = 4.$

Отсюда $\forall k \in \boldsymbol{K}, \forall X \in \boldsymbol{S}, 0 \le \lambda_k(X) \le 1.$

Шаг 4. Строится λ-задача.

Шаг 5. Решение λ-задачи. Результаты решения λ-задачи:

$\boldsymbol{X^o} = \{ x_1 = 50.0, x_2 = 50.0, x_3 = 0.8594\}$**.**

Xo= {x_1=50.0, x_2= 50.0, x_3 =0.8594} – точка оптимума, где

x_3=λ^o; а x_1, x_2 соответствует x_1, x_2 задачи (4.25)-(4.29);

Lo = λ^o= 0.8594 представляет оптимальное значение целевой функции.

Функции $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3(X), \lambda_4(X)$, а также точки оптимума X^o и λ^o, которые получены на их пересечении, в трех мерной системе координат x_1, x_2, λ показаны на рис. 4.4.

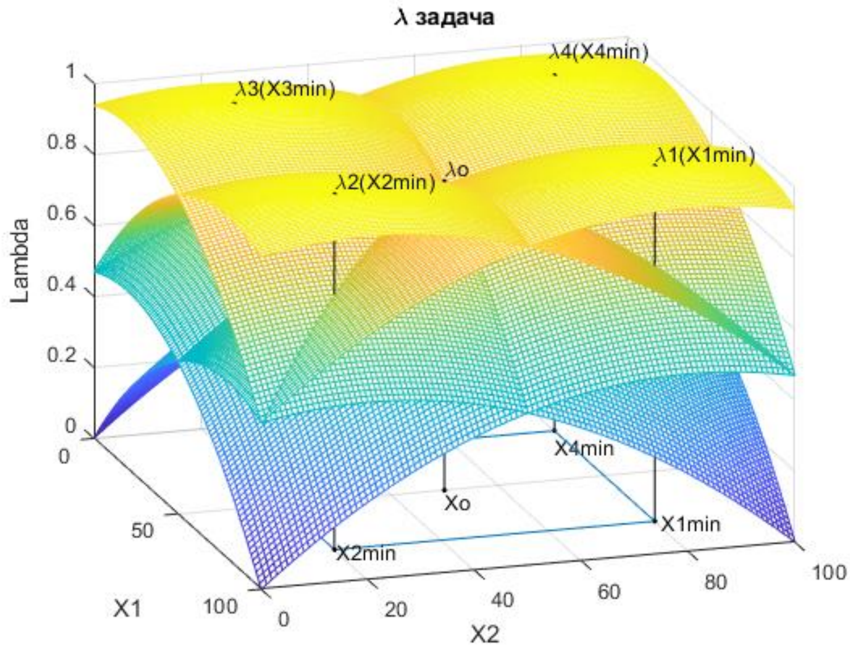

Рис. 4. Результаты решения ВЗМП (4.25)-(4.29):
Функции $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3(X), \lambda_4(X)$, точки оптимума X^o и λ^o.

На рис. 3, 4 видно, что область (множество точек), ограниченная функцией $f1 = (x_1 - 80)^2 + (x_2 - 80)^2$ - характеризуется тем, что $\lambda_1(X) \ge \lambda_k(X), k = \overline{2,4}$, $X \in \boldsymbol{S_1}$, (на рис. 4.3 показано, как λ1>λ2, λ3, λ4), т. е. область $\boldsymbol{S_{q=1}}$ приоритетна по первому критерию. В этой области приоритет первого критерия относительно остальных всегда больше или равен единице:

$p_k^1(X) = \lambda_1(X)/\lambda_k(X) \ge 1, \forall X \in \boldsymbol{S_1}.$

Аналогично показаны области (множества точек) приоритетные по соответствующему критерию, в совокупности они дают множество точек, оптимальных по Парето, $\boldsymbol{S^o}$, а оно (для данного примера) равно множеству допустимых точек:

$\boldsymbol{S^o} = \boldsymbol{S_1^o} \cup \boldsymbol{S_2^o} \cup \boldsymbol{S_3^o} \cup \boldsymbol{S_4^o} \cup X^o = \boldsymbol{S}.$

Если решать задачу (4.25)-(4.29) с двумя критериями, например, третьим и четвертым, то множество точек, оптимальных по Парето, лежит на отрезке $X_3^* X_4^*$, а точка X^{oo} определяет результат решения.

λ^{oo} - максимальный уровень, причем $\lambda^{oo} = \lambda_3(X^{oo}) = \lambda_4(X^{oo}) = 0.7917$ в соответствии с теоремой 1. Множество Парето лежит между точками оптимума $X_1^* X_2^* X_3^* X_4^*$, т.

е. область допустимых точек S, образованных ограничениями (4.29), совпадает с множеством точек, оптимальных по Парето $\boldsymbol{S^o}$, $\boldsymbol{S^o} = \boldsymbol{S}$.

Таким образом, векторная оптимизация является математическим аппаратом исследования аксиом в различных системах.

5. Аксиоматика и принцип оптимальности векторной оптимизации с заданным приоритетом критерия

Для построения методов решения проблемы векторной оптимизации с приоритетом критерия мы введем следующие определения: О приоритете одного критерия над другим; О числовом выражении приоритета критерия над другим; О заданном числовом выражении приоритета одного критерия над другим; О нижнем уровне среди всех относительных оценок с приоритетом критерия; О подмножестве точек, приоритетных по критерию; Принцип оптимальности 2 - Решение векторной задачи с заданным приоритетом критерия. Для более детального смотри [20, 22].

5.1. Первоначальные определения для построения аксиоматики векторной оптимизации с приоритетом критерия

Определение 4. (*О приоритете одного критерия над другим*)**.**

Критерий $q \in \boldsymbol{K}$ *в* векторной задаче *в точке* $X \in \boldsymbol{S}$ *имеет приоритет* над другими критериями $k = \overline{1, K}$, если относительная оценка $\lambda_q(X)$ по этому критерию больше или равна относительных оценок $\lambda_k(X)$ других критериев, т. е.:

$$\lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), k = \overline{1, K}, \quad (5.1)$$

и строгий приоритет, если хотя бы для одного критерия $t \in \boldsymbol{K}$: $\lambda_q(X) > \lambda_k(X), t \neq q$, а для остальных критериев $\lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), k = \overline{1, K}, k \neq t \neq q$.

Введением определения приоритета критерия $q \in \boldsymbol{K}$ в ВЗМП (2.1)-(2.4) выполнено переопределение раннего понятия приоритета. Если раньше в него вкладывалось интуитивное понятие о важности этого критерия, то сейчас эта “важность” определяется математически: чем больше относительная оценка q-го критерия над другими, тем он важнее (приоритетнее), и наиболее высокий приоритет в точке оптимума $X_k^*, \forall q \in \boldsymbol{K}$.

Из определения 4 приоритета критерия $q \in \boldsymbol{K}$ в векторной задачи оптимизации (2.1)-(2.4) вытекает, что можно построить множество точек $\boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}$, характеризующееся тем,

$$\lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), \forall k \neq q, \forall X \in \boldsymbol{S}_q.$$

Однако, ответ на вопрос о том, насколько критерий $q \in \boldsymbol{K}$ в точке X множества $\boldsymbol{S}_q$ приоритетнее остальных критериев, остается открытым. Для решения этого вопроса, мы введем коэффициент связи между парой относительных оценок of relative estimates of $\lambda_q(X)$ and $\lambda_k(X)$, которые в совокупности представляют вектор:

$$P^q(X) = \{p_k^q(X) \mid k = \overline{1, K}\}, q \in \boldsymbol{K}\ \forall X \in \boldsymbol{S}_q.$$

Определение 5. (*О числовом выражении приоритета критерия над другим*).

В векторной задаче с приоритетом критерия q-го над другими критериями $k = \overline{1, K}$, для $\forall X \in \boldsymbol{S}_q$, вектор $P^q(X)$ показывает во сколько раз относительная оценка $\lambda_q(X), q \in \boldsymbol{K}$, больше остальных относительных оценок $\lambda_k(X), k = \overline{1, K}$:

$$P^q(X) = \{p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}, k = \overline{1, K}\}, p_k^q(X) \geq 1, \forall X \in \boldsymbol{S}_q \subset S, k = \overline{1, K}, \forall q \in \boldsymbol{K}. \quad (5.2)$$

Такое отношение $p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}$ назовем *числовым выражением приоритета q-го критерия над остальными критериями* $k = \overline{1, K}$.

Определение 6. (*О заданном числовом выражении приоритета одного критерия над другим*). В векторной задаче (2.1)-(2.4) с приоритетом критерия $q \in \boldsymbol{K}$ для $\forall X \in \boldsymbol{S}$ вектор

$P^q = \{p_k^q, k = \overline{1,K}\}$, считается заданным лицом, принимающим решения, (ЛПР), если задана каждая компонента этого вектора. Заданная ЛПР компонента p_k^q, с точки зрения ЛПР, показывает во сколько раз относительная оценка $\lambda_q(X), q \in \boldsymbol{K}$ больше остальных относительных оценок $\lambda_k(X), k = \overline{1,K}$. Вектор $p_k^q, k = \overline{1,K}$ является заданным числовым выражением приоритета q-го критерия над остальными критериями $\overline{k = 1, K}$:

$$P^q(X) = \{p_k^q(X), k = \overline{1,K}\}, p_k^q(X) \geq 1, \forall X \in \boldsymbol{S}_q \subset S, k = \overline{1,K}, \forall q \in \boldsymbol{K}. \quad (5.3)$$

Векторная задача (2.1)–(2.4), в которой задан приоритет какого-либо из критериев, называют векторной задачей с заданным приоритетом критерия. Проблема задачи вектора приоритетов возникает тогда, когда необходимо определить точку $X^o \in \boldsymbol{S}$ по заданному вектору приоритетов.

При операции сравнения относительных оценок с приоритетом критерия $q \in \boldsymbol{K}$, аналогично, как и в задаче с эквивалентными критериями, введем дополнительную числовую характеристику λ, которую назовем *уровнем*.

Определение 7. (*О нижнем уровне среди всех относительных оценок с приоритетом критерия*).

Уровень λ является нижним среди всех относительных оценок с приоритетом критерия $q \in \boldsymbol{K}$, таким, что

$$\lambda \leq p_k^q \lambda_k(X), \ k = \overline{1,K}, \ q \in \boldsymbol{K}, \ \forall X \in \boldsymbol{S}_q \subset S; \quad (5.4)$$

нижний уровень для выполнения условия (5.4) определяется

$$\lambda = min_{k \in K} p_k^q \lambda_k(X), q \in \boldsymbol{K}, \forall X \in \boldsymbol{S}_q \subset S. \quad (5.5)$$

Соотношения (5.4) и (5.5) являются взаимосвязанными и служат в дальнейшем переходом от операции определения min к ограничениям и наоборот. В разделе 4 мы дали определение точки $X^o \in \boldsymbol{S}$, оптимальной по Парето, с эквивалентными критериями. Рассматривая данное определение как исходное, мы построим ряд аксиом деления допустимого множества точек $\boldsymbol{S}$, во-первых, как подмножество точек, оптимальных по Парето S^o, и, во-вторых, на подмножество точек $\boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}, q \in \boldsymbol{K}$, приоритетным по q-му критерию.

5.2. The axioms for vector optimization with a Criterion Priority

Аксиома 2. *(О подмножестве точек, приоритетных по критерию)***.**

В векторной задаче (2.1)-(2.4) подмножество точек $\boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}$ называется областью приоритета критерия $q \in \boldsymbol{K}$ над другими критериями, если

$\forall X \in \boldsymbol{S}_q \ \forall k \in \boldsymbol{K} \ \lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), q \neq k.$

Это определение распространяется и на множество точек $\boldsymbol{S}^o$, оптимальных по Парето, что дается следующим определением.

Аксиома 2а. (*О подмножестве точек, приоритетных по критерию, на множестве точек оптимальных по Парето*).

В векторной задаче (2.1)-(2.4) подмножество точек $\boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}^o \subset S$ называется областью приоритета критерия $q \in \boldsymbol{K}$ над другими критериями, если $\forall X \in S_q^o \ \forall k \in K \ \lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), q \neq k.$

Дадим некоторые пояснения.

Аксиома 2 и 2а позволила представить в векторной проблеме (2.1)–(2.4) допустимое множество точек $\boldsymbol{S}$, включая подмножество точек, оптимальных по Парето, $\boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S}$, в подмножества:

одно подмножество точек $\boldsymbol{S}' \subset \boldsymbol{S}$, где критерии эквивалентны, и подмножество точек $\boldsymbol{S}'$, пересекаясь с подмножеством точек $\boldsymbol{S}^o$, выделяет подмножество точек, оптимальных по Парето, в подмножество с эквивалентными критериями $\boldsymbol{S}^{oo} = \boldsymbol{S}' \cap \boldsymbol{S}^o$, которое, как это показано далее, состоит из одной точки $X^o \in \boldsymbol{S}$, т.е. $X^o = \boldsymbol{S}^{oo} = \boldsymbol{S}' \cap \boldsymbol{S}^o, \boldsymbol{S}' \in \boldsymbol{S}, \boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S}$;

«$\boldsymbol{K}$» подмножеств точек, где у каждого критерия $q = \overline{1,K}$ имеется приоритет над другими критериями $k = \overline{1,K}, q \neq k$. Таким образом, выполнено разделение, во-первых, множества всех допустимых точек $\boldsymbol{S}$, на подмножества $\boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}, q = \overline{1,K}$, и, во-вторых, разделение подмножества точек, оптимальных по Парето, $\boldsymbol{S^o}$, на подмножества $\boldsymbol{S^o_q} \subset \boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}, q = \overline{1,K}$.

Отсюда верны следующие соотношения:

$$\boldsymbol{S}' \cup \left(\cup_{q \in K} \boldsymbol{S}^o_q\right) \equiv \boldsymbol{S}^\circ, \boldsymbol{S^o_q} \subset \boldsymbol{S}^\circ \subset \boldsymbol{S}, q = \overline{1,K}.$$

Мы заметим, что подмножество точек $\boldsymbol{S^o_q}$, с одной стороны, включено в область (подмножество точек), имеющих приоритет критерия $q \in \boldsymbol{K}$ над другими критериями: $\boldsymbol{S}^o_q \subset \boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}$,

и с другой стороны, на подмножество точек, оптимальны поз Парето: $\boldsymbol{S^o_q} \subset \boldsymbol{S}^\circ \subset \boldsymbol{S}$.

Аксиома 2 и числовое выражение приоритета критерия (Определение 5) позволяет определять каждую допустимую точку $X \in \boldsymbol{S}$ (посредством вектора:

$P^q(X) = \{p^q_k(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}, k = \overline{1,K}\}$, формироваться и выбирать:

• подмножество точек по приоритетному критерию $\boldsymbol{S_q}$, который включен в множество точек $\boldsymbol{S}$, $\forall q \in \boldsymbol{K}$ $X \in \boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}$, (такое подмножество точек может использоваться в проблемах кластеризации, но это вне статьи);

• подмножество точек по приоритетному критерию $\boldsymbol{S}^o_q$, который включен в ряд точек $\boldsymbol{S^o}$, оптимальных по Парето, $\forall q \in K, X \in \boldsymbol{S^o_q} \subset \boldsymbol{S}^\circ$.

Множество допустимых точек $X \in \boldsymbol{S}$ $\rightarrow$	Подмножества точек оптимума по Парето, $X \in \boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S}$ $\rightarrow$	Подмножество точек, оптимума по Pareto $X \in \boldsymbol{S^o_q} \subset \boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S}$ $\rightarrow$	Отдельная точка, $\forall X \in \boldsymbol{S}$ $X \in \boldsymbol{S^o_q} \subset \boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S}$

Это самый важный результат, который позволит вывести принцип оптимальности и построить методы выбора любой точки из множества точек, оптимальных по Парето.

5.3. The principle of optimality for vector optimization with a Criterion Priority

Определение 8**.** (*Принцип оптимальности 2. Решение векторной задачи с заданным приоритетом критерия*). Векторная задача (2.1)–(2.4) с заданным приоритетом q-го критерия $p^q_k \lambda_k(X), k = \overline{1,K}$ считается решенной, если найдена точка X^o и максимальный уровень λ^o среди всех относительных оценок такой, что

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{X \in \boldsymbol{S}} \boldsymbol{min}_{k \in \boldsymbol{K}} p^q_k \lambda_k(X), q \in \boldsymbol{K}. \quad (5.6)$$

Используя взаимосвязь (5.4) и (5.5), преобразуем максиминную задачу (5.6) в задачу:

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{X \in \boldsymbol{S}} \lambda, \quad (5.7)$$

at restriction $\lambda \leq p^q_k \lambda_k(X), k = \overline{1,K}$. (5.8)

Задачу (5.7)-(5.8) назовем λ-задачей с приоритетом q-го критерия.

Результатом решения λ-задачи будет точка $\boldsymbol{X^o}=\{X^o, \lambda^o\}$ – она же является и результатом решения ВЗМП (2.1)-(2.4) с заданным приоритетом критерия, решенной на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата.

В оптимальном решении $\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\}$, $\boldsymbol{X^o}$ - оптимальная точка, а λ^o - максимальный нижний уровень. Точка X^o и уровень λ^o соответствуют ограничениям (2.4), которые можно записать как: $\lambda^o \leq p^q_k \lambda_k(X^o), k = \overline{1,K}$.

Эти ограничения являются основой оценки правильности результатов решения в практических векторных задачах оптимизации.

Определение 1 и 2 «Принципы оптимальности» дают возможность сформулировать понятие операции «opt».

Определение 9. (*Математическая операция «opt»*).

В векторной задаче (2.1)-(2.4), которая представлена критериями «max» и «min», математическая операция «opt» состоит в определении точки X^o и максимального нижнего уровня λ^o , в котором все критерии измеряются в относительных единицах:

$$\lambda^\circ \leq \lambda_k(X^\circ) = \frac{f_k(X)-f_k^0}{f_k^*-f_k^0}, k = \overline{1,K}, \quad (5.9)$$

т.е. все критерии $\lambda_k(X^o), k = \overline{1,K}$ равны или больше максимального уровня λ^o, (поэтому λ^o также называется гарантированным результатом).

Теорема 2. (*Теорема о наиболее противоречивых критериях в векторной задаче с заданным приоритетом*).

Если в выпуклой векторной задаче математического программирования максимизации (2.1)-(2.4) задан приоритет q-го критерия $p_k^q, k = \overline{1,K}, \forall q \in \boldsymbol{K}$ над другими критериями, в точке оптимума $X^o \in \boldsymbol{S}$, полученной на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата, всегда найдется два критерия с индексами $r \in \boldsymbol{K},\ t \in \boldsymbol{K}$, для которых выполняется строгое равенство из:

$$\lambda^\circ = p_k^r \lambda_r(X^\circ) = p_k^t \lambda_t(X^\circ), r, t, \in \boldsymbol{K}, \quad (5.10)$$

и другие критерии определяются неравенствами:

$$\lambda^\circ \leq p_k^q(X^\circ), k = \overline{1,K}, \forall q \in \boldsymbol{K}, q \neq r \neq t\ . \quad (5.11)$$

Критерии с индексами $r \in \boldsymbol{K},\ t \in \boldsymbol{K}$, для которых выполняется равенство (5.11), называются наиболее противоречивыми.

Доказательство. Аналогично теореме 2 [20].

Заметим, что в (5.10) и (5.11) индексы критериев $r \in \boldsymbol{K},\ t \in \boldsymbol{K}$ могут совпадать с индексом $q \in \boldsymbol{K}$.

In a convex vector problem of mathematical programming with two equivalent criteria, solved on the basis of normalization of criteria and the principle of the guaranteed result, in an optimum point of X^o equality is always carried out: at a priority of the first criterion over the second:

Следствие теоремы 1. О равенстве оптимального уровня и относительных оценок в векторной задаче с двумя критериями с приоритетом одного из них.

В выпуклой векторной задаче математического программирования с двумя эквивалентными критериями, решаемой на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата, в оптимальной точке X^o всегда выполняется равенство: при приоритете первого критерия над второй:

$$\lambda^o = \lambda_1(X^o) = p_2^1(X^\circ)\lambda_2(X^o), X^o \in \boldsymbol{S}\ , \quad (5.12)$$

где $p_2^1(X^\circ) = \lambda_1(X^o)/\lambda_2(X^o)$,

при приоритете второго критерия над первым:

$$\lambda^o = \lambda_2(X^o) = p_1^2(X^\circ)\lambda_1(X^o), X^o \in \boldsymbol{S},$$

где $p_1^2(X^\circ) = \lambda_2(X^o)/\lambda_1(X^o)$.

5.4. Метод решения задачи векторной оптимизации с заданным приоритетом критерия

Шаг 1. Мы решаем векторную задачу с равнозначными критериями. Алгоритм решения представлен в разделе 4.4.

В результате решения получаем:

оптимальные точки по каждому критерию отдельно $X_k^*, k = \overline{1,K}$ и размеры критериальных функций в этих точках $f_k^* = f_k(X_k^*), k = \overline{1,K}$, которые представляют граница множества точек, оптимальных по Парето;

точки анти оптимума по каждому критерию $X_k^0 = \{x_j, j = \overline{1,N}$ и наихудшей неизменной части каждого критерия $f_k^0 = f_k(X_k^0), k = \overline{1,K}$;

$\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\}$ оптимальная точка, как результат решения VPMP с эквивалентными критериями, т. Е. Результата решения максимальной задачи и λ-задачи, построенной на ее основе;

λ° - максимальная относительная оценка, которая является максимальным нижним уровнем для всех относительных оценок $\lambda_k(X^\circ)$, или гарантированный результат в относительных единицах, λ° гарантирует, что все относительные оценки $\lambda_k(X^\circ)$ равны или больше λ°:

$$\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), k = \overline{1,K}, X^\circ \in S \quad (5.13)$$

Лицо, принимающее решение, проводит анализ результатов решения векторной задачи с эквивалентными критериями.

Если полученные результаты удовлетворяют лицо, принимающее решение, то конец, иначе выполняются последующие расчеты.

Дополнительно вычислим:

в каждой точке $X_k^*, k = \overline{1,K}$ определим величины всех критериев $f_k^* = f_k(X_k^*), k = \overline{1,K}$, которые представляют границу множества Парето, и относительных оценок: $\lambda(X^*) = \{\lambda_q(X_k^*), q = \overline{1,K}, k = \overline{1,K}\}$, $\lambda_k(X) = \frac{f_k(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, \forall k \in \boldsymbol{K}$:

$$F(X^*) = \begin{vmatrix} f_1(X_1^*) \dots f_K(X_1^*) \\ \dots \\ f_1(X_K^*) \dots f_K(X_K^*) \end{vmatrix}, \quad \lambda(X^*) = \begin{vmatrix} \lambda_1(X_1^*) \dots \lambda_K(X_1^*) \\ \dots \\ \lambda_1(X_K^*) \dots \lambda_K(X_K^*) \end{vmatrix}. \quad (5.14)$$

Матрицы критериев $F(X^*)$ и относительных оценок $\lambda(X^*)$ показывают величины каждого критерия $k = \overline{1,K}$ при переходе от точки оптимума $X_k^*, k \in \boldsymbol{K}$ к другой $X_q^*, q \in \boldsymbol{K}$;

в точке оптимума при равнозначных критериях X^o вычислим величины критериев и относительных оценок:

$$f_k(X^o), k = \overline{1,K};\ \lambda_k(X^o), k = \overline{1,K}, \quad (5.15)$$

которые удовлетворяют неравенству (5.13). В других точках $X \in \boldsymbol{S^o}$ меньший из критериев в относительных единицах $\lambda = \boldsymbol{min_{k \in K}} \lambda_k(X)$ всегда меньше λ^o. Запоминаются данные λ-задачи (4.14)-(4.16). Эта информация и является основой для дальнейшего изучения множества Парето.

Шаг 2. *Выбор приоритетного критерия* $q \in \boldsymbol{K}$.

Из теории (см. теорему 1) известно, что в оптимальной точке X^o всегда имеется два наиболее противоречивых критерия $q \in \boldsymbol{K}$ и $v \in \boldsymbol{K}$, для которых в относительных единицах выполняется точное равенство:

$\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_v(X^o), q, v \in \boldsymbol{K}, X \in \boldsymbol{S}$, а для остальных выполняется неравенства:

$\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), \forall k \in \boldsymbol{K},\ q \neq v \neq k.$

Как правило, из этой пары выбирается критерий, который ЛПР хотел бы улучшить, такой критерий называется «приоритетным критерием», обозначим его $q \in \boldsymbol{K}$.

Шаг 3. *Определяются числовые пределы изменения величины приоритета критерия* $q \in \boldsymbol{K}$. Для приоритетного критерия $q \in \boldsymbol{K}$ из матрицы (5.14) определим числовые пределы изменения величины критерия: в натуральных единицах $f_q(X)$ и в относительных единицах $\lambda_q(X)$, которые лежат в следующих пределах:

$$f_k(X^o) \le f_q(X) \le f_q(X_q^*), k \in \boldsymbol{K} \qquad (5.16)$$

где $f_q(X_q^*)$ выводится из матрицы уравнения $F(X^*)$ (5.14), все критерии показывают размеры, измеренные в физических единицах, $f_k(X^o), k = \overline{1, K}$ из уравнения (5.15), и, в относительных единицах:

$$\lambda_k(X^o) \le \lambda_q(X) \le \lambda_q(X_q^*), k \in \boldsymbol{K}, \qquad (5.17)$$

где $\lambda_q(X_q^*)$ выводится из матрицы $\lambda(X^*)$, все критерии показывают размеры, измеренные в относительных единицах (отметим, что $\lambda_q(X_q^*) = 1), \lambda_q(X^o)$ из уравнения (5.14).

Как правило, Выражения (5.16) и (5.17) выдаются на дисплей для анализа.

Шаг 4. *Выбор величины приоритетного критерия* (Принятие решения).

Лицо, принимающее решение, проводит анализ результатов расчетов (5.14) и из неравенства в натуральных единицах (5.16) выбирает числовую величину f_q, $q \in \boldsymbol{K}$:

$$f_q(X^o) \le f_q \le f_q\left(X_q^*\right), q \in \boldsymbol{K}. \qquad (5.18)$$

Для выбранной величины критерия f_q необходимо определить вектор неизвестных X^{oo}, для этого проводим последующие вычисления.

Шаг 5. *Расчет относительной оценки.*

Для выбранной величины приоритетного критерия f_q вычисляется относительная оценка:

$$\lambda_q = \frac{f_q - f_q^0}{f_q^* - f_q^0}, \qquad (5.19)$$

которая при переходе от точки X^o к X_q^*, в соответствии с (5.13) лежит в пределах: $\lambda_q(X^\circ) \le \lambda_q \le \lambda_q(X_q^*) = 1.$

Шаг 6. *Вычисление коэффициента линейной аппроксимации.*

Предполагая линейный характер изменения критерия $f_q(X)$ в (5.18) и соответственно относительной оценки $\lambda_q(X)$ в (5.19), используя стандартные приемы линейной аппроксимации, вычислим коэффициент пропорциональности ρ между $\lambda_q(X^\circ), \lambda_q$:

$$\rho = \frac{\lambda_q - \lambda_q(X^o)}{\lambda_q^* - \lambda_q^0}, q \in \boldsymbol{K},$$

Шаг 7. *Вычисление координат приоритетного критерия с величиной* f_q.

В соответствии с (3.44) координаты точки приоритетного критерия X_q лежат в следующих пределах: $X^o \le X_q \le X_q^*, q \in \boldsymbol{K}$

Предполагая линейный характер изменения вектора $X_q = \{x_1^q, \dots, x_N^q\}$ определим координаты точки приоритетного критерия с величиной f_q с относительной оценкой (3.45):

$$X_q = \{x_1^q = x_1^o + \rho(x_q^*(1) - x_1^o), \dots,$$
$$x_N^q = x_N^o + \rho(x_q^*(N) - x_N^o)\}, \qquad (5.20)$$

где $X^o = \{x_1^o, \dots, x_N^o\}$, $X_q^* = \{x_q^*(1), \dots, x_q^*(N)\}$..

Шаг 8. *Вычисление основных показателей точки* x^q.

Для полученной точки x^q, вычислим:

все критерии в натуральных единицах: $F^q = \{f_k(x^q), k = \overline{1, K}\}$;

все относительные оценки критериев:

$$\lambda^q = \{\lambda_k^q, k = \overline{1, K}\}, \lambda_k(x^q) = \frac{f_k(x^q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}_{\overline{1,K}};$$

вектор приоритетов: $P^q = \{p_k^q = \frac{\lambda_q(x^q)}{\lambda_k(x^q)}, k = \overline{1,K}\}$;

максимальную относительную оценку:

$\lambda^{oq} = \min (p_k^q \lambda_k(x^q), k = \overline{1,K})$.

Аналогично может быть рассчитана любая точка из множества Парето:

$\boldsymbol{X_t^o = \{\lambda_t^o, X_t^o\} \in S^o}$.

Анализ результатов. Рассчитанная величина критерия $f_q(X_t^o), q \in \boldsymbol{K}$ обычно не равна заданной f_q. Ошибка выбора $\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q|$ определяется ошибкой линейной аппроксимации.

Результаты исследования симметрии в ВЗМП с заданным приоритетом аналогичны, как и для ВЗМП с равнозначными критериями, но центр симметрии смещен в сторону приоритетного критерия.

6. Аксиоматика и принцип оптимальности принятия управленческого решения на базе векторной оптимизации

6.1 «Объект для принятия решения» в условиях определенности и неопределенности

Объектом для принятия решения может быть: политическая, экономическая или техническая система. Каждый Объект для принятия решения имеет некоторый набор параметров $\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x_j},\ \boldsymbol{j} = \overline{\boldsymbol{1},\boldsymbol{N}}\}$, где системы $\boldsymbol{N}$ множество параметров. Функционирование Объекта характеризуется некоторым набором показателей, которые функционально зависят от параметров: $\boldsymbol{f_k(X), k = \overline{1,K}}$, где системы K множество показателей. Параметры $\boldsymbol{X}$ и показатели $\boldsymbol{f_k(X)}$ могут быть определены (например, в числовом виде) или неопределенны (например, в виде словесного выражения). Отсюда принятие решений может осуществляться в условиях определенности и условиях неопределенности, (что чаще всего и бывает).

Условия определенности характеризуются тем, что известна функциональная зависимость каждого критерия $\boldsymbol{f_k(X),\ k = \overline{1,K}}$ и ограничений $\boldsymbol{G(X)}$ от параметров системы $\boldsymbol{x_j,\ j = \overline{1,N}}$, [20];

Условия неопределенности характеризуются тем, что отсутствует достаточная информация о функциональной зависимости каждой характеристики и ограничений от параметров [6, 21].

При этом возникают две задачи принятия решений. *Первая задача*, характеризуется тем, что в ней известны только данные о некотором наборе показателей (такая задача представлена в следующем разделе). *Вторая задача*, в ней известны данные о некотором наборе параметров, а также соответствующие данные о некотором наборе характеристик.

Обе задачи возникают при проведении экспериментальных исследований по принципу «вход-выход». На основе проведенных экспериментальных исследований возникает задача принятия приемлемого решения. Анализ этих задач и принятие решений на их основе мы представим в следующих разделах.

Таким образом, в *условиях определенности* известна функция $\boldsymbol{f_k(X),\ k = \overline{1,K}}$, т. е. бесконечному множеству параметров $\boldsymbol{X}$ соответствует бесконечное множество оценок функции (критерия) $\boldsymbol{f_k(X)}$;

в условиях неопределенности известна лишь конечное множество параметров $\boldsymbol{X}$ и соответствующее множество оценок функции (критерия) $\boldsymbol{f_k(X)}$, т.е. чем меньше множество параметров, тем выше неопределенность.

Условия неопределенности рассматриваются в двух аспектах:

это отсутствие достаточной информации;

это неопределенность, связанная с множеством характеристик (критериев), исследуемого объекта.

Первый аспект определяется тем, что отсутствует достаточная информация о функциональной зависимости характеристики $\boldsymbol{f_k(X),\ k \in K}$, ограничений $\boldsymbol{g_i(X),\ i \in M}$ от параметров $\boldsymbol{X}$ исследуемого объекта. В этом случае исходные данные, характеризующий объект, представлены:

а) случайными данными;

б) нечеткими данными;

в) не полными данными, которые, как правило, получены из экспериментальных данных. Для вариантов, а) и б) исходные данные должны быть преобразованы к варианту в) и представлены в виде таблицы: 1 графа – величина параметра, 2 графа - величина характеристики. Методология преобразования случайных и нечетких данных в табличную форму достаточно широко представлена в журнале: "Fuzzy Decision Making and Soft Computing Applications". Табличные (экспериментальные) данные, используя регрессионный анализ, преобразуются в функцию $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})$, т.е. в условия определенности.

В дальнейшем в работе рассматривается только вариант в) и его преобразования регрессионными методами в условия определенности - в функцию $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})$.

Второй аспект неопределенности принятия решений связан тем, что объект характеризуется множеством характеристик: $\boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{X}), \dots, \boldsymbol{f_K}(\boldsymbol{X})$ или $\boldsymbol{f_k}(\boldsymbol{X})$, $\boldsymbol{k} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{K}}$. Множество характеристик *K* подразделяется на два подмножества $\boldsymbol{K_1}$ и $\boldsymbol{K_2}$. Подмножество характеристик $\boldsymbol{K_1}$ по своей числовой величине желательно получить как можно выше (max), а подмножество характеристик $\boldsymbol{K_2}$ желательно получить как можно ниже (min).

6.2. Концептуальная современная постановка задачи принятия решений в условиях неопределенности

Первоначально в общем виде концептуальная постановка задачи принятия решений выполнена в работе R. L. Keeney and H. Raiffa [24, стр. 79], в соответствии с которой введем обозначения:

$\boldsymbol{a_i}$, $\boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{M}}$ – допустимые альтернативы принятия решений;

$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_1}\ \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_M})^{\boldsymbol{T}}$ – вектор множества допустимых альтернатив.

Каждой альтернативе $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$ поставим в соответствие $\boldsymbol{K}$ числовых показателей (критериев): $\boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{a}), \dots, \boldsymbol{f_K}(\boldsymbol{a})$, характеризующих систему. Можем считать, что это множество показателей отображают каждую альтернативу в точку *К*-мерного пространства исходов (последствий) принимаемых действий: $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{f_2}(\boldsymbol{a}), \dots, \boldsymbol{f_K}(\boldsymbol{a})\}^{\boldsymbol{T}}$. Будем использовать один и тот же символ $\boldsymbol{f_k}(\boldsymbol{a})$, как для критерия, так и для функции оценки по этому критерию.

Заметим, что в любой точке $\boldsymbol{f_k}(\boldsymbol{a})$ *К* - мерного пространства последствий мы не можем непосредственно сравнивать величины $\boldsymbol{f_v}(\boldsymbol{a})$ и $\boldsymbol{f_k}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{k}$, ибо в большинстве случаев это было бы просто бессмысленно, т.к. эти критерии как правило измеряются в различных единицах.

Используя эти данные, можно сформулировать задачу принятия решений.

Задача лица, принимающего решение, состоит в выборе такой альтернативы $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$, которая позволила бы получить в наибольшей мере устраивающий его результат, т. е. $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}) \rightarrow \boldsymbol{min}$.

Из этого определения вытекает, что нам нужна такая функция оценки, которая бы сводила вектор $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})$ в скалярный критерий предпочтительности или «ценности». В другой формулировке это равносильно заданию скалярной функции $\boldsymbol{V}$, определенной в пространства последствий и обладающей следующим свойством:

$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})) \geq \boldsymbol{V}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}')) \Leftrightarrow \boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}) \gg \boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}')$,

где символ $\gg$ означает «не менее предпочтителен, чем» [20]. Назовем функцию $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}))$ *функцией ценности*. В литературе эта функция носит много других названий – порядковая функция полезности, функция предпочтения или функция полезности. Тогда задача лица, принимающего решение, сводится к выбору такого $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$, которое максимизирует $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}))$. Функция ценности служит для косвенного сопоставления важности тех или иных значений различных критериев системы.

С учетом сказанного матрица $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})$ допустимых исходов альтернатив примет вид:

$$\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1}\, \boldsymbol{f_1^1}, \dots, \boldsymbol{f_1^K} \\ \dots \\ \boldsymbol{a_M}\, \boldsymbol{f_M^1}, \dots, \boldsymbol{f_M^K} \end{vmatrix}, \qquad (6.1)$$

где $\boldsymbol{f_i^k} = \boldsymbol{f_k}(\boldsymbol{a_i}), \boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{M}}, \boldsymbol{k} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{K}}$, в ней все альтернативы представлены вектором показателей $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})$. Для определённости без ограничения общности примем, что первый критерий (а им может быть любой) отсортирован по возрастанию (по убыванию) и после этого альтернативы пронумерованы $\boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{M}}$.

Задача 1 вида лица, принимающего решение, состоит в выборе такой альтернативы $\boldsymbol{a^o} \in \boldsymbol{A}$ (2.1), которая позволила бы получить «в наибольшей мере устраивающий его (оптимальный) результат» [21].

Для технической системы каждая альтернатива $\boldsymbol{a_i}$ может быть представлена *N*-мерным вектором $\boldsymbol{X_i} = \{\{\boldsymbol{x_{ij}}, \boldsymbol{j} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{N}}\}, \boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{M}}\}$ параметров, а её исходы – *K*-мерным векторным критерием $\{\boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{X_i}), \dots, \boldsymbol{f_K}(\boldsymbol{X_i})\}, \boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{M}}$. С учетом этого матрица исходов (2.1) принимает вид:

$$\boldsymbol{I} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{X_1}\, \boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{X_1}), \dots, \boldsymbol{f_K}(\boldsymbol{X_1}) \\ \dots \\ \boldsymbol{X_M}\, \boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{X_M}), \dots, \boldsymbol{f_K}(\boldsymbol{X_M}) \end{vmatrix}. \qquad (6.\ 2)$$

По сравнению с ней в матрице (6.1) количество параметров N =1, т. е. значениями единственного параметра являются сами альтернативы.

Задача 2 (6.2) лица, принимающего решение, состоит в выборе такого набора конструктивных параметров системы $\boldsymbol{X^o} = \{\{\boldsymbol{x_{ij}}, \boldsymbol{j} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{N}}\}, \boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{M}}\}$, который позволил бы получить оптимальный результат [20].

6.3. Анализ современных методов принятия решений по экспериментальным данным

В настоящее время для решения задач (6.1) и (6.2) используется ряд «простых» методов, базирующихся на формировании специальных критериев, к которым относятся критерии Вальда, Сэвиджа, Гурвица, Байеса-Лапласа – они являются основой для принятия решений.

Критерий Вальда максимизации минимальной компоненты направлен на выбор оптимального решения, гарантирующего максимальный выигрыш среди минимальных:

$$max_{\,k=\overline{1,K}}\, min_{\,i=\overline{1,M}}\, f_i^k. \qquad (6.3)$$

Критерий Сэвиджа минимального риска в качестве оптимальной выбирает такую стратегию, при которой величина риска r_i^k принимает наименьшее значение среди максимальных значений рисков по столбцам:

$$min_{\,i=\overline{1,M}}\, max_{\,k=\overline{1,K}}\, r_i^k. \qquad (6.4)$$

Сама величина риска r_i^k выбирается из минимальной разности между решением, приносящим максимальный доход: $max_{\,i=\overline{1,M}}\, f_i^k, k = \overline{1,K}$, и текущим значением f_i^k, $r_i^k = (max_{\,i=\overline{1,M}}\, f_i^k - f_i^k)$, а их набор представляет матрицу рисков $R = \|r_i^k\|_{i=\overline{1,M}}^{k=\overline{1,K}}$.

Критерий Гурвица позволяет выбрать стратегию, занимающую некоторое промежуточное положение между крайним пессимизмом и оптимизмом (т. е. наиболее значительным риском):

$$max_{\,k=\overline{1,K}}(\alpha\, min_{\,i=\overline{1,M}}\, f_i^k - (1-\alpha) max_{\,i=\overline{1,M}}\, f_i^k), \qquad (6.5)$$

где α – коэффициент пессимизма, выбираемый в интервале $0 \le \alpha \le 1$.

Критерий Байеса-Лапласа учитывает каждое из возможных следствий всех вариантов решений с учетом их вероятностей p_i:

$$max_{\,i=\overline{1,M}} \sum_{k-1}^{K} f_i^k p_i, \qquad (6.6)$$

Все эти методы (6.3), … , (6.6) и другие достаточно широко представлены в литературе по принятию решений [7, 13, 20]. Всем им присущи определенные недостатки.

Например, при анализе критерия максимина Вальда выясняется, что по условию задачи все критерии выполнены в различных единицах. Отсюда первый шаг – выбор минимальной компоненты $f_k^{min}\ min_{i=\overline{1,M}}\ f_i^k$ вполне разумен, при этом все $f_k^{min}, k=\overline{1,K}$ измерены в различных единицах, поэтому второй шаг – максимизации минимальной компоненты $max_{\ k=\overline{1,K}}\ f_k^{min}$ не имеет смысла. Несколько приближает к решению проблемы использование шкалы измерения критериев, но в целом её не решает, так как выбранные шкалы критериев субъективны.

По нашему мнению, для решения проблемы (6.1) и (6.2) необходимо создание меры, позволяющей дать оценку любого принимаемого решения, в том числе и оптимального. Другими словами, необходимо построение *аксиоматики*, показывающей, исходя из набора K критериев, в чем одна альтернатива лучше другой. Из аксиоматики в свою очередь можно вывести принцип, определяющий оптимальность выбранной альтернативы. А принцип оптимальности должен лечь в основу конструктивных методов выбора оптимальных решений. Такой подход предложен для решения векторной задачи математического программирования, которая по своей сути близка к задаче принятия решений в (6.1) и (6.2).

6.4. Преобразование задачи принятия решения в векторную задачу

Для этого сравним задачи принятия решения (ЗПР) (6.1) и (6.2) с векторной задачей математического программирования (ВЗМП). Заметим, что задача (6.1) является частным случаем задачи (6.2).

Результаты сравнения изложены в табл. 6.1.

Таблица 6.1.

Сравнение ВЗМП с задачами принятия решений (ЗПР)

ВЗМП - (3.1)–(3.4)	ЗПР - (6.2)
2. Общая цель: Принятие наилучшего решения	
3. Определить вектор X из допустимого множества (3.3)-(3.4), в которой векторный критерий $F(X)$ (3.1) оптимален.	3. Цель: определить векторную альтернативу $\boldsymbol{X_i=\{x_{ij}, j=\overline{1,N}\}}$ из множества альтернатив $\boldsymbol{i=\overline{1,M}}$, в которой векторный критерий $\boldsymbol{f_k(X_i), k=\overline{1,K}}$ оптимален.
4. Полностью определены вектор параметров X и функциональная зависимость от него критериев $F(X)$, множество допустимых точек бесконечно, задано неравенствами $\boldsymbol{G(X)\le B, X\ge 0}$, (3.3)- (3.4)	4. Параметры определены, а критерии представлены в виде отдельных значений, так что функциональная взаимосвязь между ними не определена, множество допустимых точек конечно и равно: $\boldsymbol{i=\overline{1,M}}$.
$Opt\ F(X)=$ $\{\max F_1(X)=\{\max f_k(X),\ k=\overline{1,K_1}\}$,(3.1) $\min F_2(X)=\{\min f_k(X),\ k=\overline{1,K_2}\}\}$,(3.2) $G(X)\le B$, (3.3) $X\ge 0$, (3.4)	5. Преобразование задачи принятия решений в ВЗМП. Каждый k-й $\boldsymbol{k=\overline{1,K}}$ набор значений критериев $\boldsymbol{f_i^k, i=\overline{1,M}, \forall k\in K}$, используя множественную регрессию, преобразуем в критериальную функцию $\boldsymbol{f_k(X), \forall k\in K}$.
6. ↑ Задачи (3.1)-(3.4) и (6.7)-(6.9) Эквивалентны →	6. $Opt\ F(X)=\{f_1(X),\dots,f_K(X)\}^T$ (6.7) $f_k^{min}\le f_k(X)\le f_k^{max},\ k=\overline{1,K}$, (6.8) $\boldsymbol{X^{min}\le X\le X^{max}}$. (6.9)

Из первой и второй графы видно, что для всех задач цель «Принятие наилучшего (оптимального) решения» – общая. Для задачи принятия решений обоих видов (строка 4) имеется некоторая неопределенность – не известны функциональные зависимости критериев и ограничений от параметров задачи. В настоящее время разработано множество математических методов регрессионного анализа, которые доведены до программного обеспечения (например, система MATLAB) и позволяют по некоторому набору исходных данных (2.2) построить функциональные зависимости $\boldsymbol{f_k(X), k=\overline{1,K}}$. Поэтому для построения критериев и ограничений в задачах принятия решений обоих видов (строка 5) используем регрессионные методы, в т.ч. множественной регрессии [13]. Объединяя критерии и ограничения, представим задачи принятия решений обоих видов в виде векторной задачи математического программирования (строка 6).

Выполним эти преобразования. Каждый k-й столбец матрицы $\boldsymbol{I}$, используя методы регрессионного анализа для задачи (6.1) и множественную регрессию для задачи (6.2), преобразуем в критериальную функцию $\boldsymbol{f_k(X)}$. Всех их соберём в вектор-функцию $F(X)$:

$\mathbf{max}\, \boldsymbol{F_1(X)} = \{\mathbf{max}\, \boldsymbol{f_k(X)},\ \boldsymbol{k=\overline{1,K_1}}\}$ в (2.7); $\mathbf{min}\, \boldsymbol{F_2(X)} = \{\mathbf{min}\, \boldsymbol{f_k(X)},\ \boldsymbol{k=\overline{1,K_2}}$ в (6.7). Функциональными ограничениями (6.8) являются неравенства:

$$\boldsymbol{f_k^{min} \leq f_k(X) \leq f_k^{max},\ k=\overline{1,K},}$$

где $\boldsymbol{f_k^{min} = min_{i=\overline{1,M}}\, f_i^k(X_i)}$, $\boldsymbol{f_k^{max} = max_{i=\overline{1,M}}\, f_i^k(X_i)}$ – минимальные и максимальные значения каждой функции, а параметры ограничены минимальными и максимальными величинами каждого них (6.9).

В результате получим ВЗМП (6.7)-(6.9), для решения которой при равнозначных критериях используем та же аксиоматика, тот же принцип оптимальности и те же методы, основанные на нормализации критериев и принципе максимина, как и для модели технической системы в условиях полной определенности.

6.5. Исследование и теоретический анализ максиминной задачи с приоритетом критерия и с весовыми коэффициентами

6.5.1. Теоретический анализ максиминной задачи с приоритетом критерия и с весовыми коэффициентами.

Рассмотрим и представим максиминную задачу оптимизации (5.6):

$$\lambda^o = max_{X\in S} min_{k\in K}\, p_k^q \lambda_k(X). \qquad (5.6)$$

По своей структуре задача (5.6) внешне не отличается от аналогичной задачи, рассмотренной в ряде работ [20]:

$$\lambda^o = max_{X\in S} min_{k\in K}\, w_k \lambda_k(X), k=\overline{1,K}, X\in S, X\geq 0, \qquad (6.10)$$

где $\lambda_k(X) = \frac{f_k(X)-f_k^0}{f_k^*-f_k^0}, k=\overline{1,K}$ – относительная оценка (6.1) по k-му критерию, f_k^*, f_k^0 – оптимальное и наихудшее соответственно значения k-го критерия, т. е. исследование осуществляется в относительных единицах $\lambda_k(X)$; w_k – весовые коэффициенты, удовлетворяющие обычным условиям:

$w_k > 0$, $w_1 + \cdots + w_k = 1$, и выражающие предпочтение критериев. Предпочтение определяется тем, что предпочтительному (приоритетному) критерию присваивается больший вес.

Но внутренне задачи (3.54) и (6.10) полностью отличаются друг от друга. Покажем это отличие на двухкритериальной задачи максимизации:

$$f_1(X) \to \max, f_2(X) \to \max, \qquad (6.11)$$

$$g(X) \leq b, X=\{x_1,x_2\}, x_1\geq 0, x_2\geq 0, \qquad (6.12)$$

где множество допустимых точек $\boldsymbol{S}$ описанными ограничениями (6.12) не пусто, $S\neq\varnothing$ и представляет собой компакт. Построим на основе векторной задачи (6.11)-(6.12) максиминную задачу с нормализованными критериями:

$$\lambda^o = max_{X\in S} min_{k\in K}\, (\lambda_1(X), \lambda_2(X), K=2, X\in S, X\geq 0, \qquad (6.13)$$

где $\lambda_1(X), \lambda_2(X)$ – относительные оценки по первому и второму критериям, X_1^*, X_2^* – точки оптимума, полученные при решении ВЗМП (6.11)-(6.12) по первому и второму критериям соответственно.

Максиминную задачу (6.13) преобразуем в λ-задачу:

$\lambda^o = max_{X \in S}\ \lambda,$ (6.14)

$\lambda - \lambda_1(X) \leq 0,\ \ \lambda - \lambda_2(X) \leq 0.$ (6.15)

$g(X) \leq b, X = \{x_1, x_2\}, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Представим неравенства (6.15) в виде равенств, добавив переменные x', x'', и вычтем одно из них из другого: $\lambda_1(X) - x' = \lambda_2(X) - x''$.

Дополнительные переменные x' и x'' для двухкритериальной задачи сбалансированы и в оптимальной точке равны нулю (и это равенство подтверждает вышеприведенная теорема на этапе 2), в итоге

$\lambda_1(X^o) = \lambda_2(X^o).$ (6.16)

Поэтому алгоритм и называется «при равнозначных критериях».

Рассмотрим, как изменится равенство (6.16) при введении вектора приоритета и вектора весовых коэффициентов. Примем, что первый критерий имеет приоритет над вторым в 2 раза, тогда вектор приоритетов будет выглядеть следующим образом:

$P^1 = \{ p_1^1 = 1,\ p_2^1 = 2\},$ (6.17)

а вектор весовых коэффициентов:

$w = w_1 = 2/3,\ \ w_2 = 1/3\},\ \ w_1 + w_2 = 1.$

Тогда равенство (6.16) с вектором приоритетов P^1 имеет следующий вид:

$p_1^1 \lambda_1(X^o) = p_2^1 \lambda_2(X^o)$ или $\lambda_1(X^o) = 2\lambda_2(X^o),$ (6.18)

а с вектором весовых коэффициентов - с точностью наоборот:

$w_1\lambda_1(X^o) = w_2\lambda_2(X^o)$ или $2\lambda_1(X^o)3 = \lambda_2(X^o)3$ или $2\lambda_1(X^o) = \lambda_2(X^o).$ (6.19)

В результате решения ВЗМП (6.11)-(6.12) с вектором приоритетов (6.17) относительная оценка по первому критерию $\lambda_1(X^o)$ будет в 2 раза выше относительной оценки по второму критерию $\lambda_2(X^o)$, что и требовалось по условиям задачи. При решении ВЗМП (6.11)-(6.12) с вектором весовых коэффициентов (6.19) относительная оценка по первому критерию $\lambda_1(X^o)$ будет в 2 раза меньше относительной оценки по второму критерию $\lambda_2(X^o)$, что полностью противоречит условиям задачи. Покажем этот анализ на примере векторной задачи линейного программирования с двумя критериями.

6.5.2. Исследование максиминной задачи с приоритетом критерия и с весовыми коэффициентами на числовом примере

Пример 6.1. Решения максиминной задачи с приоритетом критерия и с весовыми коэффициентами.

Рассмотрим однородную векторную задачу линейного программирования – максимизации (ВЗЛП):

$Opt\ F(X) = \{max\ F_1(X) = \{max\ f_1(X) \equiv 5x_1 + x_2,$

$max f_2(X) \equiv 20x_1 + 80x_2\}\},$ (6.20)

$5x_1 + 5x_2 \leq 125,\ x_1 \leq 28,\ x_2 \leq 20,\ x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0.$ (6.21)

Вид допустимого множества решений, определяемых ограничениями (8.20)-(8.21), показан на рис. 5.

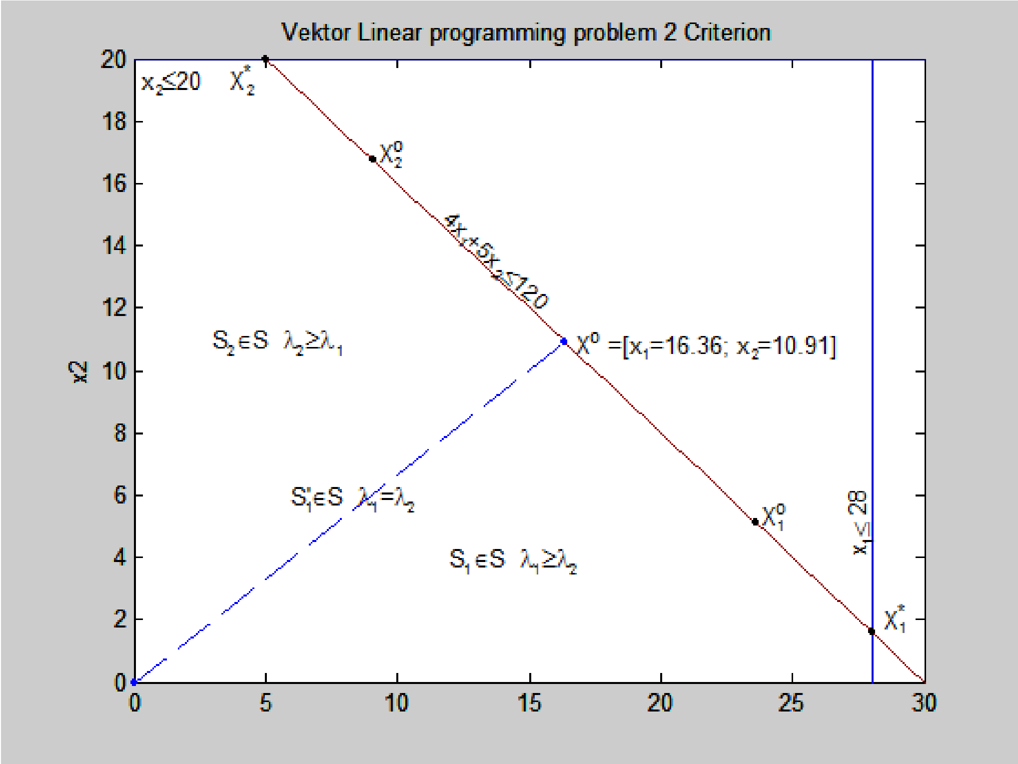

Рис. 5. Ограничения и решение ВЗЛП (6.20)-(6.21)

Решение векторной задачи линейного программирования (8.20)-(8.21) алгоритмом, основанного на нормализации критериев и принципа гарантированного результата представим в системе MATLAB.

Для решения по каждому критерию используется функция *linprog*, которая решает задачу линейного программирования.

Шаг 1. Получим точки оптимума, показанные на рис. 6.1:

X_1^*={x_1=28, x_2=1.6}; f_1^*=141.6; X_2^*={x_1 =5, x_2 =20},f_2^*=2500.

Шаг 2. Не выполняется. Для ВЗЛП с нестрогими ограничениями наихудшие значения критериев f_1^0=f_2^0=0. В итоге нормализация примет вид $\lambda_k(X)= f_k(X)/f_k^*$.

Шаг 3. Выполняется анализ критериев, для чего в оптимальных точках X_1^*, X_2^* определяются матрицы целевых функций и относительных оценок^

$$F(X^*) = \text{FXopt} = \begin{vmatrix} f_1(X_1^*) \; f_2(X_1^*) \\ f_1(X_2^*) \; f_K(X_2^*) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 141.6 \; 752.0 \\ 45.0 \; 2500.0 \end{vmatrix}.$$

$$\lambda(X^*) = \text{LXopt} = \begin{vmatrix} \lambda_1(X_1^*) \; \lambda_2(X_1^*) \\ \lambda_1(X_2^*) \; \lambda_K(X_2^*) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.0 & 0.3008 \\ 0.045 & 1.0 \end{vmatrix}.$$

Шаг 4. Строится λ-задача:

$\lambda^o = \max \lambda$, (6.22)

$\lambda - (5x_1 + 1x_2)/141.6 \le 0$, (6.23)

$\lambda - (20x_1 + 80x_2)/ 2500 \le 0$, (6.24)

$5x_1+5x_2 \le 125$, $x_1 \le 28$, $x_2 \le 20$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, (6.25)

которая решается обращением к функции *linprog*.

Результаты: оптимальные значения переменных X^o ={ λ_1 =0.6547, x_1 = 16.3585, x_2 =10.9132}; оптимальное значение целевой функции: λ^o =0.6547. Полученные функции $\lambda_1(X)$, $\lambda_2(X)$, а также точки оптимума X^o и λ^o на их пересечении, представлены на рис. 6.

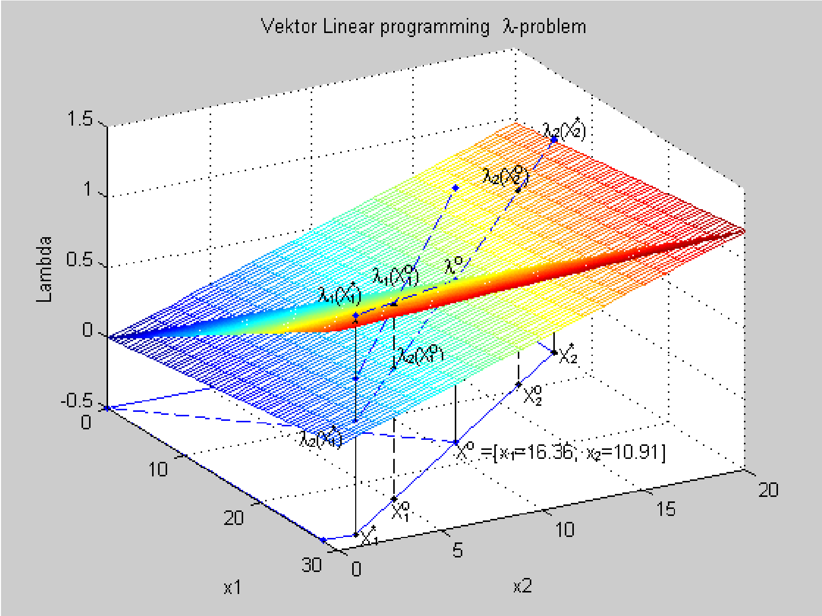

Рис. 6. Решение ВЗЛП (6.20)-(6.21) с приоритетом первого критерия и весовыми коэффициентами

Выполним проверку:

$f_1(X^o)$=92.7, $\lambda_1(X^o)$=0.6547; $f_2(X^o)$=1636.8, $\lambda_2(X^o)$=0.6547,

т. е. $\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), \mathrm{k}=1,2$.

Эти результаты показывают, что в точке X^o оба критерия в относительных единицах достигли уровня $\lambda^o = 0.6547$ от своих оптимальных величин. Любое увеличение одного из критериев выше этого уровня приводит к уменьшению другого критерия, т.е. точка X^o оптимальна по Парето (рис 6).

Решим ВЗЛП (6.20)-(6.21) и соответственно λ-задачу (6.22)-(6.25) с заданным вектором приоритетов $P^1 = \{p_1^1 = 1, p_2^1 = 2\}$ и вектором весовых коэффициентов $w= w_1=2/3, \ w_2=1/3\}, \ w_1+w_2=1$.

В этом случае λ-задача примет вид:

$$\lambda^o = max_{X\in S}\, \lambda, \qquad (6.26)$$

$$\lambda - p_1^1\,(5x_1 + x_2)\,/f_1^* \leq 0, \qquad (6.27)$$

$$\lambda - p_2^1\,(20x_1 + 80x_2)\,/f_2^* \leq 0,$$

$$5x_1 + 5x_2 \leq 125, x_1 \leq 28, x_2 \leq 20, x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0. \qquad (6.28)$$

Для данной задачи при переходе от точки X^o, полученной при равнозначных критериях λ-задачи (6.26)-(6.27), к точке оптимума X_1^*, полученной при решении по первому критерию, приоритет первого критерия лежит в пределах:

$$p_1^1(X_1^*) \leq p_2^1 \leq p_2^1\,(X^o). \qquad (6.29)$$

Понятие приоритета критерия вытекает из аксиоматики, которая показывает, что допустимое множество точек $\boldsymbol{S}$, в том числе множество точек оптимальных по Парето, $\boldsymbol{S^o}$, лежащее между точками X_1^* и X_2^*, подразделяется на три подмножества точек:

подмножества S_1 и S_1^o являются областью приоритета первого критерия над вторым (характеризуется тем, что $\lambda_1(X) > \lambda_2(X), \ \forall X \in S_1^o \subset S_1 \subset \boldsymbol{S^o}$), S_1^o лежит между точками X_1^* и X^o;

подмножества S_2 и S_2^o являются областью приоритета второго критерия над первым $\lambda_2(X) > \lambda_1(X), \ \forall X \in S_2^o \subset S_2 \subset \boldsymbol{S}, \ S_2^o$ лежит между точками X^o и X_2^*;

подмножество точек $S' \subset \boldsymbol{S}$, где критерии равнозначны $\lambda_1(X)=\lambda_2(X), \ \forall X \in S' \subset \boldsymbol{S}$. Подмножеству S' принадлежит точка X^o, в которой λ^o– максимальный уровень, причем

$\lambda^o = \lambda_1(X^o) = \lambda_2(X^o)$ в соответствии с теоремой. X^o также принадлежит и множеству точек, оптимальных по Парето, $\boldsymbol{S^o}$ (рис. 5, 6).

В задаче (6.20)-(6.21) неравенства (6.29) примут вид

$p_1^1(X_1^*)$=3.3245≤ p_2^1≤1 = p_2^1 (X^o),

из него выбирается p_2^1, например p_2^1=2, который вводится в λ-задачу (6.26)-(6.28).

В результате решения λ-задачи (6.26)-(6.28) с заданным вектором приоритетов получим:

точку оптимума X_1^o={λ_1=0.8694, x_1=23.5959, x_2 =5.1233} (рис. 6);

оптимальное значение целевой функции: λ^o=0.8694.

Выполним проверку:

$f_1(X_1^o) = 123.1, f_2(X_1^o) = 1086.7,$

$\lambda_1(X_1^o) = 0.8694, \lambda_2(X_1^o) = 0.4347,$ т. е. $\lambda^o \le \lambda_1(X_1^o) = 2\lambda_2(X_1^o) = 0.8694.$

Эти результаты показывают, что в точке оптимума X_1^o, относительная оценка $\lambda_1(X_1^o)$ в 2 раза больше относительной оценки $\lambda_2(X_1^o)$. Это соответствует условиям задачи: о приоритете первого критерия над вторым, при этом плоскость, определяемая функцией $2\lambda_2(X)$ в области Парето в точке X_1^o достигла уровня $\lambda^o = 0.8694, \lambda_2(X_1^o)$. Это видно на пунктирной прямой, проходящей через точку X_1^o.

В результате решения λ-задачи (6.26)-(6.28) с заданным вектором весовых коэффициентов получим:

точку оптимума X_2^o={λ_1=0.2922, x_1= 9.0615, x_2=16.75} (рис. 5, 6);

оптимальное значение целевой функции: $\lambda^o = 0.2922$,

Выполним проверку:

$$f_1(X_1^o) = 123.1, f_2(X_1^o) = 1086.7 \quad (6.30)$$

$$\lambda_1(X_1^o) = 0.8694, \lambda_2(X_1^o) = 0.4347, \text{т. е. } \lambda^o \le \lambda_1(X_1^o) = 2\lambda_2(X_1^o) = 0.8694$$

$f_1(X_2^o)$ =62.1, $f_2(X_2^o)$ =2191.3,

$\lambda_1(X_2^o)$ =0.4383; $\lambda_2(X_2^o)$ =0.8765, т. е. $\lambda^o \le \lambda_1(X_2^o)/3 = \lambda_2(X_2^o))/3$ =0.2922.

Эти результаты показывают, что в точке оптимума X_2^o относительная оценка $\lambda_1(X_2^o)$ в 2 раза меньше относительной оценки $\lambda_2(X_2^o)$, что полностью противоречит исходному заданию.

Таким образом, метод, основанный на аксиоматике, нормализации критериев и принципе гарантированного результата, дает точные ответы на поставленные условия (исходные данные) решения ВЗМП.

6.6. Постановка и принятие оптимального решения по экспериментальным данным в задаче с одним параметром

Решение задачи принятия решений первого вида (6.1) и выбор оптимального решения покажем на конкретном примере. При этом продемонстрируем и независимость предлагаемого метода от вида искомого экстремума частных критериев.

6.6.1. Постановка задачи принятия решений первого вида

Постановка задачи выполняется конструктором технической системы по экспериментальным данным.

Дано. Техническая система, функционирование которой определяется одним параметрами $X = \{x_1\}$ – вектор (управляемых) переменных. Экспериментальные данные для задачи принятия решений представлены в табл. 2.

Таблица 2

Экспериментальные данные (Матрица *I*)

x	f_1	f_2	f_3	f_4
630	4200	1950	1628	245
1580	6000	2100	1577	230
2662	8850	2090	1377	210
3704	11000	2050	1200	200
4800	12900	1950	1100	190
5929	14730	1750	977	170
7284	16310	1560	1050	151
9353	19000	1350	1100	150
14505	23250	540	1457	100
18810	29970	400	2088	55

Экспериментальные данные включают один параметр $\{x_1\}$ и четыре характеристики:
$f_1(X) \to \max$, $f_2(X) \to \max$, $f_3(X) \to \min$, $f_4(X) \to \max$,
по которым производится выбор. В совокупности они представляют задачу принятия решений первого вида.

***Требуется*:** Принять наилучшее (оптимальное) решение по представленным экспериментальным данным.

6.6.2. Принятие оптимального решения по экспериментальным данным в задаче с одним параметром

Принятие оптимального решения представим в два этапа.

***1 этап**. Преобразование задачи принятия решений в ВЗМП.*

Шаг 1. Подготавливаются исходные данные таблицы 2 в виде матрицы I (6.2): $I = \{x\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\}$.

Используя операторы системы MATLAB, представим исходные данные $I = \{x\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\}$ графически на рис. 7, где так же представлены точки таблицы 7.

```
xlabel('X'); ylabel('Y'); hold on;
plot(I(:,1),I(:,2)/10,'k.');
plot(I(:,1),I(:,3),'go');
plot(I(:,1),I(:,4),'bp');
plot(I(:,1),I(:,5)*10,'r*').
```

При этом для наглядности первый критерий на порядок уменьшен, а четвертый – увеличен.

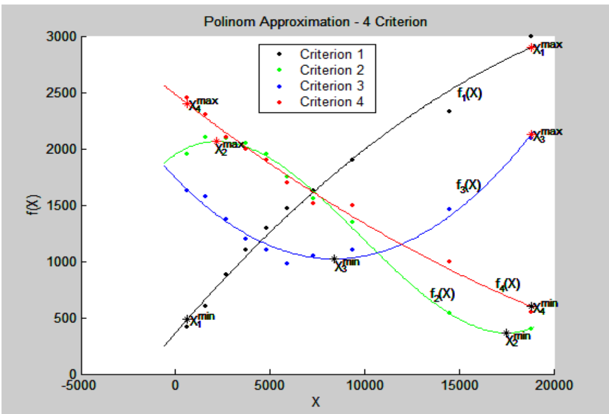

Рис. 7. Полиномиальная аппроксимации четырех критериев $f_1\ f_2\ f_3\ f_4$

Шаг 2. Используя метод наименьшего квадратичного уклонения [17], мы рассчитываем коэффициенты аппроксимирующего полинома второй степени:

$\min f(A,X) \equiv \sum_{i=1}^{M}(y_i - (a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2))^2.$ (6.31)

Аппроксимация выполняется в системе MATLAB с помощью функции:

polyfit(X,Y,N),

где X – вектор табличных значений (узлов), Y – заданные значения оценки.

Устанавливаются пределы изменения параметра x нижней, верхней шкалы на рис. 7. В системе MATLAB это представлено как x=-600.:100.:19000.

Мы рассчитаем первый критерий с помощью функции:

c1=polyfit(I(:,1),I(:,2)/10,2).

В результате получили:

c_1(1)=-3.1937E-06; c_1(2)=0.1947; c_1(3)=365.1,

что соответствует полиному второй степени:

$f_1(x)$ = –3.1937E–06x^2 + 0.1947x + 365.1. (6.32)

Вычислим значения полинома:

y5=polyval(c1,x) и представим его на графике: plot(x,y5,'k-'); hold on.

Аналогично остальные критерии

$f_2(x)$= 9.467E-10x^3-2.7968E-05x^2+0.1090x+1949.2, (6.33)

$f_3(x)$= 1.0174E-05x^2-0.1707x+1737.4, (6.34)

$f_4(x)$= 1.6458E-07x^2-0.01309x+247.83. (6.35)

Все полученные точки и функции тоже показаны на рис. 6.3.

Шаг 3. Формирование и решение векторной задачи математического программирования. Используя результаты предыдущего этапа, представим задачу принятия решений в виде ВЗМП (3.1)-(3.4) с векторным критерием $F(x) = (-f_1(x)\ \ -f_2(x)\ \ f_3(x)\ \ -f_4(x)\ )^T$ и ограничениями $630 \le\ x \le 18810$:

$Opt\ F(X) = \{$

$\max F_1(X) = \{\max f_1\,(X) \equiv \{-3.1937\text{E}-06x^2 + 0.1947x + 365.1,$ (6.36)

$\max f_2\,(X) \equiv \{-9.467\text{E}-10x^3 - 2.7968\text{E}-05x^2 + 0.1090x + 1949.2,$ (6.37)

$\max f_4\,(X) \equiv 1.6458\text{E}-07x^2 - 0.01309x + 247.83\},$ (6.38)

$\min F_2(X) = \{\min f_3\,(X) \equiv 1.0174\text{E} - 05x^2 - 0.1707x + 1737.4\}\},$ (6.39)

при ограничениях $x_j^{min} = 630 \le\ x \le 18810 = x_j^{max}$. (6.40)

2 этап. Решение ВЗМП (6.36)-(6.40) проведём в соответствии с главой 4.

Шаг 1. Решается задача (6.36)-(6.40) по каждому критерию отдельно. Так как каждый из них представляет унимодальную функцию, то для определения его минимума или максимума на отрезке (6.40) используется функция: [x,f]=fminbnd(c,a,b).

Здесь c,a,b – входные параметры: c – заданная функция, a,b – начало и конец интервала; x,f – выходные параметры (точка оптимума и величина целевой функции в ней). Для первого критерия она примет вид:

[x1max, f1max]= fminbnd('-(-3.1937E-05*x^2+1.9467*x+3651.1)',I(1,1),I (10,1)).

В результате решения получим точку оптимума по первому критерию x_1^{max} и величину критерия в этой точке:

$X_1^* = x_1^{max} = 18810, f_1^* = f_1(x_1^{max}) = -28969.$

Аналогично для остальных критериев:

$X_2^* = x_2^{max} = 2192.8, f_2^* = f_2(x_2^{max}) = -2063.7.$

$X_4^* = x_4^{max} = 630.0, f_4^* = f_4(x_4^{max}) = \ -239.65.$

$X_3^* = x_3^{min} = 8389.0, f_3^* = f_3(x_3^{min}) = \ 1021.4.$

Шаг 2. Определяем наихудшую часть каждого критерия. В результате получим точку оптимума по первому критерию

$x_1^0 = x_1^{min}$=630 и величину критерия в этой точке $f_1^0 = f_1(x_1^{min}) = 4864.9$ (наихудшая неизменяемая часть по первому критерию). Эту и остальные точки функции представим на рис. 13.1 оператором

plot(x1min , f1min /10,'k*').

Аналогично для остальных критериев:

$x_2^0 = x_2^{min}$=17502, $f_2^0 = f_2(x_2^{min})$ =365.22;

$x_4^0 = x_4^{min}$=18810, $f_4^0 = f_4(x_4^{min})$=59.838;

$x_3^0 = x_3^{min}$=18810, $f_3^0 = f_3(x_3^{min})$ =-2126.3 (см. рис. 7).

Шаг 3. Выполняется анализ множества точек, оптимальных по Парето. В точках оптимума $X^* = \{X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*\}$ определяются величины целевых функций $F(X^*) = \left\|f_q(X_k^*)\right\|_{q=\overline{1,K}}^{k=\overline{1,K}}$, $D = (d_1\ d_2\ d_3\ d_4)^T$- вектор отклонений по каждому критерию на допустимом множестве $\boldsymbol{S}$: $d_k = f_k^* - f_k^0, k = \overline{1,4}$, и матрица относительных оценок:

$\lambda(X^*) = \left\|\lambda_q(X_k^*)\right\|_{q=\overline{1,K}}^{k=\overline{1,K}}$, где $\lambda_k(X) = (f_k^* - f_k^0)/d_k$.

В задаче (6.36)-(6.40) критерии в нормализованном виде $\lambda_k(X), k = \overline{1,K}$ могут быть представлены в виде таблицы 3.

Таблица 3

Нормализованные критерии

x	**λ1-max**	**λ2-max**	**λ3-min**	**λ4-max**
630	-0.0276	0.9330	0.4510	1.0298
1580	0.0471	1.0214	0.4971	0.9463
2662	0.1653	1.0155	0.6781	0.8351
3704	0.2545	0.9919	0.8383	0.7795
4800	0.3334	0.9330	0.9289	0.7239
5929	0.4093	0.8153	1.0402	0.6127
7284	0.4748	0.7034	0.9741	0.5070
9353	0.5864	0.5798	0.9289	0.5014
14505	0.7627	0.1029	0.6057	0.2234
18810	1.0415	0.0205	0.0346	-0.0269

Рассчитываются коэффициенты аппроксимирующего полинома для нормализованных критериев, что даёт

$\lambda_1(X) =$ -1.325E-09 x^2 + 8.0762E-05 x - 0.0504,

$\lambda_2(X) =$ 5.5735E-13 x^3 - 1.6467E-08 x^2 + 6.4179E-005 x +0.9325,

$\lambda_3(X)$ =-9.2080E-09 x^2 + 1.5451E-04 x + 0.3519,

$\lambda_4(X)$ =9.1530E-10 x^2 - 7.2811E-05 x + 1.0455.

Точки оптимума и нормализованные критерии покажем на рис. 7. Оптимальную точку X^o на рис. 8 можно выбрать вручную.

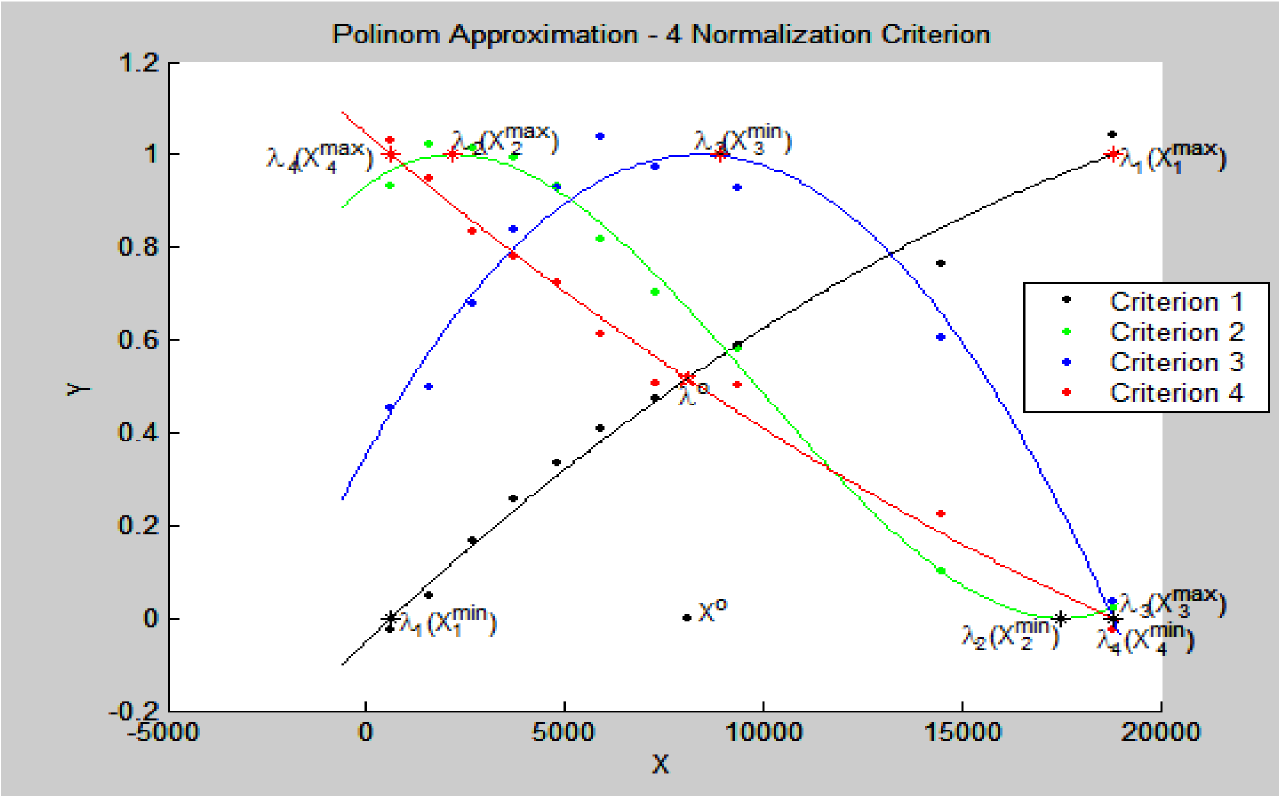

Рис. 8. Аппроксимации четырех нормализованных критериев

Точную величину X^o получим с помощью решения λ-задачи.

Шаг 4. Построение λ-задачи. Используя полученные функции относительных оценок: $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$, $\lambda_3(x)$, $\lambda_4(x)$, мы построим λ-задачу:

$$\lambda^o = max\, \lambda \quad (6.41)$$

$$\lambda \text{ - }(\text{-}3.1937\text{E-}05\ x^2 + 1.9467\, x\ + 3651.1\ - f_1^0)/\, d_1\ \le 0, \quad (6.42)$$

$$\lambda \text{ - }(9.467\text{E-}10\ x^3 \text{ -}2.7968\text{E-}05\ x^2 + 0.109\, x\ + 1949\ - f_2^0)/\, d_2\ \le 0, \quad (6.43)$$

$$\lambda \text{ - }(1.0174\text{E-}05 x^2 \text{ - } 0.1707\, x\ + 1737.4\ - f_3^0)/\, d_3 \le 0, \quad (6.44)$$

$$\lambda \text{ - }(\ 1.6458\text{E-}07 x^2\ \text{ - } 0.01309\, x\ + 247.83\ - f_4^0)/\, d_4 \le 0, \quad (6.45)$$

$$630 \le x \le 18810 \quad (6.46)$$

Шаг 5. Решение λ-задачи (6.41)-(6.46). Мы используем стандартные методы, в частности функцию fmincon(…) из системы MATLAB. В результате решения получаем:

- точку оптимума:

$$\boldsymbol{X^o} = \{\lambda^o\ = 0.5163, X^o\ = 8090\ . \quad (6.47)$$

Оптимальная точка $\boldsymbol{X^o}$ представлена на рис. 6.2, она показана звёздочкой;

- величины критериев в этой точке:

$$f_1(X^o) = 17310, f_2(X^o) = 1501.8, f_3(X^o) = 1022.3, f_4(X^o) = 152.7; \quad (6.48)$$

- величины относительных оценок $\lambda_k(X^o), k = \overline{1, K}$:

$\lambda_1(X^o)$ =0.5163, $\lambda_2(X^o)$ =0.6692, $\lambda_3(X^o)$ =0.9992, $\lambda_4(X^o)$ (X^o)=0.5165, (6.49) представлены на рис. 8. Анализ результатов (6.47)-(6.49) показывает, что первый, четвертый критерии равны между собой:

$$\lambda_1(X^o) = \lambda_4(X^o) = \lambda^o\ = 0.5163. \quad (6.50)$$

В соответствии с теоремой 1 первый, четвертый критерии в (6.20) наиболее противоречивы. Остальные критерии больше или равны максимальной относительной оценке λ^o, которая является гарантированным результатом в относительных единицах.

7. Математика векторной оптимизации и ее приложение в проектировании и принятии управленческих решений в инженерных системах

Седьмая глава этой работы имеет прикладной характер. Работа направлена на базе аксиоматики векторной оптимизации представить автоматизацию проектирования инженерных систем (на примере технической системы), [7-21].

7.1. Векторная задача математического программирования с условиями определенности и неопределенности

Представим задачу векторной оптимизации с условиями определенности и неопределенности.

Условия определенности характеризуются тем, что известна функциональная зависимость каждой характеристики и ограничений от параметров исследуемого объекта, [7-19].

Условия неопределенности характеризуются тем, что исходные данные, характеризующие исследуемого объекта, представлены:

а) случайными, б) нечеткими, или, в) не полными данными.

Поэтому у нас отсутствует достаточная информация о функциональной зависимости каждой характеристики и ограничений от параметров [8-20]. Данные опции a) и b) преобразуются в данные опции c) и представляются в табличной форме. В работе опция c) с неполными данными, которые, как правило, получены из экспериментальных данных.

В реальной жизни условия определенности и неопределенности совмещаются. Модель технологического процесса так же должна отражать эти условия. Мы представим модель технологического процесса в условиях определенности и неопределенности в совокупности:

$$Opt\ F(X) = \{\max F_1(X) = \{\max f_k(X), k = \overline{1, K_1^{def}}\},$$

$$\max I_1(X) \equiv \{\max f_k(X_i,\ i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}, \quad (7.1)$$

$$\min F_2(X) = \{\min f_k(X), k = \overline{1, K_2^{def}},$$

$$\min I_2(X) \equiv \{\min f_k(X_i,\ i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}\}, \quad (7.2)$$

at restriction $$f_k^{min} \le f_k(X) \le f_k^{max}, k = \overline{1, K}, \quad (7.3)$$

$$x_j^{min} \le x_j \le x_j^{max}, j = \overline{1, N}, \quad (7.4)$$

где $X = \{x_j,\ j = \overline{1, N}\}$ - вектор управляемых переменных (входных параметров исследуемого объекта);

$F(X) = \{F_1(X)\ F_2(X)\ I_1(X)\ I_2(X)\}$ - векторный критерий, каждая компонента которого представляет вектор критериев (выходных характеристик исследуемого объекта). Величина характеристики (функции) зависит от дискретных значений вектора переменных X. $F_1(X)\ F_2(X)$ - множество функций max и min соответственно; $I_1(X)\ I_2(X)$ множество дискретных значений характеристик max и min соответственно; $\overline{1, K_1^{def}}, \overline{1, K_2^{def}}$ (*definiteness*), $\overline{1, K_1^{unc}}, \overline{1, K_2^{unc}}$ (*uncertainty*) множество критериев max и min сформированные в условиях определенности и неопределенности; в (7.3) $f_k^{min} \le f_k(X) \le f_k^{max}, k = \overline{1, K}$ – вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование исследуемого объекта, $x_j^{min} \le x_j \le x_j^{max}, j = \overline{1, N}$ – параметрические ограничения накладываемые на исследуемый объект.

7.2. Преобразование задачи принятия решения в условиях неопределенности в задачу векторной оптимизации в условиях определенности

Устранение неопределенности состоит в использовании качественных и количественных описаний исследуемого объекта, которые могут быть получены, например, по принципу “вход-выход”. Преобразования такой информации – исходных данных в функциональную зависимость осуществляется путем использования математических методов (регрессионного анализа), [9-19].

Преобразование вектор - функции (критериев) осуществляется по методу наименьших квадратов:

$\min \sum_{i=1}^{M}(y_i - \overline{y_i})^2$,

где $y_i, i = \overline{1, M}$ - реально наблюдаемые величины; $\overline{y_i}, i = \overline{1, M}$ их оценки, полученные для однофакторной модели с помощью функции $\overline{y_i} = f(X_i, A), X_i = \{x_i\}$. Функцию $f(X_i, A)$ представили в виде полинома. В прикладной части работы используется полином второй степени.

В результате такого преобразования исходные данные в (1) и (2):

$\{f_k(X_i,\ i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}$, $\{f_k(X_i,\ i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_2^{unc}}$

в задачах принятия решения в условиях неопределенности преобразованы функции:

$f_k(X), k = \overline{1, K_1^{unc}}$, $\{f_k(X), k = \overline{1, K_2^{unc}}$

В итоге векторная задача с условиями определенности и неопределенности (7.1)-(7.4) преобразуется в векторную задачу в условиях определенности:

$Opt\ F(X) = \{\max F_1(X) = \{\max f_k\ (X).\ k = \overline{1, K_1}\}$, (7.5)

$\min F_2(X) = \{\min f_k\ (X).\ k = \overline{1, K_2}\}\}$, (7.6)

at restriction $f_k^{min} \le f_k(X) \le f_k^{max}, k = \overline{1, K}$, (7.7)

$x_j^{min} \le x_j \le x_j^{max}, j = \overline{1, N}$, (7.8)

где $F(X) = \{f_k,\ k = \overline{1, K}$ - векторный критерий, каждая компонента которого представляет характеристику исследуемого объекта, функционально зависящую от вектора переменных X; подмножество критериев в условиях определенности:

$K_1 = K_1^{def} \text{U}\ K_1^{unc}$, (7.9)

и в условиях определенности:

$K_2 = K_2^{def} \text{U}\ K_2^{unc}$. (7.10)

Векторная задача математического программирования (7.5)-(7.8) является аналогом ВЗМП (2.1)-(2.4).

7.3. Методология выбора оптимальных параметров инженерных систем в условиях определенности и неопределенности на основе математики векторной оптимизации

В качестве объекта исследования нами рассматриваются «Инженерные системы», к которым относятся «технические системы», «технологические процессы», «материалы», [17, 18, 19]. Исследование инженерной системы выполнено, во-первых, в условиях определенности, когда известны данные о функциональных характеристиках инженерной системы; во-вторых, в условиях неопределенности, когда известны дискретные значения отдельных характеристик; также известны данные об ограничениях, которые накладываются на функционирование системы. Математический аппарат моделирования инженерной системы базируется на теории и методах векторной оптимизации, которые представлены в третьем разделе. В организационном плане процесс моделирования и симулирования технической системы представлен в виде методологии: «Методология выбора оптимальных параметров инженерных систем в условиях определенности и неопределенности».

Методология включает ряд этапов.

1. Формирование технического задания (исходных данных) на численное моделирование и выбора оптимальных параметров системы. Исходные данные формирует конструктор, который проектирует техническую систему.

2. Построение математической и численной модели технической системы в условиях определенности и неопределенности.

3. Решение векторной задачи математического программирования (ВЗМП) - модели инженерной системы при равнозначных критериях.

4. Построение геометрической интерпретации результатов решения в трех мерной системе координат в относительных единицах.

5. Решение векторной задачи математического программирования - модели инженерной системы при заданном приоритете критерия.

6. Геометрическая интерпретация результатов решения в трех мерной системе координат в физических единицах.

7.4. Автоматизация проектирования: Выбор оптимальных параметров технической системы в условиях определенности и неопределенности

Концепция автоматизации проектирования представлена в работах [18, 19].

В этом разделе рассматривается фрагмент автоматизации проектирования: задача численного моделирования и симулирования технической системы. Для технической системы известны данные о некотором наборе функциональных характеристик (условия определенности), дискретных значений характеристик (условия неопределенности) и ограничений, накладываемых на функционирование технической системы. Численная задача моделирования технической системы рассматривается с равнозначными критериями и с заданным приоритетом критерия.

7.4.1. Формирование технического задания (исходных данных). 1 этап.

Дано. Мы исследуем техническую систему. Функционирование технической системы определяется четырьмя параметрами $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, которые представляют вектор управляемых переменных. Параметры технической системы заданы в следующих пределах:

$$22 \le x_1 \le 88, 0 \le x_2 \le 66, 2.2 \le x_3 \le 8.8, 2.2 \le x_4 \le 8.8. \qquad (7.11)$$

Функционирование технической системы определяются четырьмя характеристиками (критериями) $F(X) = \{f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)\}$, величина оценки которых зависит от вектора параметров X.

Условия определенности. Для первой и третьей характеристики $f_1(X)$ и $f_3(X)$ известна функциональная зависимость от параметров $X = \{x_j, j = \overline{1, N}, N = 4\}$.

$$f_1(X) = 296.85 - 1.874x_1 - 2.911x_2 + 8.939x_3 + 10.936x_4 + 0.0734x_1x_2 - 0.0047 * x_1x_3 - 0.0128x_1x_4 + 0.0563x_2x_3 - 0.0789x_2x_4 - 0.0025x_3x_4 + 0.0108x_1^2 + 0.0089 * x_2^2 - 0.1844x_3^2 - 0.3808 * x_4^2, \qquad (7.12)$$

$$f_4(X) = 19.253 - 0.0081 * x_1 - 0.7005 * x_2 - 0.3605 * x_3 + 0.9769 * x_4 + 0.0126 * x_1 * x_2 + 0.0644 * x_1 * x_3 - 0 * x_1 * x_4 + 0.0396 * x_2 * x_3 + 0.0002 * x_2 * x_4 + 0.0004 * x_3 * x_4 - 0.0016 * x_1^2 + 0.0027 * x_2^2 + 0.0045 * x_3^2 - 0.0235 * x_4^2, \qquad (7.13)$$

Условия неопределенности. Для второй, третьей характеристики известны результаты экспериментальных данных: величины параметров и соответствующих характеристик. Числовые значения параметров X и характеристик $y_2(X)$, $y_3(X)$ представлены в таблице 4.

Таблица 4

Числовые значения параметров и характеристик системы

x_1	x_2	x_3	x_4	$y_2(X) \to min$	$y_3(X) \to max$
22	0	2.2	2.2	1053.8	47.7
22	0	2.2	5.5	1067.0	47.3
22	0	2.2	8.8	1078.0	47.2
22	0	5.5	2.2	1111.0	50.7
22	0	5.5	5.5	1155.0	46.8
22	0	5.5	8.8	1152.8	46.3
22	0	8.8	2.2	1151.7	44.2
22	0	8.8	5.5	1148.4	43.0
22	0	8.8	8.8	1147.3	42.5
22	33	2.2	2.2	1964.6	58.3
22	33	2.2	5.5	1974.5	57.5
22	33	2.2	8.8	1983.3	57.1
22	33	5.5	2.2	1995.4	56.5
22	33	5.5	5.5	2003.1	55.1
22	33	5.5	8.8	2015.2	54.9
22	33	8.8	2.2	2027.3	54.8
22	33	8.8	5.5	2046.0	52.8
22	33	8.8	8.8	2058.1	53.0
22	66	2.2	2.2	2708.2	75.9
22	66	2.2	5.5	2585.0	71.5
22	66	2.2	8.8	2541.0	68.2
22	66	5.5	2.2	2519.0	66.4
22	66	5.5	5.5	2596.0	68.2
22	66	5.5	8.8	2662.0	70.4
22	66	8.8	2.2	2770.9	72.4
22	66	8.8	5.5	2783.0	71.5
22	66	8.8	8.8	2801.7	70.6
55	0	2.2	2.2	3284.6	100.5
55	0	2.2	5.5	3301.1	100.1
55	0	2.2	8.8	3307.7	99.0
55	0	5.5	2.2	3315.4	98.8
55	0	5.5	5.5	3320.9	97.9
55	0	5.5	8.8	3334.1	97.6
55	0	8.8	2.2	3347.3	97.0
55	0	8.8	5.5	3366.0	95.7
55	0	8.8	8.8	3378.1	95.3
55	33	2.2	2.2	1095.6	54.6
55	33	2.2	5.5	1111.0	50.6
55	33	2.2	8.8	1133.0	48.4
55	33	5.5	2.2	1147.3	47.7
55	33	5.5	5.5	1166.0	46.2
55	33	5.5	8.8	1188.0	45.1
55	33	8.8	2.2	1208.9	44.2
55	33	8.8	5.5	1232.0	42.2
55	33	8.8	8.8	1272.7	40.7
55	66	2.2	2.2	1995.4	61.8

55	66	2.2	5.5	2013.0	60.5
55	66	2.2	8.8	2035.0	59.4
55	66	5.5	2.2	2058.1	58.3
55	66	5.5	5.5	2095.5	57.2
55	66	5.5	8.8	2103.2	56.1
55	66	8.8	2.2	2120.8	54.8
55	66	8.8	5.5	2145.0	47.3
55	66	8.8	8.8	2183.5	51.3
88	0	2.2	2.2	2739.0	79.4
88	0	2.2	5.5	2761.0	78.1
88	0	2.2	8.8	2783.0	77.0
88	0	5.5	2.2	2801.7	75.9
88	0	5.5	5.5	2849.0	76.1
88	0	5.5	8.8	2893.0	76.6
88	0	8.8	2.2	2974.4	76.8
88	0	8.8	5.5	2959.0	71.5
88	0	8.8	8.8	2927.1	68.2
88	33	2.2	2.2	3315.4	104.1
88	33	2.2	5.5	3336.3	102.3
88	33	2.2	8.8	3355.0	101.2
88	33	5.5	2.2	3378.1	100.5
88	33	5.5	5.5	3399.0	99.0
88	33	5.5	8.8	3421.0	97.9
88	33	8.8	2.2	3440.8	97.0
88	33	8.8	5.5	3366.0	95.7
88	33	8.8	8.8	3503.5	93.5
88	66	2.2	2.2	1116.5	58.3
88	66	2.2	5.5	1144.0	56.1
88	66	2.2	8.8	1166.0	55.0
88	66	5.5	2.2	1208.9	53.0
88	66	5.5	5.5	1232.0	50.6
88	66	5.5	8.8	1276.0	48.4
88	66	8.8	2.2	1303.5	47.7
88	66	8.8	5.5	1342.0	44.0
88	66	8.8	8.8	1397.0	42.5
Минимальные значения				1053.8	40.7
Максимальные значения				3503.5	104.1
Индекс корреляции				0.7149	0.6551
Коэффицент детерминации				0.5111	0.4292

В принимаемом решении, величину оценки по первой и третьей характеристики (критерия) желательно, получить как можно выше: $f_1(X) \to max\ f_3(X) \to max$; второй и четвертой как можно ниже: $y_2(X) \to min\ f_4(X) \to min$. Параметры $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ изменяются в следующих пределах:

$x_1 \in [22.55.88.], x_2 \in [0.33.66.], x_3 \in [2.2\ 5.5\ 8.8], x_4 \in [2.2\ 5.5\ 8.8]$ (7.14)

Требуется. Построить модель системы в виде векторной задачи. Решить векторную задачу с равнозначными критериями. Выбрать приоритетный критерий. Установить численное значение приоритетного критерия. Принять наилучшее (оптимальное) решение с заданным приоритетом критерия.

Примечание. Автором разработано в системе MATLAB программное обеспечение для решения векторных задач математического программирования. Векторная задача включает четыре переменных (параметров технической системы): X={x_1, x_2, x_3, x_4} и четырьмя критерия (характеристики)

$F(X) = \{f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)\}$. Но для каждых новых данных (новая система) программа настраивается индивидуально. В программном обеспечении критерии $F(X) = \{f_1(X), f_2(X), \ldots, f_6(X)\}$ с условиями неопределенности (в таблице 1 они представлены как часть $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$) могут изменяться от нуля (т.е. все критерии построены в условиях определенности) до шести (т.е. все критерии построены в условиях неопределенности).

7.4.2.2 этап. Построение математической и числовой модели системы в условиях определенности и неопределенности

Создание числовой модели системы включает следующие разделы: Выбор математической модели системы; Построение модели в условиях определенности; Построение в условиях неопределенности; Построение числовой модели системы в условиях определенности и неопределенности.

1). *Математическая модель системы.*

Мы представим модель технической системы в условиях определенности и неопределенности в совокупности:

$$Opt\, F(X) = \{\max F_1(X) = \{\max f_k\,(X), k = \overline{1, K_1^{def}}\}, \qquad (7.15)$$

$$\max I_1(X) \equiv \{\max f_k\,(X_i,\ i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\} \qquad (7.16)$$

$$\min F_2(X) = \{\min f_k\,(X), k = \overline{1, K_2^{def}}, \qquad (7.17)$$

$$\min I_2(X) \equiv \{\min f_k\,(X_i,\ i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}\}, \qquad (7.18)$$

при ограничениях $f_k^{min} \le f_k(X) \le f_k^{max}, k = \overline{1, K}$, $x_j^{min} \le x_j \le x_j^{max}, j = \overline{1, N}$,

(7.19)

где $X = \{x_j,\ j = \overline{1, N}\}$ - вектор управляемых переменных (конструктивных параметров);

$F(X) = \{F_1(X)\ F_2(X) I_1(X), I_2(X)\}$ - векторный критерий, каждая компонента которого представляет вектор критериев (характеристик) технической системы, которые функционально зависят от дискретных значений вектора переменных;

$F_1(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K_1^{def}}\}$, $F_2(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K_2^{def}}\}$ - множество функций *max* и *min* соответственно; $I_1(X) = \{\{f_k(X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}$, $I_2(X) = \{\{f_k(X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_2^{unc}}\}$ - множество матриц *max* и *min* соответственно; (*definiteness*), $K_1^{unc}. K_2^{unc}$ (*uncertainty*) множество критериев *max* и *min* сформированные в условиях определенности и неопределенности;

$g_i(X)$, $i = \overline{1, M}$– вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование системы; они определяются протекающими в технической системе технологическими, физическими и тому подобными процессами;

в (7.19) $f_k^{min} \le f_k(X) \le f_k^{max}, k = \overline{1, K}$ – вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование технической системы;

в (7.19) $x_j^{min} \le x_j \le x_j^{max}, j = \overline{1, N}$ – параметрические ограничения.

Предполагается, что функции $f_k(X), k = \overline{1, K}$ дифференцируемы и выпуклы, $g_i(X)$, $i = \overline{1, M}$ непрерывны, а заданное ограничениями (7.18) множество допустимых точек $\boldsymbol{S}$ не пусто и представляет собой компакт:

$S = \{X \in R^n | G(X) \le 0, X^{min} \le X \le X^{max}\} \neq \emptyset.$

2). *Построение в условиях определенности*

Построение в условиях определенности определяется функциональной зависимостью каждой характеристики и ограничений от параметров технической системы. В нашем примере известны характеристика (7.12), (7.13) и ограничения (7.11). Используя данные (7.11)-(7.13) построим двухкритериальную задачу нелинейного программирования в условиях определенности:

$f_1(X) = 296.85 - 1.874x_1 - 2.911x_2 + 8.939x_3 + 10.936x_4 + 0.0734x_1x_2 - 0.0047x_1x_3 - 0.0128x_1x_4 + 0.0563x_2x_3 - 0.0789x_2x_4 - 0.0025x_3x_4 + 0.0108x_1^2 + 0.0089x_2^2 - 0.1844x_3^2 - 0.3808x_4^2,$ (7.20)

$f_4(X) = 19.253 - 0.0081x_1 - 0.7005x_2 - 0.3605x_3 + 0.9769x_4 + 0.0126x_1x_2 + 0.0644x_1x_3 - 0x_1x_4 + 0.0396x_2x_3 + 0.0002x_2x_4 + 0.0004x_3x_4 - 0.0016x_1^2 + 0.0027x_2^2 + 0.0045x_3^2 - 0.0235x_4^2,$ (7.21)

restrictions: $22 \le x_1 \le 88, 0 \le x_2 \le 66, 2.2 \le x_3 \le 8.8, 2.2 \le x_4 \le 8.8,$ (7.22)

Эти данные в дальнейшем используются при построении математической модели технической системы

3). *Построение в условиях неопределенности*

Построение в условиях неопределенности состоит в использовании качественных и количественных описаний технической системы, полученных по принципу “вход-выход” в таблице 4. Преобразование информации (исходные данные $y_1(X), y_2(X), y_3(X)$ в функциональный вид $f_1(X), f_2(X), f_3(X)$ осуществляется путем использования математических методов (регрессионного анализа).

Исходные данные таблицы 1 сформированы в системе *Matlab* в виде матрицы:

$I = |X, Y| = \{x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4}, y_{i2}, y_{i3}, i = \overline{1, M}\}.$ (7.23)

Для каждого набора экспериментального данных y_k, k=2, 3 строится функция регрессии методом наименьших квадратов $\mathbf{min} \sum_{i=1}^{M}(y_i - \overline{y_i})^2$ в системе MATLAB. Для этого формируется полином A_k, определяющий взаимосвязь параметров $X_i = \{x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4}\}$ и функции $\overline{y_{ki}} = f(X_i, A_k), k = 2, 3$ Результатом является система коэффициентов A_k={A_{0k}, A_{1k}, …, A_{14k}}, которые определяют коэффициенты квадратичного полинома:

$f_k(X, A) = A_{0k} + A_{1k}x_1 + A_{2k}x_2 + A_{3k}x_3 + A_{4k}x_4 + A_{5k}x_1x_2 + A_{6k}x_1x_3 + A_{7k}x_1x_4 + A_{8k}x_2x_3 + A_{9k}x_2x_4 + A_{10k}x_3x_4 + A_{11k}x_1^2 + A_{12k}x_2^2 + A_{13k}x_3^2 + A_{14k}x_4^2, k = 2, 3.$ (7.24)

Функции $f_2(X)$ и $f_3(X)$учетом полученных коэффициентов примут вид:

$f_2(X)$=875.3+23.893*x_1-30.866*x_2-25.858*x_3-45*x_4-0.6984*x_1*x_2+0.4276*x_1*x_3+0.6793*x_1*x_4- $f_2(X) = 875.3 + 23.893x_1 - 30.866x_2 - 25.858x_3 - 45x_4 - 0.6984x_1x_2 + 0.4276x_1x_3 + 0.6793x_1x_4 - 0.1167x_2x_3 + 0.2969x_2x_4 - 0.0093x_3x_4 + 0.0362x_1^2 + 0.0331x_2^2 + 2.9158x_3^2 + 2.4052x_4^2.$ (7.25)

$f_3(X) = 43.734 + 0.6598x_1 + 0.4493x_2 - 0.3094x_3 - 1.8334x_4 - 0.01x_1x_2 - 0.0062x_1x_3 + 0.0146x_1x_4 - 0.013x_2x_3 + 0.0121x_2x_4 - 0.0004x_3x_4 - 0.0003x_1^2 - 0.0002x_2^2 + 00.0254x_3^2 + 0.0939x_4^2.$ (7.26)

Минимальные и максимальные значения экспериментальных данных $y_2(X)$, $y_3(X)$ представлены в нижней части таблицы 4. Минимальные и максимальные значения функций $f_2(X)$, $f_3(X)$ незначительно отличаются от экспериментальных данных. Индекс корреляции и коэффициенты детерминации представлены в нижних строках таблицы 6.1.

Результаты регрессионного анализа (7.25), (7.26) в дальнейшем используются при построении математической модели технической системы.

4). Construction of a numerical model of the system under certainty and uncertainty

Для построения математической модели технической системы используем: функции, полученные условиях определенности (7.20), (7.21) и неопределенности (7.25), (7.26), параметрические ограничения (7.22).

Функции (7.20), (7.21), (7.25), (7.26) рассматриваем как критерии, определяющие целенаправленность функционирования системы. Множество критериев K=4 включают два критерия $f_1(X), f_3(X) \rightarrow$ max и два $f_2(X), f_4(X) \rightarrow min$. В итоге модель функционирования технической системы представим векторной задачей математического программирования:

$opt\ F(X) = \{\max F_1(X) = \{\max f_1(X) \equiv 296.85 - 1.874x_1 - 2.911x_2 + 8.939x_3 + 10.936x_4 + 0.0734x_1x_2 - 0.0047x_1x_3 - 0.0128x_1x_4 + 0.0563x_2x_3 - 0.0789x_2x_4 - 0.0025x_3x_4 + 0.0108x_1^2 + 0.0089x_2^2 - 0.1844x_3^2 - 0.3808x_4^2,$ (7.27)

$\max f_3(X) \equiv 43.734 + 0.6598x_1 + 0.4493x_2 - 0.3094x_3 - 1.8334x_4 - 0.01x_1x_2 - 0.0062x_1x_3 + 0.0146x_1x_4 - 0.013x_2x_3 + 0.0121x_2x_4 - 0.0004x_3x_4 - 0.0003x_1^2 - 0.0002x_2^2 + 00.0254x_3^2 + 0.0939x_4^2\},$ (7.28)

$\min F_1(X) = \{\min f_2(X) \equiv 875.3 + 23.893x_1 - 30.866x_2 - 25.858x_3 - 45 * x_4 - 0.6984x_1x_2 + 0.4276x_1x_3 + 0.6793x_1x_4 - 0.1167x_2x_3 + 0.2969x_2x_4 - 0.0093x_3x_4 + 0.0362x_1^2 + 0.0331x_2^2 + 2.9158x_3^2 + 2.4052x_4^2,$ (7.29)

$\min f_4(X) \equiv 19.253 - 0.0081x_1 - 0.7005x_2 - 0.3605x_3 + 0.9769x_4 + 0.0126x_1x_2 + 0.0644x_1x_3 - 0x_1x_4 + 0.0396x_2x_3 + 0.0002x_2x_4 + 0.0004x_3x_4 - 0.0016x_1^2 + 0.0027x_2^2 + 0.0045x_3^2 - 0.0235x_4^2\}\},$ (7.30)

restrictions: $22 \le x_1 \le 88, 0 \le x_2 \le 66, 2.2 \le x_3 \le 8.8, 2.2 \le x_4 \le 8.8.$ (7.31)

Векторная задача математического программирования (7.27)-(7.31) представляет модель принятия оптимального решения в условиях определенности и неопределенности в совокупности.

7.4.3.3 этап. Решение векторной задачи математического программирования - модели системы с равнозначными критериями

Для решения векторных задач математического программирования (7.27)-(7.31) представлены методы, основанные на аксиоматике нормализации критериев и принципе гарантированного результата, вытекающие из аксиомы 1 и принципа оптимальности 1.

Алгоритм представим в виде ряда шагов.

Шаг 1. Решение задачи (7.26)-(7.30) по каждому критерию отдельно, при этом используется функция *fmincon*(…) системы MATLAB, обращение к функции *fmincon*(…) рассмотрено в [18, 19]. В результате расчета по каждому критерию получаем точки оптимума: X_k^* и $f_k^* = f_k(X_k^*), k = \overline{1, K}$, $\boldsymbol{K}$=4 – величины критериев в этой точке, т. е. наилучшее решение по каждому критерию:

$X_1^* = \{x_1 = 88.0, x_2 = 66.0, x_3 = 8.8, x_4 = 2.2\}, f_1^* = f_1(X_1^*) = -535.06;$

$X_2^* = \{x_1 = 22.0, x_2 = 0.0, x_3 = 2.83, x_4 = 6.25\}, f_2^* = f_2(X_2^*) = 1301.2;$

$X_3^* = \{x_1 = 88.0, x_2 = 0.0, x_3 = 2.2, x_4 = 8.8\}, f_3^* = f_3(X_3^*) = -100.15;$

$X_4^* = \{x_1 = 22.0, x_2 = 62.17, x_3 = 2.2, x_4 = 2.2\}, f_4^* = f_4(X_4^*) = 12.247.$

Ограничения (7.30) и точки оптимума $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$ в координатах $\{x_1, x_2\}$ представлены на рис. 9.

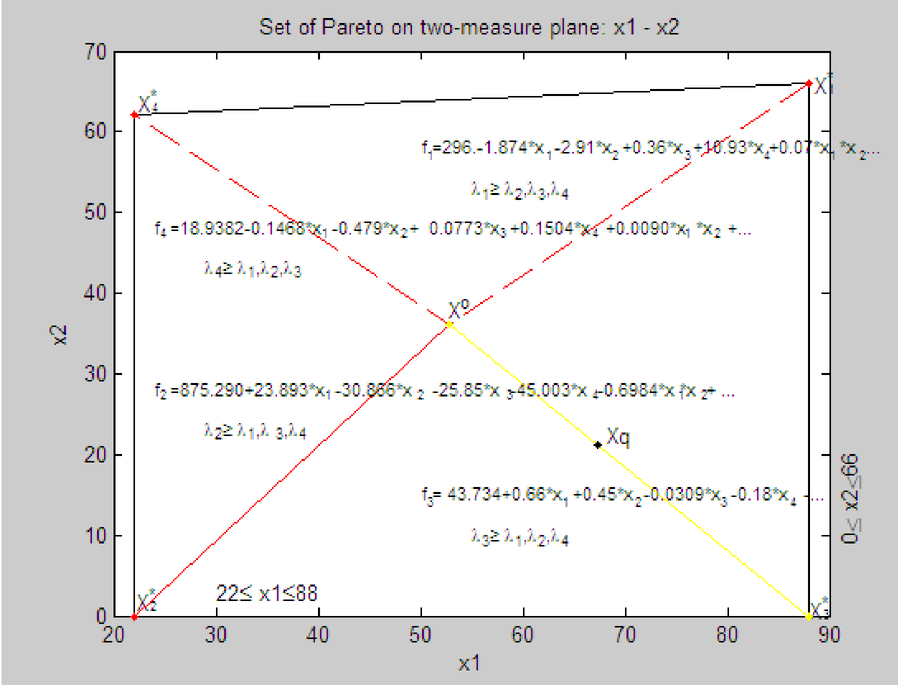

Рис. 9. Множество Парето, $\boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S}$, $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$ в двухмерные системы координат

Шаг 2. Определяем наихудшую величину каждого критерия (антиоптимум)
$f_k^0 = f_k(X_k^0), k = \overline{1,K}$:
$X_1^0 = \{x_1 = 22.0, x_2 = 66.0, x_3 = 2.2, x_4 = 2.2\}, f_1^0 = f_1(X_1^0) = 243.25;$
$X_2^0 = \{x_1 = 88.0, x_2 = 0.0, x_3 = 8.8, x_4 = 8.8\}, f_2^0 = f_2(X_2^0) = -3903.1;$
$X_3^0 = \{x_1 = 22.0, x_2 = 0.0, x_3 = 8.8, x_4 = 8.07\}, f_3^0 = (X_3^0) = 50.03;$
$X_4^0 = \{x_1 = 88.0, x_2 = 66.0, x_3 = 8.8, x_4 = 8.8\}, f_4^0 = f_4(X_4^0) = -121.83.$

Шаг 3. Выполняется системный анализ множества точек, оптимальных по Парето, (т.е. анализ по каждому критерию). В точках оптимума $X^* = \{X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*\}$ определяются величины целевых функций $F(X^*) = \left\|f_q(X_k^*)\right\|_{q=\overline{1,K}}^{k=\overline{1,K}}$, $F = (d_1\ d_2\ d_3\ d_4)^T$- вектор отклонений по каждому критерию на допустимом множестве $\boldsymbol{S}$: $d_k = f_k^* - f_k^0, k = \overline{1,4}$, и матрица относительных оценок

$$\lambda(X^*) = \left\|\lambda_q(X_k^*)\right\|_{q=\overline{1,K}}^{k=\overline{1,K}}, \text{ где } \lambda_k(X) = (f_k^* - f_k^0)/d_k.$$

$$F(X^*) = \begin{Vmatrix} 535.1\ 1731.9\ 58.1\ 117.0 \\ 317.6\ 1301.2\ 51.3\ 26.5 \\ 192.5\ 3614.3\ 100.2\ 24.6 \\ 244.0\ 2458.2\ 67.7\ 12.2 \end{Vmatrix},\ d_k = \begin{Vmatrix} 291.8 \\ -2602.0 \\ 50.12 \\ -109.58 \end{Vmatrix},$$

$$\lambda(X^*) = \begin{Vmatrix} 1.0000\ 0.8345\ 0.1603\ 0.0443 \\ 0.2548\ 1.0000\ 0.0244\ 0.8697 \\ -0.1740\ 0.1110\ 1.0000\ 0.8870 \\ 0.0027\ 0.5553\ 0.3532\ 1.0000 \end{Vmatrix}. \quad (7.32)$$

Анализ величин критериев в относительных оценках показывает, что в точках оптимума $X^* = \{X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*\}$ (по диагонали) относительная оценка равна единице. Остальные критерии значительно меньше единицы. Требуется найти такую точку (параметры), при которых относительные оценки наиболее близки к единице. На решение этой проблемы направлено решение λ-задачи - шаг 4, 5.

Шаг 4. Построение λ-задачи осуществляется в два этапа: первоначально строится максиминная задача оптимизации с нормализованными критериями:

$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{X\in S}\boldsymbol{min}_{k\in K}\lambda_k(X), G(X)\le 0, X \ge 0,$ (7.33)

которая на втором этапе преобразуется в стандартную задачу математического программирования (λ-задача):

$\lambda^o = max\,\lambda,$ (7.34)

При ограничениях $\lambda - \frac{f_1(X)-f_1^0}{f_1^*-f_1^0} \le 0,$ (7.35)

$\lambda - \frac{f_3(X)-f_3^0}{f_3^*-f_3^0} \le 0,$ (7.36)

$\lambda - \frac{f_2(X)-f_2^0}{f_2^*-f_2^0} \le 0,$ (7.37)

$\lambda - \frac{\mathrm{f}_4(X)-\mathrm{f}_4^0}{\mathrm{f}_4^*-\mathrm{f}_4^0} \le 0,$ (7.38)

$0\le\lambda\le 1, 22 \le x_1 \le 88, 0 \le x_2 \le 66, 2.2 \le x_3 \le 8.8, 2.2 \le x_4 \le 8.8,$ (7.39)

где вектор неизвестных имеет размерность *N*+1: $\boldsymbol{X} = \{x_1, \dots, x_N, \lambda\}$; функции $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$ соответствуют (7.34)-(7.36) соответственно. Подставив числовые значения функций $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$, мы получим λ-задачу следующего вида:

$\lambda^o = max\,\lambda,$ (7.40)

at restrictions $\lambda - \frac{296.8-1.874*x1-2.91*x2 \dots -0.184*x_3^2-0.38*x_4^2-f_1^0}{f_1^*-f_1^0} \le 0,$ (7.41)

$\lambda - \frac{43.734+0.6598*x1+0.449*x2- \dots +00.0254*x_3^2+0.0939*x_4^2-f_3^0}{f_3^*-f_3^0} \le 0,$ (7.42)

$\lambda - \frac{875.3+23.9*x1-30.8*x2- \dots +2.9158*x_3^2+2.4052*x_4^2-f_2^0}{f_2^*-f_2^0} \le 0,$ (7.43)

$\lambda - \frac{19.253-0.0081*x1-0.7005*x2- \dots +0.0045*x_3^2-0.0235*x_4^2-f_4^0}{f_4^*-f_4^0} \le 0,$ (7.44)

$0\le\lambda\le 1, 22 \le x_1 \le 88, 0 \le x_2 \le 66, 2.2 \le x_3 \le 8.8, 2.2 \le x_4 \le 8.8,$ (7.45)

[Xo,Lo]=*fmincon*('Z_TehnSist_4Krit_L',X0,Ao,bo,Aeq,beq,lbo,ubo,'Z_TS_LConst',options)

В результате решения ВЗМП (7.27)-(7.31) при равнозначных критериях и соответствующей ей λ-задачи (7.40)-(7.45) получили:

$\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\} = \{X^o = \{x_1 = 52.9, x_2 = 36.097, x_3 = 8.8, x_4 = 2.2, \lambda^o = 0.3179\}$, (7.46)

точку оптимума – конструктивные параметры технической системы, которая представлена на рис. 9;

$f_k(X^o), k = \overline{1,K}$ - величины критериев (характеристик технической системы):

$\{f_1(X^o) = 336.0, f_2(Xo) = 2239.5, f_3(Xo) = 65.962, f_4(Xo) = 58.435\};$ (7.47)

$\lambda_k(X^o), k = \overline{1,K}$ - величины относительных оценок

$\{\lambda_1(X^o) = 0.3179, \lambda_2(X^o) = 0.6394, \lambda_3(X^o) = 0.3179, \lambda_4(X^o) = 0.5785\};$ (7.48)

$\lambda^o = 0.3179$ – это максимальный нижний уровень среди всех относительных оценок, измеренный в относительных единицах:

$\lambda^o = min\,(\lambda_1(X^o), \lambda_2(X^o), \lambda_3(X^o), \lambda_4(X^o)) = 0.3179.$

λ^o – так же называют гарантированным результатом в относительных единицах, т. е. $\lambda_k(X^o)$ и соответственно характеристики технической системы $f_k(X^o)$ нельзя улучшить, не ухудшая при этом другие характеристики.

Заметим, что в соответствии с теоремой с 1, в точке $\boldsymbol{X^o}$ критерии 1 и 3 противоречивы. Это противоречие определяется равенством $\lambda_1(X^o) = \lambda_3(X^o) = \lambda^o = 0.3179$,, а остальные критерии неравенством $\{\lambda_2(X^o) = 0.6394, \lambda_4(X^o) = 0.5785\} > \lambda^o$.

Таким образом, теорема 1 служит основой для определения правильности решения векторной задачи. В векторной задаче математического программирования, как правило, для двух критериев выполняется равенство: $\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_p(X^o),\ q, p \in \boldsymbol{K}, X \in S$,, (в нашем примере такие критерии первый и третий). А для других критериев определяется как неравенство.

7.4.4.Stage 4. Creation of geometrical interpretation of results of the decision in a three-dimensional coordinate system in relative units

В допустимом множестве точек $\boldsymbol{S}$, образованных ограничениями (7.44), точки оптимума X_1^* , X_2^*, X_3^* , X_4^* , объединенных в контур, представляют множество точек, оптимальных по Парето, $\boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$, представлен на рис 9. Координаты этих точек, а также характеристики технической системы в относительных единицах $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3, \lambda_4(X)$ показаны на рис. 10 в трех мерном пространстве $x_1\ x_2$ и λ, где третья ось λ - относительная оценка.

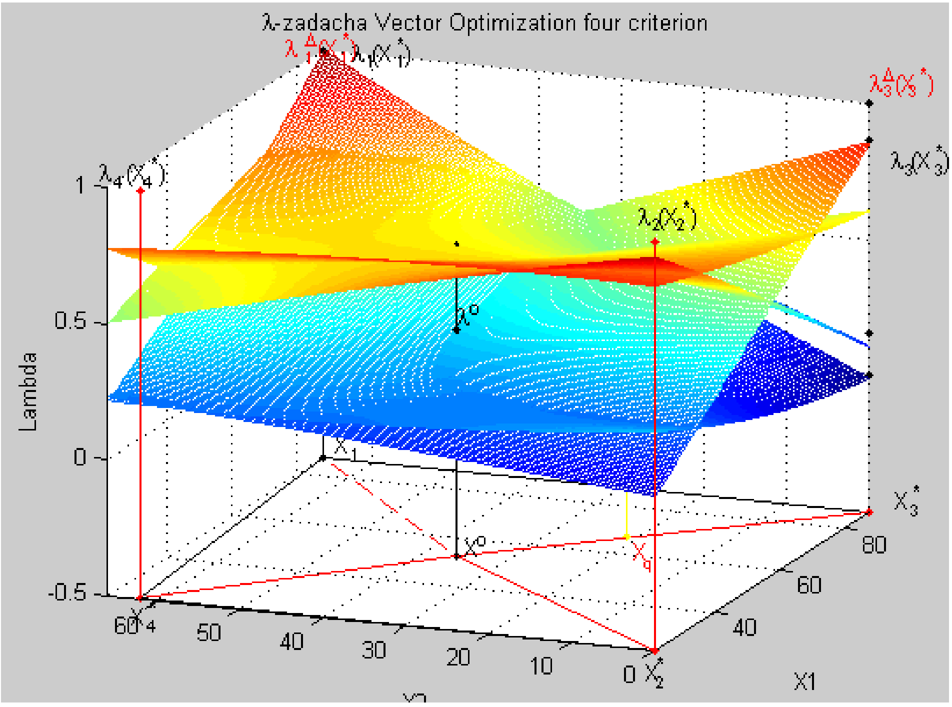

Рис. 10. Решение λ-задачи в трехмерных координатах $x_1\ x_2$ и λ

Discussion. Глядя на рисунок 10, мы можем представить изменения всех функций $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3(X), \lambda_4(X)$ в четырехмерном пространстве.

Рассмотрим, например, оптимальную точку X_3^*. Функция $\lambda_3(X)$ сформирована из функции $f_3(X)$с переменными координатами $\{x_1\ x_2\}$ и с постоянными координатами $\{x_3=8.8, x_4=2.2\}$, взятые из оптимальной точки X^o (7.45). В точке X_3^* относительная оценка $\lambda_3(X_3^*) = 0.83$ – показана на рис. 10 черной точкой. Но мы знаем, что относительная оценка $\lambda_3(X_3^*)$ полученная из функции $f_3(X_3^*)$ на третьем шаге равна единице, обозначим ее как $\lambda_3^\Delta(X_3^*) = 1$ – показана на рис. 10 красной точкой.

Разность между $\lambda_3^\Delta(X_3^*) = 1$ и $\lambda_3(X_3^*) = 0.83$ является ошибкой Δ= 0.17 перехода от четырех мерной (а в общем случае N-мерной) к двухмерной области. Аналогично показана точка X_1^* и соответствующие относительные оценки $\lambda_1(X_1^*)$ и $\lambda_1^\Delta(X_1^*)$.

Таким образом, впервые в отечественной и зарубежной практике показан переход и его геометрическая иллюстрация от N-мерного к двухмерному измерению функции в векторных задачах математического программирования с соответствующими ошибками.

7.4.5.Stage 5. Решение задачи векторной оптимизации с приоритетом критерия

Лицом, принимающим решения, как правило, является конструктор системы**.**

Шаг 1. Решение векторной задачи при равнозначных критериях. Алгоритм решения векторной задачи представлен на стадии 3. Численные результаты решения векторной задачи представлены выше.

Множество точек, оптимальных по Парето $\boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$ находится между оптимальными точками $X_1^* \, X^o \, X_3^* \, X^o \, X_4^* \, X^o \, X_2^* \, X^o \, X_1^*$. Мы проведем анализ множества точек Парето $\boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$. Для этой цели мы соединим вспомогательные точки: $X_1^* \, X_3^* \, X_4^* \, X_2^* \, X_1^*$с точкой X^o, которая условно представляет центр множества Парето. В результате получили четыре подмножеств точек $X \in \boldsymbol{S_q^o} \subset \boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}, q = \overline{1,4}$. Подмножество $\boldsymbol{S_1^o} \subset \boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$ характеризуется тем, что относительная оценка $\lambda_1 \geq \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, λ_4, то есть в поле первого критерия $\boldsymbol{S_1^o}$ имеет приоритет над остальными. Подобно $\boldsymbol{S_2^o}, \boldsymbol{S_3^o}, \boldsymbol{S_4^o}$- подмножества точек, где второй, третий и четвертый критерий имеет приоритет над другими соответственно. Множество точек, оптимальных по Парето, будем обозначать $\boldsymbol{S^o} = \boldsymbol{S_1^o} \cup \boldsymbol{S_2^o} \cup \boldsymbol{S_3^o} \cup \boldsymbol{S_4^o}$. Координаты всех полученных точек и относительные оценки представлены в двумерном пространстве $\{x_1 \; x_2\}$ на рис. 9. Эти координаты показаны в трех измеренных пространствах $\{x_1 \; x_2 \; \lambda\}$ на рис. 10, где третья ось λ-относительная оценка.

Ограничения набора точек, оптимальных по Парето, на рис. 10 он снижен до -0,5 (чтобы были видимы ограничения). Эта информация также является основой для дальнейшего исследования структуры множества Парето. Лицо, принимающее решения, как правило, является разработчиком системы.

Если результаты решения векторной задачи с равнозначными критериями не удовлетворяют лицо, принимающее решение, то выбор оптимального решения осуществляется из какого-либо подмножества точек $\boldsymbol{S_1^o}, \boldsymbol{S_2^o}, \boldsymbol{S_3^o}, \boldsymbol{S_4^o}$. Эти подмножества точек Парето показаны на рис. 9 в виде функций $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$.

Шаг 2. Выбор приоритетного критерия $q \in \boldsymbol{K}$.

Из теории известно, что в оптимальной точке X^o всегда имеется два наиболее противоречивых критерия, $q \in \boldsymbol{K}$ и $p \in \boldsymbol{K}$, для которых в относительных единицах выполняется точное равенство:

$\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_p(X^o), q, p \in \boldsymbol{K}, X \in \boldsymbol{S}$,

а для остальных выполняется неравенства:

$\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), \forall k \in \boldsymbol{K}, \; q \neq p \neq k$.

В модели ТС (7.26)-(7.30) и соответствующей λ-задачи (7.39)-(7.44) такими критериями являются первый и третий:

$$\lambda^o = \lambda_1(X^o) = \lambda_3(X^o) = 03179, \tag{7.48}$$

т.е. выполняется числовая симметрия.

Эту симметрию покажем на рис. 11, где представлены функции $\lambda_1(X)$ и $\lambda_3(X)$ отдельно со стороны оптимальной точки $\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\}$.

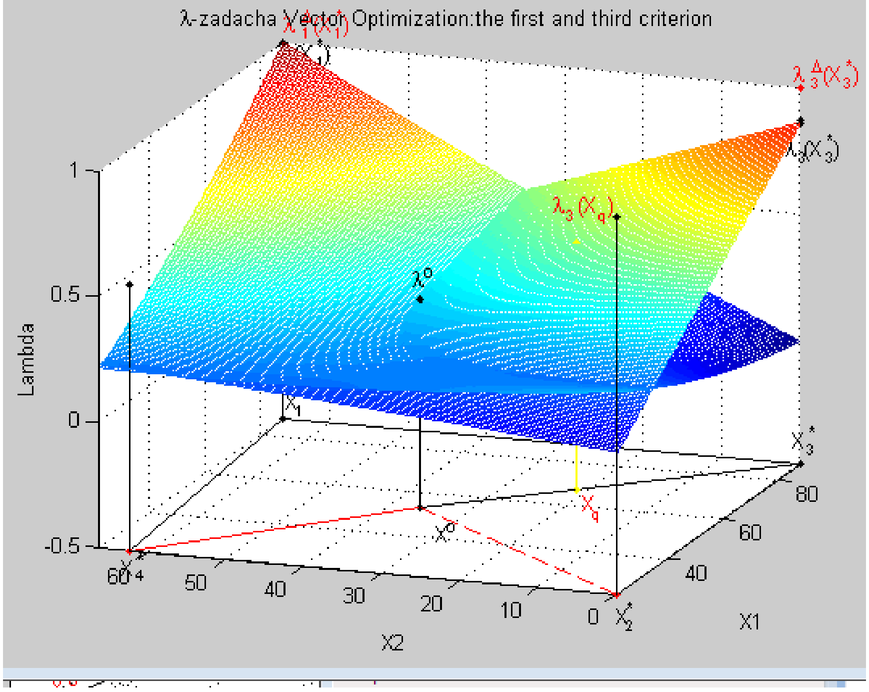

Figure 11. The solution of λ-problem (1, 3 criterion)
in three-dimensional system of coordinates of x_1, x_2 and λ

Здесь же показаны все точки и данные, о которых говорилось на рис. 10.

Как правило, из этой пары противоречивых критериев выбирается критерий, который ЛПР хотел бы улучшить. Такой критерий называется «приоритетным критерием», обозначим его $q = 3 \in \boldsymbol{K}$. Этот критерий исследуется во взаимодействии с первым критерием $q = 1 \in \boldsymbol{K}$. Мы исследуем эти два критерия из всего множества критериев $\boldsymbol{K} = 4$, показанных на рис. 11.

На дисплей выдается сообщение:

q=input('Введите приоритетный критерий (номер) q= ') – Ввели критерий q=3.

Шаг 3. Определяются числовые пределы изменения величины приоритета критерия $q = 3 \in \boldsymbol{K}$. Для приоритетного критерия $q = 3 \in \boldsymbol{K}$ определяются изменения числовых пределов в натуральных единицах при переходе из точки оптимума X^o (7.46) в точку X_q^*, полученную на первом шаге. Данные о критерии q=3 выдаются на экран:

$$f_q(X^o) = 65.96 \leq f_q(X) \leq 100.15 = f_q(X_q^*), q \in \boldsymbol{K}. \quad (7.49)$$

В относительных единицах критерий $q=3$ изменяется в следующих пределах:

$$\lambda_q(X^o) = 0.3179 \leq \lambda_q(X) \leq 1 = \lambda_q(X_q^*), q = 3 \in \boldsymbol{K}.$$

Эти данные анализируется.

Шаг 4. Выбор величины приоритетного критерия $q \in \boldsymbol{K}$. (Decision-making).

На сообщение: «Введите величину приоритетного критерия *fq*=» - вводим, например, $f_q = 80$.

Шаг 5. *Вычисляется относительная оценка.*

Для выбранной величины приоритетного критерия $f_q = 80$ вычисляется относительная оценка:

$$\lambda_q = \frac{f_q - f_q^0}{f_q^* - f_q^0} = \frac{80 - 50.03}{10.15 - 50.03} = 0.5979, \quad (7.50)$$

которая при переходе от точки X^o к точке X_q^* лежит в пределах:

$$0.3179 = \lambda_3(X^o) \leq \lambda_3 = 0.5979 \leq \lambda_3(X_3^*) = 1, q \in \boldsymbol{K}.$$

Шаг 6. Вычислим коэффициент линейной аппроксимации

Предполагая линейный характер изменения критерия $f_q(X)$ в (7.49) и соответственно относительной оценки λ_q в (7.50), используя стандартные приемы линейной аппроксимации, вычислим коэффициент пропорциональности между $\lambda_q(X^o)$, λ_q, который назовем ρ:

$$\rho = \frac{\lambda_q - \lambda_q(X^o)}{\lambda_q(X_q^*) - \lambda_q(X^o)} = \frac{0.5979 - 0.3179}{1 - 0.3179} = 0.4106, q = 3 \in \boldsymbol{K}. \qquad (7.51)$$

Шаг 7. Вычислим координаты приоритета критериев с размерностью f_q.

Предполагая линейный характер изменения вектора $X^q = \{x_1 \quad x_2\}$, q=3 определим координаты для точки с размерностью fq =80 с относительной оценкой (7.50):

$$x_{\lambda=0.81}^{q=3} = \{x_1 = X^o(1) + \rho(X_q^*(1) - X^o(1)), x_2 = X^o(2) + \rho(X_q^*(2) - X^o(2))\}, \quad (7.52)$$

где $X^o = \{X^o(1) = 80.0, X^o(2) = 69.11\}, X_3^* = \{X_3^*(1) = 80.0, X_3^*(2) = 0.0\}$.

Как результат решения мы получим точку с координатами:

$X^q = \{x_1 = 67.31, x_2 = 21.27\}$.

Шаг 8. Вычисление главных показателей точки X^q.

Для полученной точки X^q, вычислим:

все критерии в натуральных единицах $f_k(X^q) = \{f_k(X^q), k = \overline{1,K}\}$,

$f(X^q) = \{f_1(X^q) = 313.45, f_2(X^q) = 2575.7, f_3(X^q) = 74.2, f_4(X^q) = 60.6\}$;

все относительные оценки критериев:

$\lambda^q = \{\lambda_k^q, k = \overline{1,K}\}$, $\lambda_k(X^q) = \frac{f_k(X^q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1,K}$:

$\lambda_k(X^q) = \{\lambda_1(X^q) = 0.2405, \lambda_2(X^q) = 0.5102, \lambda_3(X^q) = 0.4825, \lambda_4(X^q) = 0.5586\}$;

минимальная относительная оценка: $\min\lambda(X^q) = \min_{k\in K}(\lambda_k(X^q)) = 0.2405$.

вектор приоритетов $P^q(X) = \{p_k^q = \frac{\lambda_q(X^q)}{\lambda_k(X^q)}, k = \overline{1,K}\}$:

$P^q = [p_1^3 = 2.0061, p_2^3 = 0.9458, p_3^3 = 1.0, p_4^3 = 0.8637]$;

минимальная относительная оценка:

$$\lambda^{oo} = \min(p_1^3\lambda_1(X^q), p_2^3\lambda_2(X^q), p_3^3\lambda_3(X^q), p_4^3\lambda_4(X^q)) = 0.4825$$

Аналогично другие точки из области Парето $\boldsymbol{X_t^o} = \{\lambda_t^o, X_t^o\} \in \boldsymbol{S^o}$ могут быть получены.

Анализ результатов. Рассчитанная величина $f_q(X_t^o) = 74.2, q = 3 \in \boldsymbol{K}, q \in \boldsymbol{K}$ обычно не равна заданной $f_q = 80$. Ошибка выбора $\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q| = |74.2 - 80| = 5.8$ определяется ошибкой линейной аппроксимации: $\Delta f_{q\%} = 7.25\%$.

Если ошибка $\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q| = |74.2 - 80| = 5.8$, измеренная в натуральных единицах или в процентах $\Delta f_{q\%} = \frac{\Delta f_q}{f_q} * 100 = 7.25\%$, больше заданной $\Delta f, \Delta f_q > \Delta f$, то переходим к шагу 2, если $\Delta f_q \leq \Delta f$, то вычисления завершаются. *Конец*.

В процессе моделирования могут быть изменены параметрические ограничения (7.44) и функции, т. е. получено некоторое множество оптимальных решений. Из этого множества оптимальных решений выбираем окончательный вариант (процесс принятия решений).

В нашем примере окончательный вариант включает параметры:

$\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\} = \{X^o = \{x_1 = 52.9, x_2 = 36.097, x_3 = 8.8, x_4 = 2.2, \lambda^o = 0.3179\}$;

параметры технической системы при заданном приоритете критерия:

q=3: $X^q = \{x_1 = 67.31, x_2 = 21.27\}$.

7.4.6.Stage 6. Geometrical interpretation of results of the decision in a three-dimensional coordinate system in physical units.

Мы представили параметры:

$$\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\} = \{X^o = \{x_1 = 52.9, x_2 = 36.097, x_3 = 8.8, x_4 = 2.2, \lambda^o = 0.3179\}$$

в двухмерной системе координат x_1, x_2 Рис.10, трехмерной системе координат x_1, x_2 и λ на рис. 11. Мы также представим эти параметры в физических единицах для каждой характеристики технической системы (критерия): $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$..

Первая характеристика технической системы $f_1(X)$ в координатах x_1, x_2 представлена на рис. 12. Аналогично эта же характеристика в относительных единицах $\lambda_1(X)$ показана на рис. 13.

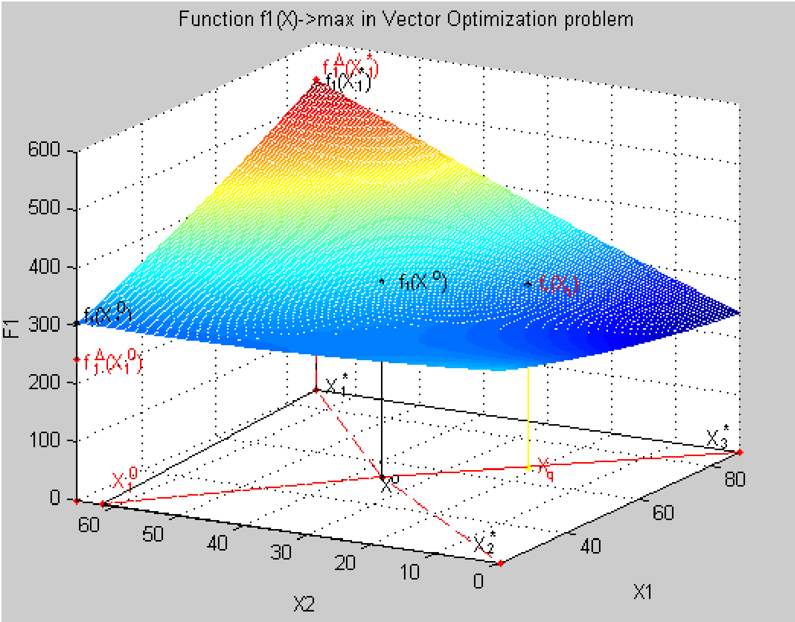

Рис. 12. Первая характеристики $f_1(X)$технической системы в натуральных показателях в x_1, x_2 координатах

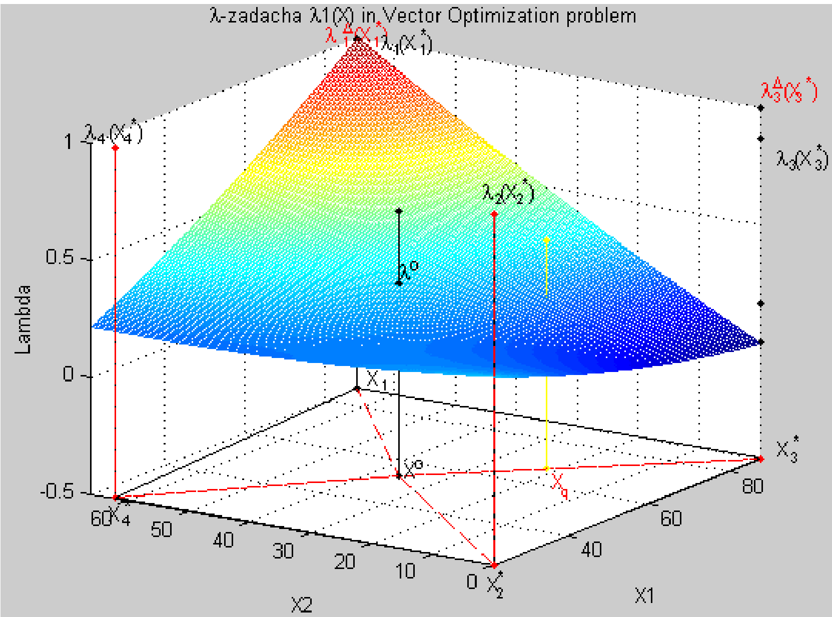

Рис. 13. Первая характеристики $\lambda_1(X)$ технической системы в относительных единицах в x_1, x_2 координатах

Показатели первой $f_1^{\Delta}(X_1^*)$, $f_1^{\Delta}(X_1^o)$ характеристикb технической системы (выделены красным цветом) определяют ошибки перехода от четырехмерной $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ к двухмерной $X^o = \{x_1, x_2\}$ системе координат;

Вторая характеристика $f_2(X)$ в координатах x_1, x_2 представлена на рис. 14. Аналогично эта же характеристика в относительных единицах $\lambda_2(X)$ показана на рис. 15.

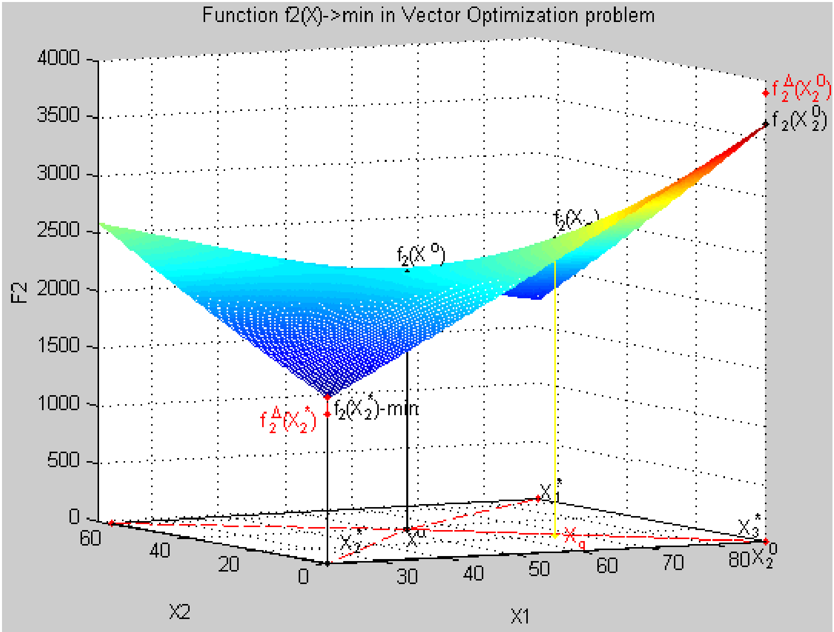

Рис. 14. Вторая характеристики $f_2(X)$ технической системы в натуральных показателях в x_1, x_2 координатах

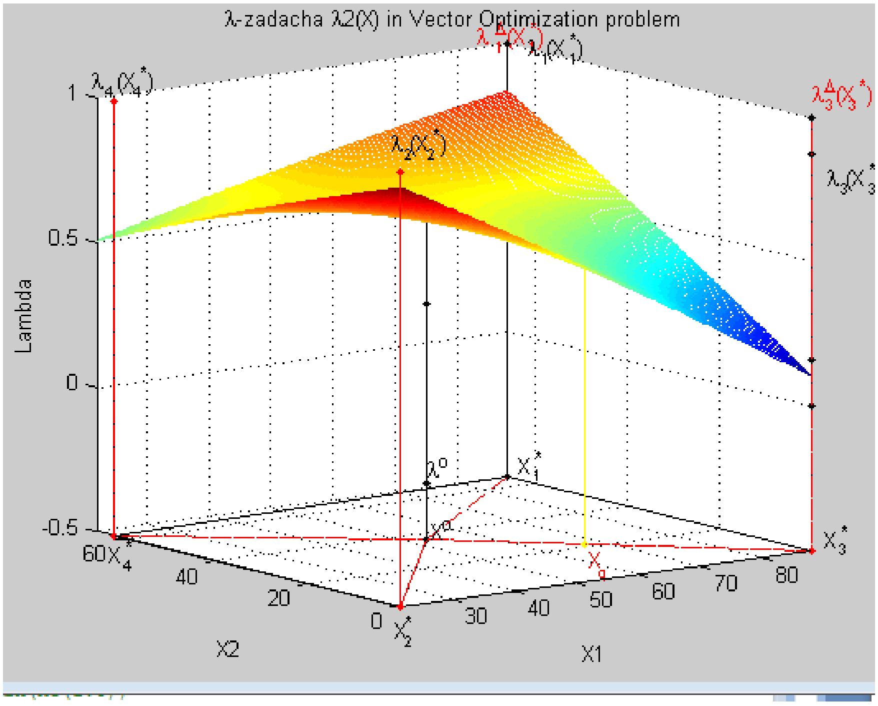

Рис. 15. Вторая характеристики $\lambda_2(X)$технической системы в относительных единицах в x_1, x_2 координатах

Показатели второй $f_2^{\Delta}(X_2^*)$, $f_2^{\Delta}(X_2^o)$характеристик технической системы (выделены красным цветом) определяют ошибки перехода от четырехмерной $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ к двухмерной X^o=$\{x_1, x_2\}$ системе координат;

Обратим внимание на то, что в первой характеристике $f_1(X) \rightarrow max$ выпуклость в физических $f_1(X)$ и относительных единицах $\lambda_1(X)$ совпадают; во второй характеристике $f_2(X) \rightarrow min$ выпуклость в физических $f_2(X)$ и относительных единицах $\lambda_2(X)$ не совпадают. Поэтому в λ-задаче все $\{\lambda_1(X), \ldots, \lambda_4(X)\} \rightarrow max$.

Третья характеристика $f_3(X)$ в координатах x_1, x_2 представлена на рис. 16. Аналогично эта же характеристика в относительных единицах $\lambda_3(X)$ показана на рис. 17.

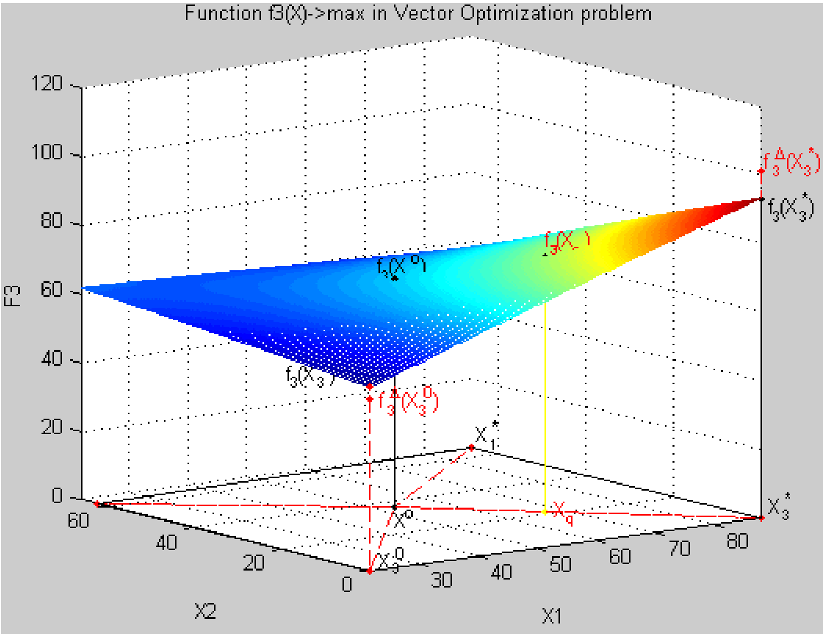

Рис. 16. Третья характеристики $f_3(X)$ технической системы в натуральных показателях в x_1, x_2 координатах

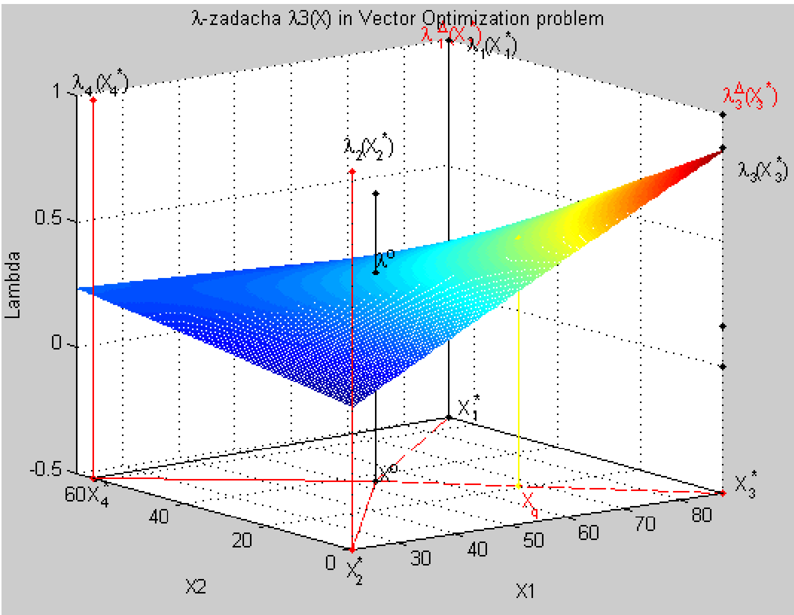

Рис. 17. Третья характеристики $\lambda_3(X)$технической системы в относительных единицах в x_1, x_2 координатах

Четвертая характеристика $f_4(X)$ в координатах x_1, x_2 представлена на рис. 18. Аналогично эта же характеристика в относительных единицах $\lambda_4(X)$ показана на рис. 19.

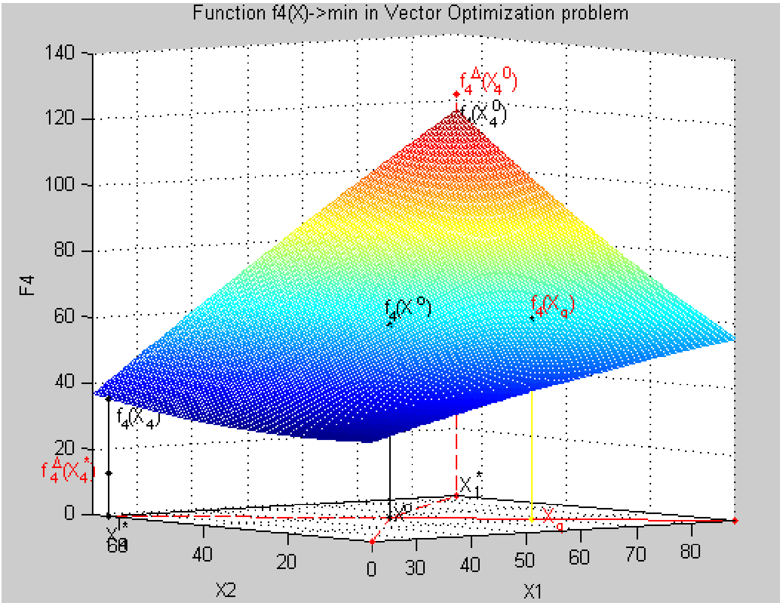

Рис. 18. Четвертая характеристики $f_4(X)$технической системы
в натуральных показателях в x_1, x_2 координатах

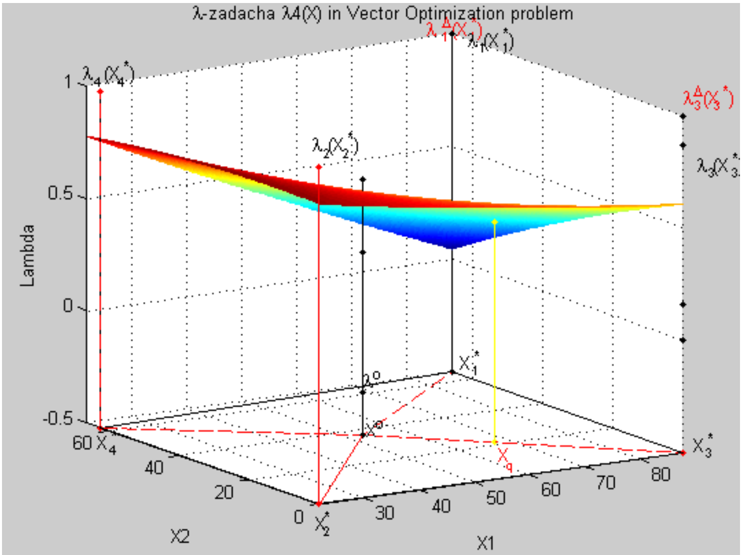

Рис. 19. Четвертая характеристики $\lambda_4(X)$ технической системы
в относительных единицах в x_1, x_2 координатах

Показатели третьей $f_3^\Delta(X_3^*)$, $f_3^\Delta(X_3^o)$ и четвертой $f_4^\Delta(X_4^*)$, $f_4^\Delta(X_4^o)$ характеристик технической системы (выделены красным цветом) определяют ошибки перехода от четырехмерной $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ к двухмерной X^o={x_1, x_2} системе координат;

В совокупности, представлена версия:

• point - X^o; characteristics of $F(X^o) = \{f_1(X^o), f_2(X^o), f_3(X^o), f_4(X^o)\}$;

• relative estimates of $\lambda(X^o) = \{\lambda_1(X^o), \lambda_2(X^o), \lambda_3(X^o), \lambda_4(X^o)\}$;

• maximum λ^o relative level such that $\lambda^o \leq \lambda_k(X^o)\ \forall k \in \boldsymbol{K}$ - there is an optimum decision at equivalent criteria (characteristics), and procedure of receiving is adoption of the optimum decision at equivalent criteria (characteristics).

• point – X^q; characteristics of $F(X^q) = \{f_1(X^q), f_2(X^q), f_3(X^q), f_4(X^q)\}$;

• relative estimates of $\lambda(X^o) = \{\lambda_1(X^q), \lambda_2(X^q), \lambda_3(X^q), \lambda_4(X^q)\}$;

• maximum λ^{oo} relative level such that $\lambda^{oo} \leq p_k^q \lambda_k(X^q), k = \overline{1, K}$ - there is an optimal solution at the set priority of the qth criterion (characteristic) in relation to other criteria. Procedure of receiving a point is X^q adoption of the optimal solution at the set priority of the second criterion.

Заключение по главе. Проблема разработки математических методов векторной оптимизации и принятия оптимального решения на их основе в сложной технической системе по некоторому набору экспериментальных данных и функциональных характеристик является одной из важнейших задач системного анализа и проектирования. В работе разработана методология автоматизации проектирования путем: во-первых, построения математической модели технической системы в условиях определенности и неопределенности в виде векторной задачи математического программирования; во-вторых, разработки аксиоматики и методов решения векторной задачи. Практика "принятия оптимального решения" на основе математической модели технической системы показана на численном примере решения векторной задачи оптимизации.

Conclusions.

1. Мы представили аксиоматику и теорию векторной оптимизации и методы для выбора любой точки, из множества Парето. В теории показаны принципы оптимальности точки при равнозначных критериях и при заданном приоритете критерия. На основе теории разработаны конструктивные методы решения задач векторной оптимизации, которые позволяют принимать решение, во-первых, при равнозначных критериях, во-вторых, при заданном приоритете критерия.

2. Сформированные конструктивные методы решения векторных задач математического (выпуклого) программирования, используя экспериментальные данные, могут использоваться при проектировании технических систем различных отраслей: электротехнической, авиационно-космической, металлургической и т.п.

Данная методология решения векторных задач имеет системный характер и может использоваться при моделировании как технических, так и экономических систем, сохраняя элементы симметрии. Автор готов участвовать в решении векторных задач линейного и нелинейного программирования. Mashunin@mail.ru

Список литературы:

1. Pareto V. Cours d'Economie Politique. Lausanne: Rouge, 1896.
2. Математическая энциклопедия. Редакционная коллегия: И.М. Виноградов и другие. - М.: «Советская энциклопедия», 1977. – 1152 с.
3. Carlin S. Mathematical methods in a game theory, programming and economy. - M.: World, 1964, p. 837.
4. Zak Yu. A. Multi-stage decision-making processes in the problem of vector optimization // A.iT. 1976. No. 6, pp. 41-45.
5. Mikhailevich V. S., Volkovich V. L. Computational methods of research and design of complex systems. M.: Science, 1979, p. 319.
6. Машунин Ю.К. Методы и модели векторной оптимизации. М.: Наука, 1986. 141 с.
7. Машунин Ю. К. , Левицкий В. Л. Методы векторной оптимизации в анализе и синтезе технических систем: монография. - Владивосток: ДВГАЭУ, 1996. 131 с.
8. Машунин Ю.К. Решение композиционных и декомпозиционных задач синтеза сложных технических систем методами векторной оптимизации//Изв. РАН. ТиСУ. 1999. №3. С. 88-93.

9. Yu. K. Mashunin, “Solving composition and decomposition problems of synthesis of complex engineering systems by vector_optimization methods,” Comput. Syst. Sci. Int. 38, 421 (1999). (Scopus)

10. Машунин Ю.К., Машунин К.Ю. Моделирование технических систем в условиях неопределенности и принятие оптимального решения //Изв. РАН. ТиСУ. 2013. №4. С. 19-35.

11. Mashunin K. Yu., and Mashunin Yu. K. Simulation Engineering Systems under Uncertainty and Optimal Descision Making. Journal of Comput. Syst. Sci. Int. Vol. 52. No. 4. 2013. 519-534. (Scopus)

12. Машунин Ю.К. Теория управления. Математический аппарат управления в экономических системах. – М.: Логос. 2013. 448 с. (Новая университетская библиотека)

13. Mashunin Yu.K. Mashunin K.Yu. Modeling of technical systems on the basis of vector optimization (1. At equivalent criteria) / International Journal of Engineering Sciences & Research Technology. 3(9): September, 2014. P. 84-96 .

14. Mashunin Yu.K. Mashunin K.Yu. Modeling of technical systems on the basis of vector optimization (2. with a Criterion Priority) / International Journal of Engineering Sciences & Research Technology. 3(10): October, 2014. P. 224-240.

15. Yu. K. Mashunin, K. Yu. Mashunin. Simulation and Optimal Decision Making the Design of Technical Systems // American Journal of Modeling and Optimization. 2015. Vol. 3. No 3, 56-67.

16. Yu. K. Mashunin, K. Yu. Mashunin. Simulation and Optimal Decision Making the Design of Technical Systems (2. The Decision with a Criterion Priority) // American Journal of Modeling and Optimization. 2016. Vol. 4. No 2, 51-66.

17. Yu. K. Mashunin. Methodology of the Choice of Optimum Parameters of Technological Process on Experimental to Data. *American Journal of Modeling and Optimization*, vol. 7, no. 1 (2019): 20-28. doi: 10.12691/ajmo-7-1-4.

18. Yu. K. Mashunin. Vector optimization in the system optimal Decision Making the Design in economic and technical systems // International Journal of Emerging Trends & Technology in Computer Science. 2017. Vol. 7. No 1, 42-57.

19. Mashunin, Yu. K, Optimal designing in the interrelation Technical system – Materials (Theory) // Mathematical methods in engineering and technology: proceedings of international. Science. Conf.: 12 tons 4 /under General Ed. A. A. Bolshakova. –SPb.: Publishing house of Polytechnical Institute. Un-t, 2018. P. 40-46.

20. Yu. K. Mashunin. Concept of Technical Systems Optimum Designing (Mathematical and Organizational Statement)// International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2017 Proceedings 8076394. Saint Petersburg. Russia/ WOS: 000414282400287 ISBN:978-1-5090-5648-4. (Web of science)

21. Yu. K. Mashunin. Optimum Designing of the Technical Systems Concept (Numerical Realization) // International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2017 Proceedings 8076395. Saint Petersburg. Russia/ WOS: 000414282400288 ISBN:978-1-5090-5648-4. (Web of science)

22. Mashunin K. Yu., and Mashunin Yu. K. Vector Optimization with Equivalent and Priority Criteria. Journal of Comput. Syst. Sci. Int., 2017, Vol. 56. No. 6. pp. 975-996. https://rdcu.be/bhZ8i (Scopus)

23. Mashunin Yu.K. Mathematical Apparatus of Optimal Decision-Making Based on Vector Optimization,” Appl. Syst. Innov. 2019, 2, 32. https://doi.org/10.3390/asi2040032

24. Mashunin Yu.K. Theory and Methods Vector Optimization (Volume One), Cambridge Scholars Publishing. 2020, 183 p. ISBN (10): 1-5275-4831-7

25. Торгашов А.Ю., Кривошеев В.П., Машунин Ю.К., Холланд Ч.Д. Расчет и многокритериальная оптимизация статических режимов массообменных процессов на примере абсорбции в производстве газоразделения // Изв. ВУЗов. Нефть и газ, 2001, №3, с. 82-86.

26. Кетков Ю. Л., Кетков А.Ю., Шульц М. М. МАТЛАБ 6.х.: программирование численных методов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. - 672 с.

27. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения: Пер. с англ./Под ред. И. Ф. Шахнова. - М.: Радио и связь, 1981. – 560 с.

28. Jahn Johannes. Vector Optimization: Theory, Applications, and Extensions. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York. 2010. 460 p.

29. Qamrul Hasan Ansari, Jen-Chih Yao. Recent Developments in Vector Optimization. Springer Heidelberg Dordrecht. London. New York. 2010. 550 p.

30. Nakayama Hirotaka, Yun Yeboon, Yoon Min. Sequential Approximate Multiobjective Optimization Using Computational Intelligence. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg . 2009. 197 p.

31. Shankar R. Decision Making in the Manufacturing Environment: Using Graft Theory and fuzzy Multiple Attribute Decision Making Methods. Springer; 2007. 373 p.

32. Cooke T., Lingard H., Blismas N. The development end evaluation of a decision support tool for health and safety in construction design // Engineering, Construction and Architectural Management. 2008. V. 15. №4. P. 336-351.

33. Walras L. 1874. Elements of Pure Economies , or the theory of social wealth, Lau-sanne.

34. Samuelson P. 1964. Economics. Part 1. -M: Progress.

35. Marshall A. 1993. Principles of economic science. Tom 2. -M: Progress, 145 p.

36. Coase, Ronald. The Institutional Structure of Production // The American Economic Re-view, vol.82, n°4, pp. 713-719, 1992. (Nobel Prize lecture) Gilbert, J., 1976. Economic theory and goals of the society. - M: Progress. - 230 p.

37. Saimone, G., 1995. Theory of decision making in economic theory and the behav-ioral Sciences. // In the book: The theory of the firm. St. Petersburg.

38. Seo, K.K., 2000. Managerial Economics: Text, Problems, and Short cases. Per. from English. - M: INFA-M. - 671 p.

39. Khan K. 2004. Controlling. - M: INFA-M. - 671 p.

40. Fayol A. (1992). General and industrial management. - M: Controlling.

41. Mashunin Yu. K., 2010. Theory and modeling of the market on the basis of vector optimization. - M: University book. - 352 p.

42. Mashunin, Yu. K., Mashunin, K., Yu. Numerical realization of innovative development of the industrial enterprise//Global challenges in economy and development of the industry (INDUSTRY-2016): proceedings of scientific – practical Konf. with foreign participation on March 21-23 2016/under the editorship of the Dr. of economic Sciences, prof. A. V. Babkin. – SPb.: Publishing house Politekhn. University, 2016. 455-484. (rus.).

43. Mashunin, Yu. K., 2016. Modeling and software implementation of innovative development of the industrial enterprise. St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Economics, no. 3(245), pp. 78-92. (rus.)

44. Mashunin, Yu. K., Mashunin, K., Yu., 2017. Analysis of the organization of control, optimization and practice of innovative development of the industrial cluster, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Economics, 10(4), 187-197. DOI: 10.18721/JE. 10418

45. Mashunin, Yu. K., 2017. Management of the region economy. M: RuScience. - 344. (rus) ISBN 978-5-4365-1984-5

46. Mashunin Yu. K., K. Yu. Mashunin, Strategic and Innovative Development of the Cluster based on the digital economy, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Economics, 11 (4) (2018) 85—99. DOI: 10.18721/JE.11406

47. Mashunin, Yu. K., 2019. Theory of management and the practice of making managerial decisions: textbook. - Moscow: RuScience. – 494 p. (rus) ISBN 978-5-4365-3088-8

48. Машунин Ю.К. Теория и методы принятия оптимальных решений по множеству критериев в инженерных системах : монография / Ю.К. Машунин. - Москва: РУСАЙНС, 2023, - 340 с. ISBN 978-5-466-04638-0

49. Mashunin, Yu. K. Theory, applied mathematics and software for optimal decisions making on a set of criteria in engineering systems : monograph / Yu.K. Mashunin. Moscow : RuScience, 2024, - 260 с. ISBN 978-5-466-05940-3