DOI 10.58351/2949-2041.2024.11.6.025

Машунин Юрий Константинович
Доктор экономических наук, доцент, профессор кафедры
«Государственного и муниципального управления»
Дальневосточного Федерального университета
Mashunin Yury Konstantinovich, Doctor of Economics, associate professor,
professor of the Deportment, «State and municipal»
Far Eastern Federal University

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА СТАДИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ
THEORY AND METHODS OF VECTOR OPTIMIZATION OF THE SELECTION OF OPTIMAL PARAMETERS OF TECHNICAL SYSTEMS AT THE DESIGN STAGE

Аннотация: *Цель исследования:* Представление математики векторной оптимизации, построение математических моделей сложных инженерных систем в виде векторных задач, разработки математического, программного обеспечения для выбора оптимальных параметров этих систем на стадии проектирования. В рамках теории векторной оптимизации математического программирования https://rdcu.be/bhZ8i представлены принципы оптимальности решения векторных задач с эквивалентными критериями и с заданным приоритетом критерия. (Работа «Векторная оптимизация с эквивалентными и приоритетными критериями» издательства Springer Nature распространяется бесплатно.). На основе теории разработаны конструктивные методы решения задач векторной оптимизации, позволяющие принять решение, во-первых, с эквивалентными критериями, а во-вторых, с заданным приоритетом критерия.

Результаты работы: на базе математического и программного обеспечения разработана методология моделирования и оптимального выбора сложных инженерных систем.

Выводы: методология и методы могут использоваться при проектировании различных видов инженерных (в т.ч. электротехнических) систем.

Ключевые слова: Моделирование технических систем, Математическое обеспечение (Векторная оптимизация), Программное обеспечение, Сложная инженерная система, Выбор оптимального решения.

Abstract: *The purpose of the study*: Presentation of the mathematics of vector optimization, construction of mathematical models of complex engineering systems in the form of vector problems, development of mathematical software for the selection of optimal parameters of these systems at the design stage. Within the framework of the theory of vector optimization, the principles of optimality of solving vector problems with equivalent criteria and with a given priority of the criterion are presented https://rdcu.be/bhZ8i. (The work "Vector optimization with equivalent and priority criteria» by Springer Nature is distributed free of charge.).

On the basis of the theory, constructive methods for solving vector optimization problems have been developed, which make it possible to make a decision, first, with equivalent criteria, and second, with a given priority of the criterion.

Results: on the basis of mathematical and software, a methodology for modeling and optimal selection of complex engineering systems has been developed.

Conclusions: the methodology and methods can be used in the design of various types of engineering (including electrical) systems.

Ключевые слова: Моделирование технических систем, Математическое обеспечение (Векторная оптимизация), Программное обеспечение, Сложная инженерная система, Выбор оптимального решения.

Keywords: Modeling of technical systems, Mathematical software (Vector optimization), Software, Complex engineering system, Selection of the optimal solution.

1. Введение. Состояние вопроса по рассматриваемой проблеме

К сложным инженерным системам относятся технические (в том числе электротехнические) системы, технологические процессы, материалы (его состав, в том числе материалы, из которых изготовляются электротехнические системы) и динамические системы. Математическая модель сложной инженерной системы (ИС), как правило, учитывает некоторый набор ее параметров и характеристик, которые функционально зависят от этих параметров. При построении математической модели ИС возникает ряд проблем, которые связаны, во-первых, с условиями определенности и неопределенности исходных данных, во-вторых, проблемой размерности параметров и геометрической интерпретацией результатов решения. При практической реализации также возникает проблема размерности решения задачи векторной оптимизации. Трудности возникают также при построении математических моделей сложных инженерных систем, если они представлены в условиях определенности и неопределенности в совокупности. Поэтому важным является разработка теории и конструктивных методов оценки исходных данных и на их основе принятия оптимальных решений в сложных инженерных системах. Проблеме векторной (многокритериальной, системной) оптимизации уделяется достаточно большое внимание:

во-первых, в отечественной науке авторы [1 – 12], которые уделяли внимание как теоретической части многокритериальной оптимизации [1 – 4], так и прикладной части [5 – 12], и, которые внесли большой вклад в решение важных научно-технических задач проектирования технических систем;

во-вторых, работ автора [13 – 34, 43, 44], который впервые в [13] 1986 г. разработал аксиоматику, принцип оптимальности и методы решения векторных задач математического программирования (ВЗМП), и только в 2017 г. подтверждены (к сожалению не русскими, а немцами Springer Nature) в https://rdcu.be/bhZ8i (Работа "Vector optimization with equivalent and priority criteria" Springer Nature распространяется бесплатно.) [27];

в-третьих, исследование векторной (многокритериальной) оптимизации в зарубежной научной деятельности [35 - 42], как в теоретических, так и в прикладных аспектах. Здесь бы я выделил работу [35] Pareto V., который в первые рассмотрел проблему принятия решений по множеству критериев на примере экономической системы (рынка).

Цель данной работы направлена на построение математических моделей сложных инженерных систем в виде векторных задач, разработки математического, программного обеспечения и методов моделирования и выбора оптимальных параметров инженерной системы при проектировании. Создания конструктивных методов решения задач векторной оптимизации с равнозначными критериями и с заданным приоритетом критерия и соответствующего программного обеспечения решения нелинейных векторных задач.

Для реализации поставленной цели в работе: во-первых, разработана методология построения математической модели инженерной системы в виде векторной задачи математического программирования (ВЗМП); во-вторых, разработана теория, конструктивные методы решения ВЗМП и программного обеспечения их решения, как основы выбора оптимальных параметров инженерных систем; в-третьих, разработка методологии и ее реализация решения в виде ВЗМП, которая демонстрируются на численном примере модели инженерной системы: технической системы.

2. Построение математической модели инженерной системы.

2.1. Математическая модель технической системы

Функционирование любой технической системы (ТС) зависит от N конструктивных параметров: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}^T$ или $X = \{x_j,\ j = \overline{1,N}\}$, которые лежат в заданных пределах: $x_j^{min} \le x_j \le x_j^{max}, j = \overline{1,N}$. Результат функционирования ТС можно представить некоторым набором характеристик (критериев), функционально зависящих от переменной X:

$$F(X) = \{f_1(X), f_2(X), \dots, f_K(X)\}^T \text{ или } F(X) = \{f_k(X), k = \overline{1,K}\}^T,$$

на которые наложены функциональные ограничения:

$$f_k^{min} \le f_k(X) \le f_k^{max}, k = \overline{1,K}. \text{ или } G(X) \le B.$$

Одна часть этих критериев направлена на максимизацию: $f_k(X) \to max, k = \overline{1,K_1}$, а другая часть на минимизацию: $f_k(X) \to min, k = \overline{1,K_2}$.

Математическая модель технической системы, которая решает в целом проблему выбора оптимальных параметров ТС представлена, как Векторная Задача Математического Программирования (ВЗМП):

$$Opt\, F(X) = \{max\, F_1(X) = \{max\, f_k(X), k = \overline{1, K_1}\}, \tag{2.1}$$

$$min\, F_2(X) = \{min\, f_k(X), k = \overline{1, K_2}\}\}, \tag{2.2}$$

$$\text{ограничения } f_k^{min} \leq f_k(X) \leq f_k^{max}, k = \overline{1, K}, \tag{2.3}$$

$$x_j^{min} \leq x_j \leq x_j^{max}, j = \overline{1, N}, \tag{2.4}$$

где $G(X) = g_1(X), g_2(X), \dots, g_M(X)\}^T$ – это ограничения, накладываемые на функционирование ТС. Ограничения характеризуются технологическими, физическими и тому подобными процессами, которые протекают в ТС. Они могут быть представлены функциональными ограничениями, например,

$$f_k^{min} \leq f_k(X) \leq f_k^{max}, k = \overline{1, K}.$$

Предполагается, что функции $f_k(X), k = \overline{1, K}$ дифференцируемы и выпуклы, $g_i(X), i = \overline{1, M}$ непрерывны, а заданное ограничениями (2.3)-(2.4) множество допустимых точек не пусто и представляет собой компакт:

$$\boldsymbol{S} = \{X \in R^n | G(X) \leq 0, X^{min} \leq X \leq X^{max}\} \neq \emptyset.$$

Соотношения (2.1)-(2.4) представляют математическую модель технической системы. Требуется найти такой вектор параметров $X^o \in \boldsymbol{S}$, при котором вектор - функция $F(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K}\}$ принимает оптимальное значение. Для решения такого класса ВЗМП используются, представленные в следующем разделе методы, которые основаны на нормализации критериев и принципе гарантированного результата. Методы позволяют решать векторную задачу как при равнозначных критериях, так и при заданном приоритете критерия. При формировании модели ТС (2.1)-(2.4) исследуются два варианта:

1 вариант, когда известна функциональная зависимость вектора критериев $F(X) = \{F_1(X), F_2(X)\}$ (2.1)-(2.2) и ограничений (2.3)-(2.4) от всех параметров $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$, накладываемых на её функционирование. Такую математическую модель называют: модель в условиях определенности [16, 18], при этом используются указанные методы;

2 вариант, когда нет достаточной информации о функциональной зависимости каждого критерия, и ограничений от параметров $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$. Обычно, в этом случае используется экспериментальные данные, полученные на стадии проектирования. Подобные математические модели технических систем называют ТС с условиями неопределенности [16, 18-26].

2.2. Математическая модель электротехнической системы

В качестве примера представим работу Левицкого В. Л. «Моделирование и оптимизация параметров магнитоэлектрических линейных индукторных электродвигателей (ЛД) постоянного тока», [11], [14, С. 50-120]. Проектировалась конструкция – форсируемый ЛД (ФЛД), модель которого была сведена к векторной задаче математического программирования (2.1)-(2.4). При этом вектор конструктивных параметров: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, состоял из: x_1 – воздушного зазора δ, x_2 – зубцового шага, x_3 – числа зубцов, x_4 – высоты концентратора, x_5 – коэффициента полюсного перекрытия. Вектор конструктивных характеристик (критериев) $f_k(X), k = \overline{1, K}$: $F(X) = \{f_1(X) = f(X), f_2(X) = p(X), f_3(X) = \eta(X), \dots\}$ включал: $f(X)$ – номинальное тяговое усилие, $p(X)$ – номинальную мощность, $\eta(X)$ – номинальный КПД и т.п., всего десять показателей. Для построения зависимостей $f_k(X), k = \overline{1, K}$ от названных конструктивных параметров X был использован центральный ортогональный план второго порядка [14 с. 96]. Из другой отрасли представим работу [34] – «… многокритериальная оптимизация статических режимов массообменных процессов на примере абсорбции в производстве газоразделения». Таким образом, экспериментальные данные, как из задачи ФЛД, так и подобных ТС из других отраслей, могут быть представлены в виде теоретической (системной) векторной задачей оптимизации (2.1)-(2.4).

3. Математическое обеспечение моделирования инженерных систем.

Математические модели: технических систем (2.1)-(2.4), технологических процессов, структуры материалов, динамических систем [30, 32] могут быть сформулированы, как векторная задача математического программирования. Математическое обеспечение (на базе теории векторной оптимизации) для решения векторных задач, которые представляют модели технических систем, разработан в работах [13, 27-28]. Кратко представим теорию и методы решения, на основе которых разработано программное обеспечение.

3.1. Векторная задача математического программирования

Векторная задача математического программирования– это стандартная задача математического программирования [13], имеющая множество критериев. В совокупности они представляют вектор критериев. ВЗМП могут быть представлены, как однородные, так и неоднородные ВЗМП.

Однородные векторные задачи математического программирования максимизации – это такие векторные задачи, у которых каждая компонента множества критериев направлена на максимизацию.

Однородные ВЗМП минимизации – это такие векторные задачи, у которых каждая компонента множества критериев направлена на минимизацию.

Неоднородные ВЗМП – это такие векторные задачи, у которых множества критериев разделено на два подмножества критериев: максимизации и минимизации, отсюда неоднородные ВЗМП – это объединение двух видов однородных задач. Используя эти определениями, представим векторную задачу математического программирования с неоднородными критериями.

$$Opt\ F(X) = \{\max F_1(X) = \{\max f_k\,(X),\ k = \overline{1,K_1}\}, \tag{3.1}$$

$$\min F_2(X) = \{\min f_k\,(X),\ k = \overline{1,K_2}\}\}, \tag{3.2}$$

$$G(X) \leq B, \tag{3.3}$$

$$X \geq 0, \tag{3.4}$$

где $X = \{x_j,\ j = \overline{1,N}\}$ — это вектор переменных N-мерного евклидова пространства R^N; $F(X)$ — это векторный критерий (вектор-функция), имеющая K – компонент, $F(X) = \{f_k(X),$ $k = \overline{1,K}\}$. Множество компонент $\boldsymbol{K}$ состоит из подмножества $\boldsymbol{K}_1$ компонент максимизации, подмножества $\boldsymbol{K}_2$ минимизации, которые в совокупности образуют множество $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_1 \cup \boldsymbol{K}_2$. Для оценки совокупности критериев $\boldsymbol{K}$ вводится обозначение: операция «*opt*». Операция «*opt*» включает в себя *max* и *min*; $F_1(X), F_2(X)$ представляют вектор-функцию (критерии) максимизации и минимизации:

$K_1 \equiv \overline{1,K_1}$, $K_2 \equiv \overline{K_1+1,K} \equiv \overline{1,K_2}$ — это множества критериев максимизации, минимизации. $G(X) \leq B, X \geq 0$ представляют ограничения. Допустимое множество точек не пусто и представляет собой компакт: $\boldsymbol{S} = \{X \in \boldsymbol{R}^n | G(X) \leq 0, X^{min} \leq X \leq X^{max}\} \neq \emptyset$.

3.2. Теория, аксиоматика и конструктивные методы векторной оптимизации с равнозначными критериями

Теория векторной оптимизации включает аксиоматику (теоретические основы), принцип оптимальности и методы решения векторных задач с равнозначными критериями и заданным приоритетом критерия.

3.2.1. *Аксиомы и Аксиоматические методы: определение*

Аксиома — это утверждение, не требующее логического доказательства. На основе этих исходных утверждений строится та или иная теория.

Аксиоматический метод — это способ построения научной теории, при котором в основу теории кладутся некоторые исходные положения, называемые *Аксиомами теории.* В итоге все остальные положения теории получаются как логические следствия аксиом, [12].

В математике *Аксиоматический метод* зародился в работах древнегреческих геометров. Образцом аксиоматического метода является древнегреческий ученый Евклид, аксиомы которого были заложены в его знаменитом сочинении «Начала».

3.2.2. *Аксиоматика, принцип оптимальности решения векторной задачи оптимизации с равнозначными критериями*

Определение 1. Нормализация критериев.

Нормализация критериев (сдвиг плюс нормирование) представляет однозначное отображение функции $f_k(X)\ \forall k \in K$, в одномерное пространство R^1 (функция $f_k(X)\ \forall k \in K$

представляет собой функцию преобразования из N-мерного евклидова пространства $\boldsymbol{R^N}$ в $\boldsymbol{R^1}$). Для нормализации критериев в векторных задачах будут использоваться линейные преобразования: $f_k(X) = a_k f'_k(X) + c_k \; \forall k \in K$, или

$$f_k(X) = (f'_k(X) + c_k)/a_k \; \forall k \in К, \tag{3.5}$$

где $f'_k(X)\,, k = \overline{1, K}$ - до нормализации (старое) значение критерия; $f_k(X), k = \overline{1, K}$ - нормализованное значение, a_k, c_k- постоянные.

Нормализация критериев (3.5) представляет линейное инвариантное преобразование полинома, в результате которого структура полинома остается неизменной. В оптимизационной задаче нормализация критериев:

$f_k(X) = (f'_k(X) + c_k)/a_k \; \forall k \in K$ не влияет на результат решения. Если решается выпуклая оптимизационная задача:

$\boldsymbol{max}_{\boldsymbol{X \in S}} \, f(X)$, то в полученной точке оптимума $X^* \in S$: $\frac{df(X^*)}{dX} = 0$.

В общем случае, если решается задача: $\boldsymbol{max}_{\boldsymbol{X \in S}} \, (a_k f'_k(X) + c_k)$, то в полученной точке оптимума $X^* \in S$:

$$\frac{d(a_k f(X^*) + c_k)}{dX} = a_k \frac{d\left(f(X^*)\right)}{dX} + \frac{d(c_k)}{dX} = 0. \tag{3.6}$$

Результаты равны, т.е. точка оптимума $X_k^*, k = \overline{1, K}$ является одной и той же для ненормализованных и нормализованных задач.

Определение 2. (Определение относительной оценки критерия).

В векторной задаче оптимизации (3.1)-(3.4) выполним нормализацию:

$$\lambda_k(X) = \frac{f_k(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, \; \forall k \in \boldsymbol{K}\,. \tag{3.7}$$

$\lambda_k(X) \; \forall k \in K$ - это относительная оценка k-го критерия в точке $X \in \boldsymbol{S}$, где f_k^*, f_k^0 наилучшая, наихудшая величина k-го критерия, которая получена при решении ВЗМП (3.1)-(3.4) отдельно по k-му критерию. Относительная оценка $\lambda_k(X) \; \forall k \in K$ измеряется в относительных единицах; при этом относительная оценка $\lambda_k(X) \; \forall k \in K$ на допустимом множестве $\boldsymbol{S}$ меняется с нуля в точке X_k^0 к единице в точке оптимума X_k^*: $\forall k \in \boldsymbol{K} \lim\limits_{X \to X_k^0} \lambda_k(X) = 0$; $\forall k \in \boldsymbol{K} \lim\limits_{X \to X_k^*} \lambda_k(X) = 1$. Отсюда, для любого критерия (характеристики) относительная оценка $\lambda_k(X) \; \forall k \in K$ лежит в следующих пределах:

$$\forall k \in \boldsymbol{K} \; 0 \le \lambda_k(X) \le 1, X \in \boldsymbol{S}, \tag{3.8}$$

что позволяет критерия (характеристики) сравнивать между собой.

Аксиома 1. О равенстве и равнозначности критериев в допустимой точке векторной задачи математического программирования.

В векторной задаче оптимизации два критерия с индексами $k \in \boldsymbol{K}, q \in \boldsymbol{K}$ считаем равными в точке $X \in \boldsymbol{S}$, если относительные оценки по k-му и q-му критерию равны между собой в этой точке: $\lambda_k(X) = \lambda_q(X), k, q \in \boldsymbol{K}$. Критерии будем считать равнозначными в векторной задаче, если в точке $X \in \boldsymbol{S}$ при сравнении по числовой величине относительных оценок $\lambda_k(X)$, $k = \overline{1, K}$, между собой, на каждый критерий $f_k(X), k = \overline{1, K}$, относительные оценки $\lambda_k(X)$, не накладывается условий о приоритетах критериев.

Определение 3. Определение минимального уровня.

Относительный уровень λ в векторной задаче представляет нижнюю оценку точки $X \in S$ среди всех относительных оценок $\lambda_k(X), k = \overline{1, K}$:

$$\forall X \in \boldsymbol{S} \; \lambda \le \lambda_k(X), k = \overline{1, K}, \tag{3.9}$$

нижний уровень λ для выполнения условия (2.9) в точке $X \in S$ определяется

$$\forall X \in S \; \lambda = \boldsymbol{min}_{k \in K} \lambda_k(X). \tag{3.10}$$

Соотношения (3.9) и (3.10) являются взаимосвязанными. Они служат переходом от операции (3.10) определения min к ограничениям (3.9) и наоборот. Относительный уровень λ позволяет объединить все критерии в векторной задаче одной числовой характеристикой λ и производить над ней определенные операции. Относительный уровень λ функционально зависит от переменной $X \in \boldsymbol{S}$, поэтому, изменяя X, можем изменять уровень λ.

1. Принцип оптимальности решения ВЗМП с равнозначными критериями. Векторная задача математического программирования с равнозначными критериями решена, если найдена точка $X^o \in \boldsymbol{S}$ и максимальный уровень λ^o (верхний индекс о - оптимум) среди всех относительных оценок такой, что

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{\boldsymbol{X \in S}} \boldsymbol{min}_{\boldsymbol{k \in K}} \lambda_k(X) \quad (3.11)$$

Используя взаимосвязь выражений (3.9) и (3.10), преобразуем максиминную задачу (3.11) в экстремальную задачу:

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{\boldsymbol{X \in S}}\, \lambda \quad (3.12)$$

$$\text{при ограничениях } \lambda \leq \lambda_k(X), k = \overline{1,K}. \quad (3.13)$$

Полученную однокритериальную задачу оптимизации (3.12)-(3.13) назовем λ-задачей. λ-задача (3.12)-(3.13) имеет (*N*+1) размерность, как следствие результат решения λ-задачи (3.12)-(3.13) представляет собой оптимальный вектор $X^o \in R^{N+1}$, (*N*+1)-я компонента которого суть величина λ^o, $\boldsymbol{X^o} = \{x_1^o, x_2^o, \dots, x_N^o, x_{N+1}^o\}$, при этом $x_{N+1}^o = \lambda^o$, (N+1) компонента вектора X^o выделена в λ^o.

Полученные величины $\{\lambda^o, X^o\} = \boldsymbol{X^o}$ характеризуют оптимальное решение λ-задачи (3.16)-(3.17) и соответственно векторной задачи математического программирования (3.1)-(3.4) с равнозначными критериями, которая решена на основе нормализации критериев и принципе гарантированного результата. Назовем в оптимальном решении $\boldsymbol{X^o} = \{\lambda^o, X^o\}$, величину X^o - оптимальной точкой, а величину λ^o - максимальным уровнем при равнозначных критериях.

Теорема 1. Теорема о двух наиболее противоречивых критериях в ВЗМП с равнозначными критериями.

В выпуклой векторной задаче оптимизации (3.1)-(3.4) с равнозначными критериями, решенной на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата, в оптимальной точке $\boldsymbol{X^o} = \{\lambda^o, X^o\}$ всегда имеется два критерия - обозначим их индексами $q \in \boldsymbol{K}, p \in \boldsymbol{K}$, которые являются самыми противоречивыми из множества критериев $k = \overline{1,K}$, и для которых выполняется равенство:

$$\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_p(X^o), q, p \in \boldsymbol{K}, X \in \boldsymbol{S}, \quad (3.14)$$

и другие критерии определяются неравенством:

$$\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), \forall k \in \boldsymbol{K},\ q \neq p \neq k. \quad (3.15)$$

В первые доказательство теоремы 1 представлено в [13, С. 22], в дальнейшем повторено в работе [17, С. 234].

3.2.2. *Метод решения векторной задачи математического программирования с равнозначными критериями*

Для решения векторных задач математического программирования (3.1)-(3.4) разработаны методы, основанные на аксиоматике, нормализации критериев (3.7) и принципа гарантированного результата (3.11). Методы включает два блока: 1-й блок системного анализа, состоящего из трех шагов; и 2-й блок построения и принятия оптимального решения (λ-задачи).

Блок 1. Системный анализ.

Шаг 1. Решается отдельно оптимизационная задача (3.1)-(3.4) по каждому критерию. Для $\forall k \in \boldsymbol{K}_1$ решается на максимум, а для $\forall k \in \boldsymbol{K}_2$ решается на минимум.

В результате решения получим:

X_k^* - точка оптимума по соответствующему критерию $k = \overline{1,K}$;

$f_k^* = f_k(X_k^*)$ – величина k-го критерия в этой точке $k = \overline{1,K}$.

Шаг 2. В задаче (3.1)-(3.4) определяем наихудшую величину каждого критерия (анти оптимум): f_k^0, $k = \overline{1,K}$. Решается задача (3.1)-(3.4) для каждого критерия $k = \overline{1,\boldsymbol{K}_1}$ на минимум: $f_k^0 = min\, f_k(X), G(X) \leq B, X \geq 0, k = \overline{1,\boldsymbol{K}_1}$;

для каждого критерия $k = \overline{1,\boldsymbol{K}_2}$ на максимум: $f_k^0 = max\, f_k(X), G(X) \leq B, X \geq 0, k = \overline{1,\boldsymbol{K}_2}$.

Получим в результате решения: $X_k^0 = \{x_j, j = \overline{1,N}\}$ - точка оптимума по соответствующему критерию, $k = \overline{1,K}$; $f_k^0 = f_k(X_k^0)$ – величина *k*-го критерия.

Шаг 3. Выполняется системный анализ множества точек, оптимальных по Парето. В точках оптимума $X^* = \{X_k^*, k = \overline{1,K}\}$ определяются величины целевых функций $F(X^*)$, а также относительных оценок $\lambda(X^*)$:

$\lambda_k(X) = \frac{f_k(X)-f_k^0}{f_k^*-f_k^0}, \forall k \in \boldsymbol{K}$. Результат системного анализа:

$$F(X^*) = \{f_k(X_k^*), q = \overline{1,K}, k = \overline{1,K}\} = \begin{vmatrix} f_1(X_1^*), \dots, f_K(X_1^*) \\ \dots \\ f_1(X_K^*), \dots, f_K(X_K^*) \end{vmatrix}, \quad (3.16)$$

$$\lambda(X^*) = \{\lambda_q(X_k^*), q = \overline{1,K}, k = \overline{1,K}\} = \begin{vmatrix} \lambda_1(X_1^*), \dots, \lambda_K(X_1^*) \\ \dots \\ \lambda_1(X_K^*), \dots, \lambda_K(X_K^*) \end{vmatrix}. \quad (3.17)$$

В (3.17) любая относительная оценка лежит в пределах:

$0 \le \lambda_k(X) \le 1, k = \overline{1,K}$. Из результатов системного анализа (3.16), (3.17) вытекает проблема: Найти такую (оптимальную) точку, в которой все относительные оценки: $\lambda_q(X), q = \overline{1,K}$ были наиболее близки к единице. На решение этой проблемы направлен второй блок.

Блок 2. Принятие оптимального решения в ВЗМП. (Два шага - 4, 5).

Шаг 4. Построение λ-задачи.

Построение λ-задачи осуществляется в два этапа:

первоначально строится максиминная задача оптимизации с равнозначными критериями (3.11):

$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{\boldsymbol{X \in S}} \boldsymbol{min}_{\boldsymbol{k \in K}} \lambda_k(X)$,

которая на втором этапе преобразуются в однокритериальную задачу математического программирования, названной λ-задачей:

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{\boldsymbol{X \in S}}\, \lambda, \quad (3.18)$$

$$\lambda - \frac{f_k(X)-f_k^0}{f_k^*-f_k^0} \le 0, k = \overline{1,K}, \quad (3.19)$$

$$G(X) \le B, X \ge 0, \quad (3.20)$$

где вектор неизвестных X имеет размерность $N+1$: $X = \{\lambda, x_1, \dots, x_N\}$.

Шаг 5. Решение λ-задачи. λ-задача (3.18)-(3.20) – стандартная задача выпуклого программирования и для ее решения используются стандартные методы. В результате решения λ-задачи (3.18)-(3.20) получим: $\boldsymbol{X^o} = \{\lambda^o, X^o\}$ - точку оптимума; $f_k(X^o), k = \overline{1,K}$- величины критериев в этой точке; $\lambda_k(X^o) = \frac{f_k(X)-f_k^0}{f_k^*-f_k^0}, k = \overline{1,K}$- величины относительных оценок; λ^o - максимальную относительную оценку, которая является максимальным нижним уровнем для всех относительных оценок $\lambda_k(X^o)$:

$$\boldsymbol{\lambda^o} \le \lambda_k(X^o), k = \overline{1,K}, X^o \in \boldsymbol{S}.$$

3.3. Теория, аксиоматика и методы векторной оптимизации: с приоритетом критерия

3.3.1. Аксиоматика и принцип оптимальности векторной оптимизации с заданным приоритетом критерия, [16, 18, 19].

3.3.2. Метод решения задачи векторной оптимизации с заданным приоритетом критерия.

Аксиоматика, принцип оптимальности и метод решения задачи векторной оптимизации с заданным приоритетом критерия представлены в работах [16, 19, 27, 28].

Заключение по теории и аксиоматике векторной оптимизации.

Представленная теория, аксиоматика, принципы оптимальности являются дальнейшим развитием аксиоматического подхода, заложенного в знаменитом сочинении «Начала», древнегреческого ученого Евклида, который представил аксиомы для ***одно мерной математики***. Это нашло отражение в теории оптимизации с одним критерием. Аксиоматический подход, изложенный в работе направлен на системное (с множеством критериев) исследование объектов, процессов и систем. При этом исследование (оптимизация) по каждому критерию ведется не в натуральных, а в относительных единицах от 0 (нуля) до 1 (единицы) или (для экономистов) от нуля до 100% на исследуемом континууме, что позволяет критерии сравнивать между собой и вести совместную оптимизацию. Такой подход представляет ***многомерную математику***.

В многомерной математике оптимизация на замкнутом, не пустом множестве точек с одним критерием является частным вариантом, векторной оптимизации, где оптимизация идет от 0 до 1 (100%), при этом известно, что понимается под 0, и, что под 1 (первый шаг алгоритма).

В приложении к техническим системам оптимизация ведется по всем характеристикам (в том числе электротехническим) одновременно.

4. Программное обеспечение моделирования инженерных систем

4.1. Программное обеспечение (MATLAB) решения векторной задачи нелинейного программирования (ВЗНП)

4.1.1. *Разработка программного обеспечение решения ВЗНП*

Для решения ВЗНП (3.1)-(3.4) ниже представлена программа, которая по существу представляет программу – шаблон для написания и решения других векторных задач нелинейного программирования (3.1)-(3.4) – математических моделей инженерных систем.

4.1.2. Математическая постановка векторной задачи нелинейного программирования

Дано. Рассматривается векторная задача нелинейного (выпуклого) программирования с четырьмя однородными критериями.

$$opt\ F(X) = \{min\ F_2(X) = min\ f_1(X) \equiv (x_1 - 80)^2 + (x_2 - 80)^2, \quad (4.1)$$
$$min\ f_2(X) \equiv (x_1 - 80)^2 + (x_2 - 20)^2, \quad (4.2)$$
$$min\ f_3(X) \equiv (x_1 - 20)^2 + (x_2 - 20)^2, \quad (4.3)$$
$$min\ f_4(X) \equiv (x_1 - 20)^2 + (x_2 - 80)^2, \quad (4.4)$$
$$\text{при ограничениях } 0 \le x_1 \le 100. \quad (4.5)$$
$$0 \le x_2 \le 100. \quad (4.6)$$

Требуется определить. Разработать программное обеспечение в MATLAB решения векторной задачи нелинейного программирования и решить задачу (4.1)-(4.6).

4.2. Программное обеспечение решения ВЗНП при равнозначных критериях

Для решения ВЗНП (4.1)-(4.6) ниже представлена программа, которая по существу представляет ***программу – шаблон*** для написания и решения других векторных задач нелинейного программирования – моделей инженерных систем, том числе электротехнических.

Запись программы в формате MATLAB.

```
% Программа "Решение векторной задачи нелинейного программирования":
 function [x,f] = VPNP_2_4Krit_100(x)
% Автор: Машунин Юрий Константинович (Mashunun Yu. K.)
% Алгоритм и программа предназначена для использования в образовании и научных %
исследованиях, для коммерческого использования обращаться: Mashunin@mail.ru
% Algorithm VPNP: 4Kritery + L-zadaha
%[X,Fval,EXITFLAG,OUTPUT,LAMBDA,GRAD,HESSIAN]=
%                    FMINCON(FUN,Xo,A,b,Aeq,beq, lb,ub,nonlcon,options,P1,P2,...)
disp('*** Блок Исходных данных. ВЗНП:***')
disp('opt F(X)={max F1(X)={min f1=(x1-80).^2+(x2-80).^2; ')
disp('              min f2=(x1-80).^2+(x2-20).^2; ')
disp('              min f3=(x1-20).^2+(x2-20).^2; ')
disp('              min f4=(x1-20).^2+(x2-80).^2; ')
disp('                   0<=x1<=100, 0<=x2<=100 ')
lb=[0. 0.];
ub=[100. 100.]; Xo=[0. 0.];
options=optimset('LargeScale','off');
options=optimset(options,'GradObj','on','GradConst','off');
A=[1 0;
  0 1];
```

```
b=[100 100];
Aeq=[]; beq=[];
XoK1max=[0. 0.];
disp('*** Шаг 1. Решение по каждому критерию (наилучшее) ***')%
[x1max,f1max] = fmincon('VPNP_2_Krit1max',XoK1max,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X1max] = VPNP_2_Krit1min(x1max)
[f2X1max] = VPNP_2_Krit2min(x1max)
[f3X1max] = VPNP_2_Krit3min(x1max)
[f4X1max] = VPNP_2_Krit4min(x1max)
XoK2max=[0. 0.];
[x2max,f2max] = fmincon('VPNP_2_Krit2max',XoK2max,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X2max] = VPNP_2_Krit1min(x2max)
[f2X2max] = VPNP_2_Krit2min(x2max)
[f3X2max] = VPNP_2_Krit3min(x2max)
[f4X2max] = VPNP_2_Krit4min(x2max)
XoK3max=[0. 0.];
[x3max,f3max] = fmincon('VPNP_2_Krit3max',XoK3max,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X3max] = VPNP_2_Krit1min(x3max)
[f2X3max] = VPNP_2_Krit2min(x3max)
[f3X3max] = VPNP_2_Krit3min(x3max)
[f4X3max] = VPNP_2_Krit4min(x3max)
XoK4max=[0. 0.];
[x4max,f4max] = fmincon('VPNP_2_Krit4max',XoK4max,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X4max] = VPNP_2_Krit1min(x4max)
[f2X4max] = VPNP_2_Krit2min(x4max)
[f3X4max] = VPNP_2_Krit3min(x4max)
[f4X4max] = VPNP_2_Krit4min(x4max)
disp('*** Шаг 2. Решение по каждому критерию (наихудшее) ***')%
XoK1min=[0. 0.];
[x1min,f1min] = fmincon('VPNP_2_Krit1min',XoK1min,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X1min] = VPNP_2_Krit1min(x1min)
[f2X1min] = VPNP_2_Krit2min(x1min)
[f3X1min] = VPNP_2_Krit3min(x1min)
[f4X1min] = VPNP_2_Krit4min(x1min)
[x2min,f2min] = fmincon('VPNP_2_Krit2min',Xo,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X2min] = VPNP_2_Krit1min(x2min)
[f2X2min] = VPNP_2_Krit2min(x2min)
[f3X2min] = VPNP_2_Krit3min(x2min)
[f4X2min] = VPNP_2_Krit4min(x2min)
[x3min,f3min] = fmincon('VPNP_2_Krit3min',Xo,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X3min] = VPNP_2_Krit1min(x3min)
[f2X3min] = VPNP_2_Krit2min(x3min)
[f3X3min] = VPNP_2_Krit3min(x3min)
[f4X3min] = VPNP_2_Krit4min(x3min)
[x4min,f4min] = fmincon('VPNP_2_Krit4min',Xo,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X4min] = VPNP_2_Krit1min(x4min)
[f2X4min] = VPNP_2_Krit2min(x4min)
[f3X4min] = VPNP_2_Krit3min(x4min)
[f4X4min] = VPNP_2_Krit4min(x4min)
disp('*** Шаг 3. Системный анализ результатов ***')%
disp('Оценка критериев в точках оптимума: X1min,X2min,X3min,X4min')%
F=[f1X1min f2X1min f3X1min f4X1min;
  f1X2min f2X2min f3X2min f4X2min;
  f1X3min f2X3min f3X3min f4X3min;
```

```
   f1X4min f2X4min f3X4min f4X4min]
 d1=f1X1min-f1X1max
 d2=f2X2min-f2X2max
 d3=f3X3min-f3X3max
 d4=f4X4min-f4X4max
 disp('Оценка критериев в относительных единицах: X1min,X2min,X3min,X4min')%
 L=[(f1X1min-f1X1max)/d1 (f2X1min-f2X2max)/d2 (f3X1min-f3X3max)/d3 (f4X1min-
f4X4max)/d4;
   (f1X2min-f1X1max)/d1 (f2X2min-f2X2max)/d2 (f3X2min-f3X3max)/d3 (f4X2min-
f4X4max)/d4;
   (f1X3min-f1X1max)/d1 (f2X3min-f2X2max)/d2 (f3X3min-f3X3max)/d3 (f4X3min-
f4X4max)/d4;
   (f1X4min-f1X1max)/d1 (f2X4min-f2X2max)/d2 (f3X4min-f3X3max)/d3 (f4X4min-
f4X4max)/d4]
 disp('*** Шаг 4. Построение L-задачи ***')%
 Ao=[1 0 0;
    0 1 0];
 bo=[100 100]; Aeq=[]; beq=[];
 Xoo=[0 0 0]
 lbo=[0. 0. 0.]
 ubo=[100. 100. 1]
 disp('*** Шаг 5. Решение L-задачи ***')%
 [Xo,Lo]=fmincon('VPNP_2_L',Xoo,Ao,bo,Aeq,beq,lbo,ubo,'VPNP_2_LConst') %,options)
 disp('Оценка критериев в точке оптимума Xo')%
 [f1Xo] = VPNP_2_Krit1min(Xo(1:2))
 [f2Xo] = VPNP_2_Krit2min(Xo(1:2))
 [f3Xo] = VPNP_2_Krit3min(Xo(1:2))
 [f4Xo] = VPNP_2_Krit4min(Xo(1:2))
 disp('Оценка критериев в точке оптимума Xo в относительных единицах')%
 L1Xo=(f1Xo+f1max)/d1
 L2Xo=(f2Xo+f2max)/d2
 L3Xo=(f3Xo+f3max)/d3
 L4Xo=(f4Xo+f4max)/d4
 % ****Конец*********
 %   [Программа "Расчет 1 критер. - max"] файл: VPNP_2_Krit1max
  function [f,G] = VPNP_2_Krit1max(x)
 f=-(x(1)-80).^2-(x(2)-80).^2;    %Расчет функции - критерий 1
 G=[-2*(x(1)-80),   -2*(x(2)-80)];%Расчет 1 производной критерия 1
 %  [Программа "Расчет 1 критер. - min"] Файл: VPNP_2_Krit1min
  function [f,G] = VPNP_2_Krit1min(x);
 f=(x(1)-80).^2+(x(2)-80).^2;
 G=[2*(x(1)-80);   2*(x(2)-80)];
 % [Программа "Расчет 2 критер. - max"] Файл:  VPNP_2_Krit2max
  function [f,G] = VPNP_2_Krit2max(x);
 f=-(x(1)-80).^2-(x(2)-20).^2;
 G=[-2*(x(1)-80);   -2*(x(2)-20)];
 %   [Программа "Расчет критер. 2 - min"] Файл: VPNP_2_Krit2min
  function [f,G] =VPNP_2_Krit2min(x);
 f=(x(1)-80).^2+(x(2)-20).^2;
 G=[2*(x(1)-80);   2*(x(2)-20)];
 % [Программа "Расчет 3 критер. - max"] Файл: VPNP_2_Krit3max
  function [f,G] = VPNP_2_Krit3max(x);
 f=-(x(1)-20).^2-(x(2)-20).^2;
 G=[-2*(x(1)-20);   -2*(x(2)-20)];
```

```
% [Программа "Расчет 3 критер. - min"] Файл: VPNP_2_Krit3min
 function [f,G] = VPNP_2_Krit3min(x);
f=(x(1)-20).^2+(x(2)-20).^2;
G=[2*(x(1)-20);    2*(x(2)-20)];
% [Программа "Расчет 4 критер. - max"] Файл:VPNP_2_Krit4max
function [f,G] = VPNP_2_Krit4max(x);
f=-(x(1)-20).^2-(x(2)-80).^2;
G=[-2*(x(1)-20);   -2*(x(2)-80)];
% [Программа "Расчет 4 критер. - max"] Файл:VPNP_2_Krit4max
function [f,G] = VPNP_2_Krit4max(x);
f=-(x(1)-20).^2-(x(2)-80).^2;
G=[-2*(x(1)-20);   -2*(x(2)-80)];
%[Программа "Расчет критер. L-задачи"] файл: VPNP_2_L
function [f,G] = VPNP_2_L(x)
f=-x(3);
G=[0;    0;  -1];
%        [Программа "Расчет ограничений L-задачи"] файл: VPNP_1_LConst
function [c,ceq,DC,DCeq]= VPNP_2_LConst(x)
d1=12800;d2=12800;d3=12800;d4=12800;
f1X1max=12800;f2X2max=12800;f3X3max=12800;f4X4max=12800;
c(1)=((x(1)-80).^2+(x(2)-80).^2)/d1+x(3)-f1X1max/d1;
c(2)=((x(1)-80).^2+(x(2)-20).^2)/d2+x(3)-f2X2max/d2;
c(3)=((x(1)-20).^2+(x(2)-20).^2)/d3+x(3)-f3X3max/d3;
c(4)=((x(1)-20).^2+(x(2)-80).^2)/d4+x(3)-f4X4max/d4;
G1=[2*(x(1)-80)/d1, 2*(x(1)-80)/d2, 2*(x(1)-20)/d3, 2*(x(1)-20)/d4;
   2*(x(2)-80)/d1, 2*(x(2)-20)/d2, 2*(x(2)-20)/d3, 2*(x(2)-80)/d4;
          1.0,           1.0,        1.0,       1.0];
ceq=[]; DCeq=[];
% *****Конец*****
```

5. Процесс и методология моделирования развития и выбора оптимальных параметров инженерных систем

5.1. Процесс моделирования развития и выбора оптимальных параметров инженерных систем

Процесс Методология процесса принятия оптимальных решений в инженерных системах на базе математического и программного обеспечения решения векторной задачи включает последовательно три этапа.

1 этап. *Решение векторной задачи математического программирования при равнозначных критериях*. Полученный результат является основой для дальнейшего исследования системы. Используется метод решения векторной задачи при равнозначных критериях в 3.2.2. Если полученный результат удовлетворяет лицо, принимающего решения, (ЛПР - проектировщик), то он берется за основу. Если не удовлетворяет, то переходим ко второму этапу (прямая задача) или третьему этапу (Обратная задача).

2 этап. *Решение прямой задачи векторной оптимизации*, которая состоит в следующем: «Какие будут показатели (характеристики), если изменить параметры инженерных системы». - Используется метод решения векторной задачи при равнозначных критериях, представленный в разделе 3.2.2.

3. этап. *Решение обратной задач векторной оптимизации*, которая состоит в следующем: «Какие будут параметры системы при заданных показателях (характеристиках) инженерной системы». - Используется метод решения векторной задачи при заданном приоритете критерия, представленный в разделе 3.3.2.

5.2. Методология моделирования развития и выбора оптимальных параметров инженерных систем

5.2.1. Решение: Векторная задача нелинейного программирования с равнозначными критериями

Для решения векторной задачи (4.1)-(4.6) использована приведенная программа. Решение представлено, как последовательность шагов.

Шаг 1. Решается ВЗМП (4.1)-(4.6) на max по каждому критерию. Результаты решения векторной задачи (4.1)-(4.6) по каждому критерию:

1 критерий: $X_1^* = \{x_1 = 0, x_2 = 0\}, f_1^* = f_1(X_1^*) = -12800$;

2 критерий: $X_2^* = \{x_1 = 0, x_2 = 100\}, f_2^* = f_2(X_2^*) = -12800$;

3 критерий: $X_3^* = \{x_1 = 100, x_2 = 100\}, f_3^* = f_3(X_3^*) = -12800$;

4 критерий: $X_4^* = \{x_1 = 100, x_2 = 0\}, f_4^* = f_4(X_4^*) = -12800$;

Шаг 2. Решается векторная задача (4.1)-(4.6) на min по каждому критерию. Результаты решения ВЗМП (4.1)-(4.6) по каждому критерию:

1 критерий: $X_1^0 = \{x_1 = 80, x_2 = 80\}, f_1^0 = f_1(X_1^0) = 0$;

2 критерий: $X_2^0 = \{x_1 = 80, x_2 = 20\}, f_2^0 = f_2(X_2^0) = 0$:

3 критерий: $X_3^0 = \{x_1 = 20, x_2 = 20\}, f_3^0 = f_3(X_3^0) = 0$:

4 критерий: $X_4^0 = \{x_1 = 20, x_2 = 80\}, f_4^0 = f_4(X_4^0) = 0$:

Представим геометрическую интерпретацию ограничений ВЗНП (4.1)-(4.6) и результатов решения на рис. 1.

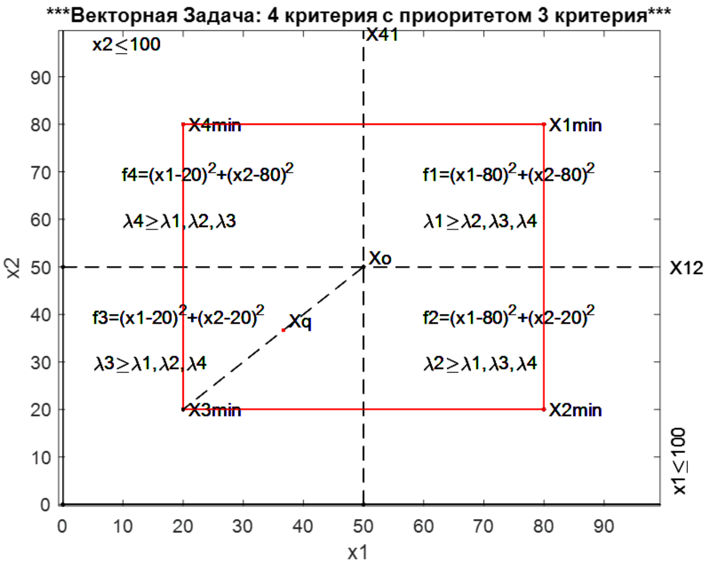

Рис. 1. Ограничения ВЗМП (4.1)-(4.6), точки оптимума $X_1^* = X1min, X_2^* = X2min, X_3^* = X3min, X_4^* = X4min$, относительные оценки $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3(X), \lambda_4(X)$ и точку оптимума X^o.

Шаг 3. Системный анализ множества точек Парето.

Точки оптимума $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$ представляют множество Парето (выделено красным цветом). В точках оптимума $X^* = \{X_k^*, k = \overline{1,K}\}$, определяются величины целевых функций $F(X^*)$ и относительных оценок $\lambda(X^*)$:

$F(X^*) = \{\{f_q(X_k^*), q = \overline{1,K}\}, k = \overline{1,K}\}$,

$\lambda(X^*) = \{\{\lambda_q(X_k^*), q = \overline{1,K}\}, k = \overline{1,K}\}$,

В точках оптимума: X1min, X2min, X3min, X4min вычисление этих функций будет следующим (Результат системного анализа):

$$F(X^*) = \begin{vmatrix} f_1(X_1^*)\ f_2(X_1^*)\ f_3(X_1^*)\ f_4(X_1^*) \\ f_1(X_2^*)\ f_2(X_2^*)\ f_3(X_2^*)\ f_4(X_2^*) \\ f_1(X_3^*)\ f_2(X_3^*)\ f_3(X_3^*)\ f_4(X_3^*) \\ f_1(X_4^*)\ f_2(X_4^*)\ f_3(X_4^*)\ f_4(X_4^*) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0\ 3600\ 7200\ 3600 \\ 3600\ 0\ 3600\ 7200 \\ 7200\ 3600\ 0\ 3600 \\ 3600\ 7200\ 3600\ 0 \end{vmatrix},$$

$$\lambda(X^*) = \begin{vmatrix} \lambda_1(X_1^*)\ \lambda_2(X_1^*)\ \lambda_3(X_1^*)\ \lambda_4(X_1^*) \\ \lambda_1(X_2^*)\ \lambda_2(X_2^*)\ \lambda_3(X_2^*)\ \lambda_4(X_2^*) \\ \lambda_1(X_3^*)\ \lambda_2(X_3^*)\ \lambda_3(X_3^*)\ \lambda_4(X_4^*) \\ \lambda_1(X_4^*)\ \lambda_2(X_4^*)\ \lambda_3(X_4^*)\ \lambda_4(X_4^*) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.0\ 0.7188\ 0.4375\ 0.7188 \\ 0.7188\ 1.0\ 0.7188\ 0.4375 \\ 0.4375\ 0.7188\ 1.0\ 0.7188 \\ 0.7188\ 0.4375\ 0.7188\ 1.0 \end{vmatrix}.$$

В точках оптимума $X_k^*, k=\overline{1,K}$ все нормализованные критерии (относительные оценки) равны единице: $\lambda_k(X_k^*)=\frac{f_k(X_k^*)-f_k^0}{f_k^*-f_k^0}=1, k=\overline{1,K}, K=4$.

А в точках оптимума $X_k^0, k=\overline{1,K}$ относительные оценки равны нулю:

$\lambda_k(X_k^0)=\frac{f_k(X_k^0)-f_k^0}{f_k^*-f_k^0}=0, k=\overline{1,K}, K=4$.

Отсюда $\forall k \in \boldsymbol{K}, \forall X\in\boldsymbol{S}, 0\le\lambda_k(X)\le 1$.

Шаг 4. Построение λ-задачи.

Шаг 5. Решение λ-задачи. В результате решения λ-задачи получим:

Xo= {x_1=50.0, x_2= 50.0, x_3 =0.8594} – точка оптимума, где

$x_3=\lambda^o$; а x_1, x_2 соответствует x_1, x_2 задачи (4.1)-(4.6);

Lo = λ^o= 0.8594 представляет оптимальное значение целевой функции.

Функции относительных оценок $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3(X), \lambda_4(X)$, а также точки оптимума X^o и λ^o, которые получены на их пересечении, в трех мерной системе координат x_1, x_2, λ показаны на рис. 2.

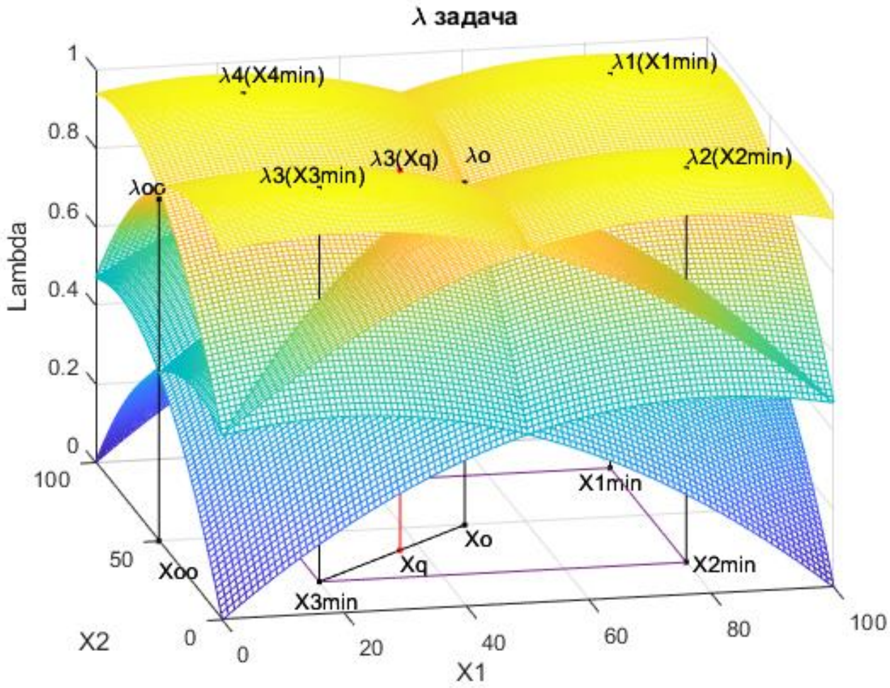

Рис. 2. Функции $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3(X), \lambda_4(X)$, точки оптимума X^o и λ^o.

На рис. 1, 2 видно, что область (множество точек) ограниченная точками $\boldsymbol{S_q}=\{X_1^*=X_{1opt}X_{12}X^oX_{41}\}$ характеризуется тем, что $\lambda_1(X)\ge\lambda_k(X), k=\overline{2,4}, X\in\boldsymbol{S_1}$, (на рис. 1 показано, как λ1>λ2, λ3, λ4), т. е. область $\boldsymbol{S_{q=1}}$ приоритетна по первому критерию. В этой области приоритет первого критерия относительно остальных всегда больше или равен единице:

$p_k^1(X)=\lambda_1(X)/\lambda_k(X)\ge 1, \forall X\in\boldsymbol{S_1}$.

Аналогично показаны области (множества точек) приоритетные по соответствующему критерию, в совокупности они дают множество точек, оптимальных по Парето, $\boldsymbol{S^o}$: $\boldsymbol{S^o}=\boldsymbol{S_1^o}\cup\boldsymbol{S_2^o}\cup\boldsymbol{S_3^o}\cup\boldsymbol{S_4^o}\cup X^o, \boldsymbol{S^o}\in\boldsymbol{S}$.

5.2.2. Решение: Векторная задача нелинейного программирования с заданным приоритетом критерия.

Для решения векторной задачи (4.1)-(4.6) разработана программа с заданным приоритетом критерия. В этом тестовом примере в качестве приоритетного критерия выбрали третий критерий q=3. Установили величину $f_q=1000$. И для этой величины определили точку (параметры для ТС) X_q, которая показана на рис. 1, 2. Такая ситуация наиболее часто возникает при проектировании технических (в том числе электротехнических) систем.

5.3. Математическая модель инженерной системы с условиями определенности и неопределенности

5.3.1. Задача векторной оптимизации с условиями определенности и неопределенности

Представим векторную задачу оптимизации, в которой реализованы условия определенности и неопределенности.

Условия определенности характеризуются тем, что известна функциональная зависимость каждого критерия $f_k(X), k = \overline{1,K}$ (3.1)-(3.2) и ограничений $G(X)$ (3.3) от параметров системы (3.4) $x_j, j = \overline{1,N}$, [14 - 16]. Таким образом, в условиях определенности известна функция $f_k(X), k = \overline{1,K}$ и ограничения $G(X)$ — это соответствует, что бесконечному множеству параметров X={$x_j, j = \overline{1,N}$} соответствует бесконечное множество оценок функций (критериев) $f_k(X), k = \overline{1,K}$. Отсюда задача в условиях определенности сводится к выбору оптимальной альтернативы. В инженерных системах это сводится к выбору оптимальных параметров, которые в полной мере соответствовали целевым установкам (характеристикам) системы.

Условия неопределенности характеризуются тем, что исходные данные, характеризующие исследуемого объекта, представлены: а) случайными, б) нечеткими, или, в) не полными данными, т. е *в условиях неопределенности* известны лишь конечное множество параметров: $X_i = \{x_{ij},\ j = \overline{1,N}\}, i = \overline{1,M}$ и соответствующее множество оценок функции (критерия):

$$y_k\big(X_i = \{x_{ij},\ j = \overline{1,N}\}, i = \overline{1,M}\big), k = \overline{1,K}.$$

Поэтому отсутствует достаточная информация о функциональной зависимости каждой характеристики и ограничений от параметров [17 - 22]. Данные опции a) и b) преобразуются в данные опции c) и представляются в табличной форме. В работе рассматривается опция c) информация с неполными данными, которые, как правило, получены из эксперимента. При моделировании условия определенности: $f_k(X), k = \overline{1,K}$; неопределенности $y_k\big(X_i = \{x_{ij},$ $j = \overline{1,N}\}, i = \overline{1,M}\big), k = \overline{1,K}$ совмещаются. Модель инженерной системы должна отражать эти условия. Представим модель инженерной системы в условиях определенности, неопределенности в совокупности в виде векторной (многокритериальной) задачи:

$$Opt\ F(X) = \{\max F_1(X) = \{\max f_k(X), k = \overline{1,K_1^{def}}\},$$
$$\max I_1(X) \equiv \{\max y_k(X_i,\ i = \overline{1,M})\}^T, k = \overline{1,K_1^{unc}}\}, \tag{5.1}$$
$$\min F_2(X) = \{\min f_k(X), k = \overline{1,K_2^{def}},$$
$$\min I_2(X) \equiv \{\min y_k(X_i,\ i = \overline{1,M})\}^T, k = \overline{1,K_1^{unc}}\}\}, \tag{5.2}$$
$$\text{при ограничениях}\quad f_k^{min} \le f_k(X) \le f_k^{max}, k = \overline{1,K}, \tag{5.3}$$
$$x_j^{min} \le x_j \le x_j^{max}, j = \overline{1,N}, \tag{5.4}$$

где $X = \{x_j,\ j = \overline{1,N}\}$ - вектор управляемых переменных (входных параметров исследуемого объекта);

$F(X) = \{F_1(X)\ F_2(X)\ I_1(X)\ I_2(X)\}$ - векторный критерий, каждая компонента которого представляет вектор критериев (выходных характеристик исследуемого объекта). Величина характеристики (функции) зависит от дискретных значений вектора переменных X. $F_1(X)\ F_2(X)$ - множество функций *max* и *min* соответственно; $I_1(X)\ I_2(X)$ множество дискретных значений характеристик *max* и *min* соответственно; $\overline{1,K_1^{def}}, \overline{1,K_2^{def}}$ (*definiteness*), $\overline{1,K_1^{unc}}, \overline{1,K_2^{unc}}$ (*uncertainty*) множество критериев *max* и *min* сформированные в условиях определенности и неопределенности; в (3.3) $f_k^{min} \le f_k(X) \le f_k^{max}, k = \overline{1,K}$ – вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование исследуемого объекта, $x_j^{min} \le x_j \le x_j^{max}, j = \overline{1,N}$ – параметрические ограничения, накладываемые на исследуемый объект.

5.3.2. Преобразование задачи принятия решения в условиях неопределённости в векторную задачу в условиях определенности

Преобразование неопределенности состоит в использовании качественных и количественных описаний исследуемого объекта, например, по принципу “вход-выход”. Количественные данные исследуемого объекта (инженерной системы) могут быть получены в результате экспериментальных исследований. В этом случае матрица экспериментальных исследований примет вид:

$I = |X, Y| = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{i(N-1)}, x_{iN};\ y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{i(K-1)},\ y_{iK}, i = \overline{1, M}\}$,

где $|X| = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{i(N-1)}, x_{iN}, i = \overline{1, M}\}$ – параметры инженерной системы, $\boldsymbol{N}$ – множество параметров ИС; $|Y| = \{ y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{i(K-1)},\ y_{iK}, i = \overline{1, M}\}$ – характеристики инженерной системы, $\boldsymbol{K}$ – множество характеристик (критериев) ИС.

Преобразования информации $I = |X, Y|$, которые представляют исходные данные, в функциональную зависимость осуществляется путем использования математических методов (регрессионного анализа), [18-23].

Преобразование вектор - функции (критериев) осуществляется по методу наименьших квадратов:

$\min \sum_{i=1}^{M} (y_i - \overline{y}_i)^2$,

где $y_i, i = \overline{1, M}$ - реально наблюдаемые величины; $\overline{y}_i, i = \overline{1, M}$ их оценки, полученные для однофакторной модели с помощью функции $\overline{y}_i = f(X_i, A), X_i = \{x_i\}$. Функцию $f(X_i, A)$ представили в виде полинома. В прикладной части работы используется полином второй степени.

В результате такого преобразования исходные данные в (5.1):

$\{f_k(X_i,\ i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}$ и (5.2) $\{f_k(X_i,\ i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_2^{unc}}$

в задачах принятия решения в условиях неопределенности преобразованы функции: $f_k(X), k = \overline{1, K_1^{unc}}, \{f_k(X), k = \overline{1, K_2^{unc}}$

В итоге векторная задача с условиями определенности и неопределенности (5.1)-(5.4) преобразуется в векторную задачу в условиях определенности:

$$Opt\ F(X) = \{\max F_1(X) = \{\max f_k\ (X).\ k = \overline{1, K_1}\}, \tag{5.5}$$

$$\min F_2(X) = \{\min f_k\ (X).\ k = \overline{1, K_2}\}\}, \tag{5.6}$$

$$\text{at restriction}\ \ f_k^{min} \leq\ f_k(X) \leq f_k^{max}, k = \overline{1, K}\ , \tag{5.7}$$

$$x_j^{min} \leq x_j \leq\ x_j^{max}, j = \overline{1, N}, \tag{5.8}$$

где $F(X) = \{f_k,\ k = \overline{1, K}$ - векторный критерий, каждая компонента которого представляет характеристику исследуемого объекта, функционально зависящую от вектора переменных X; подмножество критериев в условиях определенности:

$$K_1 = K_1^{def} \cup K_1^{unc}, \tag{5.9}$$

и в условиях определенности:

$$K_2 = K_2^{def} \cup K_2^{unc}. \tag{5.10}$$

Векторная задача математического программирования (5.5)-(5.8) является аналогом ВЗМП (3.1)-(3.4) и для ее решения используются те же методы.

6. Моделирование и выбор оптимальных параметров технической системы в условиях определенности и неопределенности

6.1. Методология выбора оптимальных параметров инженерных систем в условиях определенности, неопределенности

В качестве объекта исследования нами рассматриваются «Инженерные системы», к которым относятся технические (электротехнические) системы, технологические процессы, материалы, динамические системы, [24, 25].

Методология выбора оптимальных параметров инженерных систем построена с учетом этапов процесса моделирования развития инженерных систем (раздел 4), методология построения математической модели инженерной системы (раздел 1), а также теории и методов решения векторных задач (разделы 2, 3).

Исследование инженерной системы рассматривается с учетом, во-первых, условий определенности, когда известны данные о функциональных характеристиках инженерной системы; во-вторых, с условиями неопределенности, когда известны дискретные значения отдельных характеристик, которые, как правило, получены по экспериментальным данным; также известны данные об ограничениях, которые накладываются на функционирование системы. Математический аппарат моделирования инженерной системы базируется на теории и методах векторной оптимизации, которые представлены в третьем разделе. В организационном плане процесс моделирования и симулирования технической системы представлен в виде методологии, включающей ряд этапов:

«***Методология выбора оптимальных параметров инженерных систем в условиях определенности и неопределенности***».

1 этап. Формирование технического задания (исходных данных) на численное моделирование и выбора оптимальных параметров системы. Исходные данные формирует конструктор, который проектирует техническую систему.

2 этап. Построение математической и численной модели технической системы в условиях определенности и неопределенности.

3 этап. Решение векторной задачи математического программирования (ВЗМП) - модели инженерной системы при равнозначных критериях (решение прямой задачи).

4 этап. Построение геометрической интерпретации результатов решения в трехмерной системе координат в относительных единицах.

5 этап. Решение векторной задачи математического программирования - модели инженерной системы при заданном приоритете критерия (решение обратной задачи).

6 этап. Геометрическая интерпретация результатов решения в трехмерной системе координат в физических единицах.

6.2. 1 этап. ***Техническое задание для «Выбора оптимальных параметров технической системы».***

Дано. Функционирование технической системы определяется четырьмя параметрами $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, которые представляют вектор управляемых переменных. Параметры ТС заданы в следующих пределах:

$$22 \leq x_1 \leq 88, 0 \leq x_2 \leq 66, 2.2 \leq x_3 \leq 8.8, 2.2 \leq x_4 \leq 8.8. \quad (6.1)$$

Функционирование ТС определяются четырьмя характеристиками (критериями) $F(X) = \{f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)\}$, величина оценки которых зависит от вектора параметров X.

Условия определенности. Для первой и третьей характеристики $f_1(X)$ и $f_4(X)$ известна функциональная зависимость от параметров $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$.

$$f_1(X) = 296.85 - 1.874x_1 - 2.911x_2 + 8.939x_3 + 10.936x_4 + 0.0734x_1x_2 - 0.0047x_1x_3 - 0.0128x_1x_4 + 0.0563x_2x_3 - 0.0789x_2x_4 - 0.0025x_3x_4 + 0.0108x_1^2 + 0.0089x_2^2 - 0.1844x_3^2 - 0.3808x_4^2, \quad (6.2)$$

$$f_4(X) = 19.253 - 0.0081x_1 - 0.7005x_2 - 0.3605x_3 + 0.9769x_4 + 0.0126x_1 * x_2 + 0.0644x_1x_3 - 0x_1x_4 + 0.0396x_2x_3 + 0.0002x_2x_4 + 0.0004x_3x_4 - 0.0016x_1^2 + 0.0027x_2^2 + 0.0045x_3^2 - 0.0235x_4^2, \quad (6.3)$$

Условия неопределенности. Для второй, третьей характеристики известны результаты экспериментальных данных: величины параметров и соответствующих характеристик. Числовые значения параметров X и характеристик $y_2(X), y_3(X)$ представлены в таблице 1.

Таблица 1

Числовые значения параметров, характеристик технической системы

x_1	x_2	x_3	x_4	$y_2(X)$→min	$y_3(X)$→max
22.0	0.0	2.2	2.2	1053.8	47.7
22.0	0.0	2.2	5.5	1067.0	47.3
22.0	0.0	2.2	8.8	1078.0	47.2
22.0	0.0	5.5	2.2	1111.0	50.7
22.0	0.0	5.5	5.5	1155.0	46.8
22.0	0.0	5.5	8.8	1152.8	46.3
22.0	0.0	8.8	2.2	1151.7	44.2

22.0	0.0	8.8	5.5	1148.4	43.0
22.0	0.0	8.8	8.8	1147.3	42.5
22.0	33.0	2.2	2.2	1964.6	58.3
22.0	33.0	2.2	5.5	1974.5	57.5
22.0	33.0	2.2	8.8	1983.3	57.1
22.0	33.0	5.5	2.2	1995.4	56.5
22.0	33.0	5.5	5.5	2003.1	55.1
22.0	33.0	5.5	8.8	2015.2	54.9
22.0	33.0	8.8	2.2	2027.3	54.8
22.0	33.0	8.8	5.5	2046.0	52.8
22.0	33.0	8.8	8.8	2058.1	53.0
22.0	66.0	2.2	2.2	2708.2	75.9
22.0	66.0	2.2	5.5	2585.0	71.5
22.0	66.0	2.2	8.8	2541.0	68.2
22.0	66.0	5.5	2.2	2519.0	66.4
22.0	66.0	5.5	5.5	2596.0	68.2
22.0	66.0	5.5	8.8	2662.0	70.4
22.0	66.0	8.8	2.2	2770.9	72.4
22.0	66.0	8.8	5.5	2783.0	71.5
22.0	66.0	8.8	8.8	2801.7	70.6
55.0	0.0	2.2	2.2	3284.6	100.5
55.0	0.0	2.2	5.5	3301.1	100.1
55.0	0.0	2.2	8.8	3307.7	99.0
55.0	0.0	5.5	2.2	3315.4	98.8
55.0	0.0	5.5	5.5	3320.9	97.9
55.0	0.0	5.5	8.8	3334.1	97.6
55.0	0.0	8.8	2.2	3347.3	97.0
55.0	0.0	8.8	5.5	3366.0	95.7
55.0	0.0	8.8	8.8	3378.1	95.3
55.0	33.0	2.2	2.2	1095.6	54.6
55.0	33.0	2.2	5.5	1111.0	50.6
55.0	33.0	2.2	8.8	1133.0	48.4
55.0	33.0	5.5	2.2	1147.3	47.7
55.0	33.0	5.5	5.5	1166.0	46.2
55.0	33.0	5.5	8.8	1188.0	45.1
55.0	33.0	8.8	2.2	1208.9	44.2
55.0	33.0	8.8	5.5	1232.0	42.2
55.0	33.0	8.8	8.8	1272.7	40.7
55.0	66.0	2.2	2.2	1995.4	61.8
55.0	66.0	2.2	5.5	2013.0	60.5
55.0	66.0	2.2	8.8	2035.0	59.4
55.0	66.0	5.5	2.2	2058.1	58.3
55.0	66.0	5.5	5.5	2095.5	57.2
55.0	66.0	5.5	8.8	2103.2	56.1
55.0	66.0	8.8	2.2	2120.8	54.8
55.0	66.0	8.8	5.5	2145.0	47.3
55.0	66.0	8.8	8.8	2183.5	51.3
88.0	0.0	2.2	2.2	2739.0	79.4
88.0	0.0	2.2	5.5	2761.0	78.1
88.0	0.0	2.2	8.8	2783.0	77.0
88.0	0.0	5.5	2.2	2801.7	75.9
88.0	0.0	5.5	5.5	2849.0	76.1
88.0	0.0	5.5	8.8	2893.0	76.6
88.0	0.0	8.8	2.2	2974.4	76.8

88.0	0.0	8.8	5.5	2959.0	71.5
88.0	0.0	8.8	8.8	2927.1	68.2
88.0	33.0	2.2	2.2	3315.4	104.1
88.0	33.0	2.2	5.5	3336.3	102.3
88.0	33.0	2.2	8.8	3355.0	101.2
88.0	33.0	5.5	2.2	3378.1	100.5
88.0	33.0	5.5	5.5	3399.0	99.0
88.0	33.0	5.5	8.8	3421.0	97.9
88.0	33.0	8.8	2.2	3440.8	97.0
88.0	33.0	8.8	5.5	3366.0	95.7
88.0	33.0	8.8	8.8	3503.5	93.5
88.0	66.0	2.2	2.2	1116.5	58.3
88.0	66.0	2.2	5.5	1144.0	56.1
88.0	66.0	2.2	8.8	1166.0	55.0
88.0	66.0	5.5	2.2	1208.9	53.0
88.0	66.0	5.5	5.5	1232.0	50.6
88.0	66.0	5.5	8.8	1276.0	48.4
88.0	66.0	8.8	2.2	1303.5	47.7
88.0	66.0	8.8	5.5	1342.0	44.0
88.0	66.0	8.8	8.8	1397.0	42.5
Минимальные значения				1053.8	40.7
Максимальные значения				3503.5	104.1
Индекс корреляции				0.7149	0.6551
Коэффициент детерминации				0.5111	0.4292

В решении, величину оценки по первой и третьей характеристики (критерия) желательно, получить как можно выше: $f_1(X) \to max\ f_3(X) \to max$; второй и четвертой как можно ниже: $y_2(X) \to min\ f_4(X) \to min$. Параметры $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ изменяются в пределах:

$$x_1 \in [22.55.88.], x_2 \in [0.33.66.], x_3, x_4 \in [2.2\ 5.5\ 8.8]. \quad (6.4)$$

Требуется. Построить модель системы в виде векторной задачи. Решить векторную задачу с равнозначными критериями. Выбрать приоритетный критерий. Установить численное значение приоритетного критерия. Принять наилучшее (оптимальное) решение с заданным приоритетом критерия.

Примечание. Автором разработано в системе MATLAB программное обеспечение для решения векторных задач математического программирования. Векторная задача включает четыре переменных (параметров технической системы): $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ и четырьмя критерия (характеристики)

$F(X) = \{f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)\}$. Но для каждых новых данных (новая система) программа настраивается индивидуально. В программном обеспечении критерии $F(X) = \{f_1(X), f_2(X), \dots, f_6(X)\}$ с условиями неопределенности (в таблице 1 они представлены как часть $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$) могут изменяться от нуля (т.е. все критерии построены в условиях определенности) до шести (т.е. все критерии построены в условиях неопределенности).

6.3. 2 этап *Математическая и числовая модель системы в условиях определенности и неопределенности.*

6.3.1. *Математическая модель инженерной системы.*

Математическая модель представлена в условиях определенности и неопределенности в совокупности:

$$Opt\ F(X) = \{\max F_1(X) = \{\max f_k(X), k = \overline{1, K_1^{def}}\}, \quad (6.5)$$

$$\max I_1(X) \equiv \{\max f_k(X_i,\ i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\} \quad (6.6)$$

$$\min F_2(X) = \{\min f_k (X), k = \overline{1, K_2^{def}}, \quad (6.7)$$
$$\min I_2(X) \equiv \{\min f_k (X_i,\ i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}, \quad (6.8)$$

при ограничениях

$$f_k^{min} \le f_k(X) \le f_k^{max}, k = \overline{1, K}, x_j^{min} \le x_j \le x_j^{max}, j = \overline{1, N}, \quad (6.9)$$

где обозначения аналогично задаче (3.1)-(3.4).

6.3.2. *Построение числовой модели ТС в условиях определенности*

Построение в условиях определенности определяется функциональной зависимостью каждой характеристики и ограничений от параметров ТС. Используя данные (6.1)-(6.3) построим задачу нелинейного программирования с двумя критериями в условиях определенности:

$$f_1(X) = 296.85 - 1.874x_1 - 2.911x_2 + 8.939x_3 + 10.936x_4 + 0.0734x_1x_2 - 0.0047x_1x_3 - 0.0128x_1x_4 + 0.0563x_2x_3 - 0.0789x_2x_4 - 0.0025x_3x_4 + 0.0108x_1^2 + 0.0089x_2^2 - 0.1844x_3^2 - 0.3808x_4^2, \quad (6.10)$$

$$f_4(X) = 19.253 - 0.0081x_1 - 0.7005x_2 - 0.3605x_3 + 0.9769x_4 + 0.0126x_1x_2 + 0.0644x_1x_3 - 0x_1x_4 + 0.0396x_2x_3 + 0.0002x_2x_4 + 0.0004x_3x_4 - 0.0016x_1^2 + 0.0027x_2^2 + 0.0045x_3^2 - 0.0235x_4^2, \quad (6.11)$$

ограничения: $22 \le x_1 \le 88, 0 \le x_2 \le 66, 2.2 \le x_3 \le 8.8, 2.2 \le x_4 \le 8.8.$ (6.12)

6.3.3. **3 этап**. *Преобразование экспериментальных данных (условий неопределенности)* в данные с *функциональной зависимостью (условия определенности) и построение численной модели*

Построение в условиях неопределенности состоит в использовании качественных и количественных описаний технической системы, полученных по принципу “вход-выход” в таблице 1. Преобразование информации (исходные данные $y_2(X), y_3(X)$ в функциональный вид $f_2(X), f_3(X)$ осуществляется путем использования математических методов (регрессионного анализа). Исходные данные таблицы 1:

$y_2(X_i, i = \overline{1, M})$, $y_3(X_i, i = \overline{1, M})$, преобразуются путем использования математических методов (регрессионного анализа) в функциональный вид: $f_2(X), f_3(X)$. Данные таблицы 4 представлены в системе MATLAB в виде матрицы:

$$I = \begin{vmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_M \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 = x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}\ f_2(X_1), f_3(X_1) \\ \dots \\ X_M = x_{M1}, x_{M2}, x_{M3}, x_{M4}\ f_2(X_M), f_3(X_M) \end{vmatrix}, \quad (6.13)$$

где $a_1 \dots a_M$ количество экспериментов.

Для каждого набора экспериментального данных $y_k, k = 2, 3$ строится функция регрессии методом наименьших квадратов $\min \sum_{i=1}^{M} (y_i - \overline{y_i})^2$ в системе MATLAB. Для этого формируется полином A_k, определяющий взаимосвязь параметров $X_i = \{x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4}\}$ и функции $\overline{y_{ki}} = f(X_i, A_k), k = 2, 4$. Результатом является система коэффициентов $A_k = \{A_{0k}, A_{1k}, \dots, A_{14k}\}$ квадратичного полинома:

$$f_k(X, A) = A_{0k} + A_{1k}x_1 + A_{2k}x_2 + A_{3k}x_3 + A_{4k}x_4 + A_{5k}x_1x_2 + A_{6k}x_1x_3 + A_{7k}x_1x_4 + A_{8k}x_2x_3 + A_{9k}x_2x_4 + A_{10k}x_3x_4 + A_{11k}x_1^2 + A_{12k}x_2^2 + A_{13k}x_3^2 + A_{14k}x_4^2, k = 2, 3. \quad (6.14)$$

Программное обеспечение полиномиальной аппроксимации с четырьмя переменными и четырнадцатью факторами представлено в [18, 43, 44]. В итоге экспериментальные данные таблицы 4 преобразуются систему коэффициентов двух функции вида (7.24) в виде таблицы:

%	$f_2(X)$	$f_3(X)$	
Ao=[	875.3	43.734	% A_{0k}
	23.893	0.6598	%A_{1k}
	−30.866	0.4493	%A_{2k}
	−25.858	−0.3094	%A_{3k}
	−45	−1.8334	%A_{4k}
	−0.6984	−0.01	%A_{5k}
	0.4276	−0.0062	%A_{6k}

$$\begin{array}{lll} 0.6793 & 0.0146 & \%A_{7k} \\ -0.1167 & -0.013 & \%A_{8k} \\ 0.2969 & 0.0121 & \%A_{9k} \\ -0.0093 & -1.8334 & \%A_{10k} \\ 0.0362 & -0.0003 & \%A_{11k} \\ 0.0331 & 0.0002 & \%A_{12k} \\ 2.9158 & 0.0254 & \%\ A_{13k} \\ 2.4052 & 0.0939]; & \%A_{14k} \end{array}$$

Функции $f_2(X)$ и $f_3(X)$ учетом полученных коэффициентов примут вид:

$$f_2(X) = 875.3 + 23.893x_1 - 30.866x_2 - 25.858x_3 - 45x_4 - 0.6984x_1x_2 + 0.4276x_1x_3 + 0.6793x_1x_4 - 0.1167x_2x_3 + 0.2969x_2x_4 - 0.0093x_3x_4 + 0.0362x_1^2 + 0.0331x_2^2 + 2.9158x_3^2 + 2.4052x_4^2. \quad (6.15)$$

$$f_3(X) = 43.734 + 0.6598x_1 + 0.4493x_2 - 0.3094x_3 - 1.8334x_4 - 0.01x_1x_2 - 0.0062x_1x_3 + 0.0146x_1x_4 - 0.013x_2x_3 + 0.0121x_2x_4 - 0.0004x_3x_4 - 0.0003x_1^2 - 0.0002x_2^2 + 00.0254x_3^2 + 0.0939x_4^2. \quad (6.16)$$

Минимальные и максимальные значения экспериментальных данных $y_2(X)$, $y_3(X)$ представлены в нижней части таблицы 1. Индекс корреляции и коэффициенты детерминации представлены в нижних строках таблицы 1.

6.3.4. *Построение модели технической системы в условиях определенности и неопределенности*

Для построения математической модели технической системы используем: функции, полученные условиях определенности (6.10), (6.11) и неопределенности (6.15), (6.16), параметрические ограничения (6.12).

Функции (6.10), (6.11), (6.15), (6.16) рассматриваем как критерии, определяющие целенаправленность функционирования системы. Множество критериев K=4 включают два критерия $f_1(X), f_3(X) \to \max$ и два $f_2(X), f_4(X) \to \min$. В итоге модель функционирования технической системы представим векторной задачей математического программирования:

$$opt\ F(X) = \{\max F_1(X) = \{\max f_1(X) \equiv 296.85 - 1.874x_1 - 2.911x_2 + 8.939x_3 + 10.936x_4 + 0.0734x_1x_2 - 0.0047x_1x_3 - 0.0128x_1x_4 + 0.0563x_2x_3 - 0.0789x_2x_4 - 0.0025x_3x_4 + 0.0108x_1^2 + 0.0089x_2^2 - 0.1844x_3^2 - 0.3808x_4^2, \quad (6.17)$$

$$\max f_3(X) \equiv 43.734 + 0.6598x_1 + 0.4493x_2 - 0.3094x_3 - 1.8334x_4 - 0.01x_1x_2 - 0.0062x_1x_3 + 0.0146x_1x_4 - 0.013x_2x_3 + 0.0121x_2x_4 - 0.0004x_3x_4 - 0.0003x_1^2 - 0.0002x_2^2 + 00.0254x_3^2 + 0.0939x_4^2\}, \quad (6.18)$$

$$\min F_1(X) = \{\min f_2(X) \equiv 875.3 + 23.893x_1 - 30.866x_2 - 25.858x_3 + 45x_4 - 0.698x_1x_2 + 0.4276x_1x_3 + 0.679x_1x_4 - 0.1167x_2x_3 + 0.297x_2x_4 - 0.0093x_3x_4 + 0.0362x_1^2 + 0.0331x_2^2 + 2.9158x_3^2 + 2.4052x_4^2, \quad (6.19)$$

$$\min f_4(X) \equiv 19.253 - 0.0081x_1 - 0.7005x_2 - 0.3605x_3 + 0.9769x_4 + 0.0126x_1x_2 + 0.0644x_1x_3 - 0x_1x_4 + 0.0396x_2x_3 + 0.0002x_2x_4 + 0.0004x_3x_4 - 0.0016x_1^2 + 0.0027x_2^2 + 0.0045x_3^2 - 0.0235x_4^2\}\}, \quad (6.20)$$

ограничения: $22 \le x_1 \le 88, 0 \le x_2 \le 66, 2.2 \le x_3 \le 8.8, 2.2 \le x_4 \le 8.8.$ (6.21)

Задача векторной оптимизации (6.17)-(6.21) представляет модель принятия оптимального решения в условиях определенности и неопределенности в совокупности.

6.4. 3 этап. *Решение векторной задачи с равнозначными критериями*

Решение векторной задачи с равнозначными критериями включает два блока: 1-й блок системного анализа, состоящего из трех шагов; 2-й блок построения и принятия оптимального решения (λ-задачи).

Блок 1. Системный анализ.

Шаг 1. Решение задачи (6.16)-(6.20) по каждому критерию отдельно, при этом используется функция fmincon(…) системы MATLAB. В результате расчета по каждому критерию получаем точки оптимума: X_k^* и $f_k^* = f_k(X_k^*), k = \overline{1,K}, K$=4– величины критериев в этой точке, т. е. наилучшее решение по каждому критерию:

$X_1^* = \{x_1 = 88.0, x_2 = 66.0, x_3 = 8.8, x_4 = 2.2\}, f_1^* = f_1(X_1^*) = -535.06;$
$X_2^* = \{x_1 = 22.0, x_2 = 0.0, x_3 = 2.83, x_4 = 6.25\}, f_2^* = f_2(X_2^*) = 1301.2;$
$X_3^* = \{x_1 = 88.0, x_2 = 0.0, x_3 = 2.2, x_4 = 8.8\}, f_3^* = f_3(X_3^*) = -100.15;$
$X_4^* = \{x_1 = 22.0, x_2 = 62.17, x_3 = 2.2, x_4 = 2.2\}, f_4^* = f_4(X_4^*) = 12.247.$

Ограничения (6.20) и точки оптимума $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$ в координатах $\{x_1, x_2\}$ представлены на рис. 3.

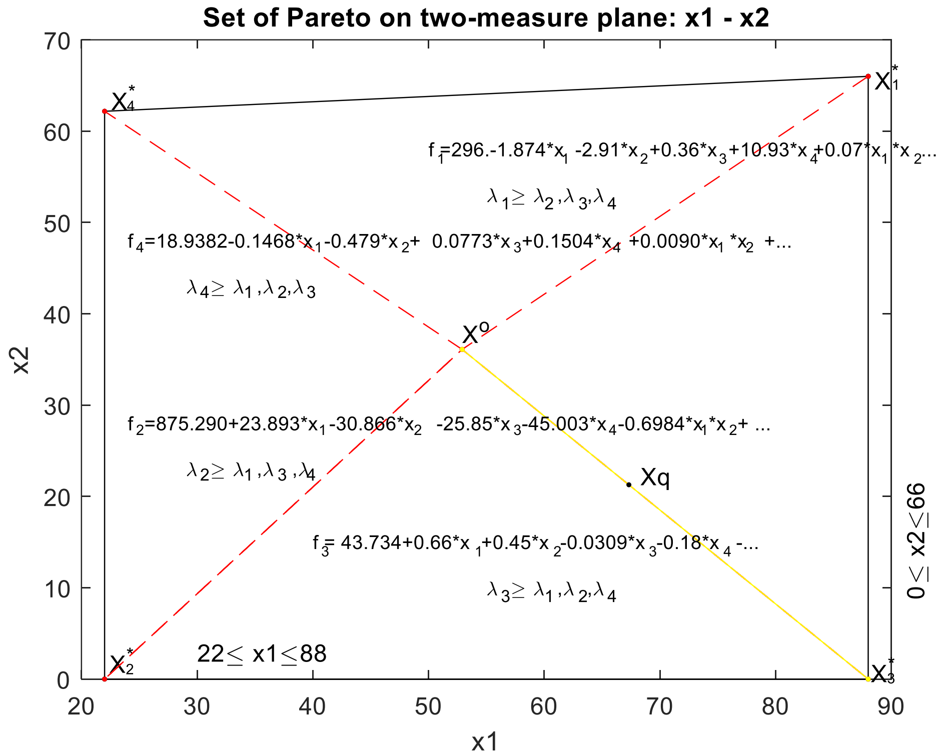

Рис. 3. Множество Парето, $\boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S}$, $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$ в двухмерных системах координат $\{x_1, x_2\}$

Шаг 2. Определяем наихудшую величину каждого критерия (анти оптимум): X_k^0 и $f_k^0 = f_k(X_k^0), k = \overline{1, K}, K = 4$. Для чего решается задача (6.16)-(6.20) для каждого критерия $k = \overline{1, K_1}$ на минимум, для каждого критерия $k = \overline{1, K_2}$ на максимум. В результате решения получим: $X_k^0 = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ - точка оптимума по соответствующему критерию, $k = \overline{1, K}$; $f_k^0 = f_k(X_k^0)$ – величина k-го критерия в точке, $X_k^0, k = \overline{1, K}$, (верхний индекс ноль):

$X_1^0 = \{x_1 = 22.0, x_2 = 66.0, x_3 = 2.2, x_4 = 2.2\}, f_1^0 = f_1(X_1^0) = 243.25;$
$X_2^0 = \{x_1 = 88.0, x_2 = 0.0, x_3 = 8.8, x_4 = 8.8\}, f_2^0 = f_2(X_2^0) = -3903.1;$
$X_3^0 = \{x_1 = 22.0, x_2 = 0.0, x_3 = 8.8, x_4 = 8.07\}, f_3^0 = (X_3^0) = 50.03;$
$X_4^0 = \{x_1 = 88.0, x_2 = 66.0, x_3 = 8.8, x_4 = 8.8\}, f_4^0 = f_4(X_4^0) = -121.83.$

Шаг 3. Выполняется системный анализ множества точек, оптимальных по Парето, (т.е. анализ по каждому критерию). В точках оптимума $X^* = \{X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*\}$ определяются величины целевых функций $F(X^*) = \left\| f_q(X_k^*) \right\|_{q=\overline{1,K}}^{k=\overline{1,K}}$, $D = (d_1\ d_2\ d_3\ d_4)^T$- вектор отклонений по каждому критерию на допустимом множестве S: $d_k = f_k^* - f_k^0, k = \overline{1,4}$, и матрица относительных оценок: $\lambda(X^*) = \left\| \lambda_q(X_k^*) \right\|_{q=\overline{1,K}}^{k=\overline{1,K}}$, где $\lambda_k(X) = (f_k^* - f_k^0)/d_k$.

$$F(X^*) = \begin{Vmatrix} 535.1\ 1731.9\ 58.1\ 117.0 \\ 317.6\ 1301.2\ 51.3\ 26.5 \\ 192.5\ 3614.3\ 100.2\ 24.6 \\ 244.0\ 2458.2\ 67.7\ 12.2 \end{Vmatrix}, \; d_k = \begin{Vmatrix} 291.8 \\ -2602.0 \\ 50.12 \\ -109.58 \end{Vmatrix},$$

$$\lambda(X^*) = \begin{Vmatrix} 1.0000\ 0.8345\ 0.1603\ 0.0443 \\ 0.2548\ 1.0000\ 0.0244\ 0.8697 \\ -0.1740\ 0.1110\ 1.0000\ 0.8870 \\ 0.0027\ 0.5553\ 0.3532\ 1.0000 \end{Vmatrix}. \quad (6.22)$$

Анализ критериев в относительных оценках показывает, что в точках оптимума $X^* = \{X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*\}$ (по диагонали) относительная оценка равна единице. Остальные критерии значительно меньше единицы. Требуется найти такую точку (параметры), при которых относительные оценки наиболее близки к единице. На решение этой проблемы направлено решение λ-задачи.

Блок 2. Построение и принятие оптимального решения.

Шаг 4. Построение λ-задачи осуществляется в два этапа: первоначально строится максиминная задача с нормализованными критериями:

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{X\in S}\boldsymbol{min}_{k\in K}\lambda_k(X), G(X)\leq 0, X \geq 0, \quad (6.23)$$

которая на втором этапе преобразуется в стандартную задачу математического программирования (λ-задача):

$$\lambda^o = max\,\lambda, \quad (6.24)$$

При ограничениях $\lambda - \frac{f_1(X)-f_1^0}{f_1^*-f_1^0} \leq 0,$ (6.25)

$$\lambda - \frac{f_3(X)-f_3^0}{f_3^*-f_3^0} \leq 0, \quad (6.26)$$

$$\lambda - \frac{f_2(X)-f_2^0}{f_2^*-f_2^0} \leq 0, \quad (6.27)$$

$$\lambda - \frac{f_4(X)-f_4^0}{f_4^*-f_4^0} \leq 0, \quad (6.28)$$

$$0\leq\lambda\leq 1, 22 \leq x_1 \leq 88, 0 \leq x_2 \leq 66, 2.2 \leq x_3 \leq 8.8, 2.2 \leq x_4 \leq 8.8, \quad (6.29)$$

где вектор неизвестных имеет размерность N+1: $\boldsymbol{X} = \{x_1, \dots, x_N, \lambda\}$; функции $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$ соответствуют (6.24)-(6.26) соответственно. Подставив числовые значения $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$, получим λ-задачу:

$$\lambda^o = max\,\lambda, \quad (6.30)$$

Ограничения: $\lambda - \frac{296.8-1.874*x1-2.91*x2\ \dots -0.184*x_3^2-0.38*x_4^2-f_1^0}{f_1^*-f_1^0} \leq 0,$ (6.31)

$$\lambda - \frac{43.734+0.6598*x1+0.449*x2- \dots +00.0254*x_3^2+0.0939*x_4^2-f_3^0}{f_3^*-f_3^0} \leq 0, \quad (6.32)$$

$$\lambda - \frac{875.3+23.9*x1-30.8*x2- \dots +2.9158*x_3^2+2.4052*x_4^2-f_2^0}{f_2^*-f_2^0} \leq 0, \quad (6.33)$$

$$\lambda - \frac{19.253-0.0081*x1-0.7005*x2- \dots +0.0045*x_3^2-0.0235*x_4^2-f_4^0}{f_4^*-f_4^0} \leq 0, \quad (6.34)$$

$$0\leq\lambda\leq 1, 22 \leq x_1 \leq 88, 0 \leq x_2 \leq 66, 2.2 \leq x_3 \leq 8.8, 2.2 \leq x_4 \leq 8.8, \quad (6.35)$$

[Xo,Lo]=*fmincon*('Z_TehnSist_4Krit_L',X0,Ao,bo,Aeq,beq,lbo,ubo,'Z_TS_LConst',options)

В результате решения ВЗМП (6.16)-(6.20) при равнозначных критериях и соответствующей ей λ-задачи (6.29)-(6.34) получили:

$$\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\} = \{X^o = \{x_1 = 52.9, x_2 = 36.097, x_3 = 8.8, x_4 = 2.2,\ \lambda^o = 0.3179\} - \text{точку оптимума}, \quad (6.36)$$

которая характеризует конструктивные параметры ТС, представлена рис. 1;

$f_k(X^o), k = \overline{1,K}$- величины критериев (характеристик ТС):

$$\{f_1(X^o) = 336, f_2(X^o) = 2239, f_3(X^o) = 65.96, f_4(X^o) = 58.435\}; \quad (6.37)$$

$\lambda_k(X^o), k = \overline{1,K}$- величины относительных оценок

$$\{\lambda_1(X^o) = 0.3179, \lambda_2(X^o) = 0.6394, \lambda_3(X^o) = 0.3179, \lambda_4(X^o) = 0.5785\}; \quad (6.38)$$

λ^o=0.3179 – это максимальный нижний уровень среди всех относительных оценок, измеренный в относительных единицах:

$\lambda^o = min\,(\lambda_1(X^o), \lambda_2(X^o), \lambda_3(X^o), \lambda_4(X^o)) = 0.3179,$

λ^o – называют также гарантированным результатом, измеренном в относительных единицах, т. е. $\lambda_k(X^o)$ и соответственно характеристики технической системы $f_k(X^o)$ нельзя улучшить, не ухудшая при этом другие характеристики.

Заметим, что в соответствии с теоремой с 1, в точке X^o критерии 1 и 3 противоречивы. Это противоречие определяется равенством $\lambda_1(X^o) = \lambda_3(X^o) = \lambda^o = 0.3179$, а остальные критерии неравенством $\{\lambda_2(X^o) = 0.6394, \lambda_4(X^o) = 0.5785\} > \lambda^o$.

Теорема 1 служит основой для определения правильности решения векторной задачи. В векторной задаче, как правило, для двух критериев выполняется равенство:

$\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_p(X^o),\ q, p \in \boldsymbol{K}, X \in S$,, (в примере такие критерии 1 и 3). А для других критериев определяется как неравенство.

6.5. Этап 4. *Геометрическое представление результатов принятия решения в трехмерной системе координат в относительных единицах.*

На множестве точек S, образованных ограничениями (6.34), точки оптимума $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$, объединенных в контур, представляют множество точек, оптимальных по Парето, $So \subset S$, представлен на рис 3. Координаты этих точек, а также характеристики технической системы в относительных единицах $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3, \lambda_4(X)$ показаны на рис. 4 в трех мерном пространстве $x_1\ x_2$ и λ, где третья ось λ - относительная оценка.

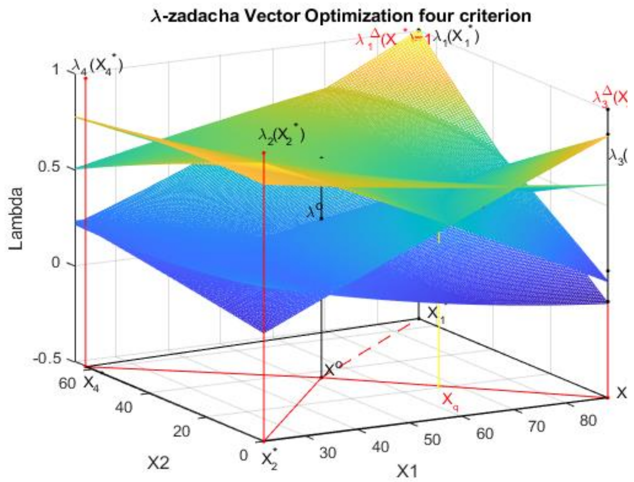

Рис. 4. Решение λ-задачи в трехмерной системе координат $\{x_1, x_2\}$ и λ

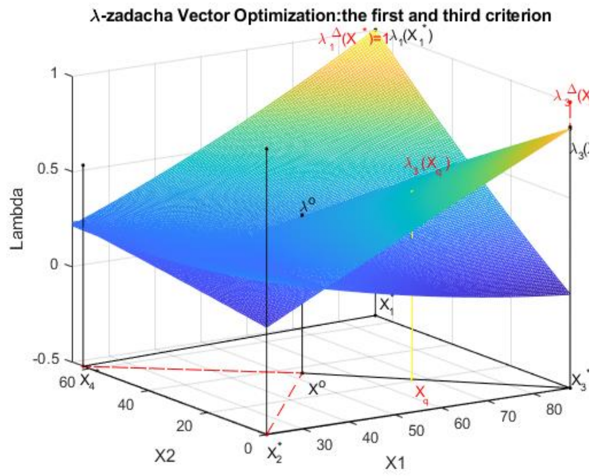

Рис. 5. Решение λ-задачи с $\lambda_1(X), \lambda_3(X)$ критериями в трехмерной системе координат $\{x_1, x_2\}$и λ

Глядя на рисунок 4, мы можем представить изменения всех функций $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3(X), \lambda_4(X)$ в четырехмерном пространстве.

Рассмотрим, например, оптимальную точку X_3^*. Функция $\lambda_3(X)$ сформирована из функции $f_3(X)$с переменными координатами $\{x_1\ x_2\}$ и с постоянными координатами $\{x_3$=8.8, x_4=2.2$\}$, взятые из оптимальной точки X^o (6.35). В точке X_3^* относительная оценка $\lambda_3(X_3^*) =$ 0.83 – показана на рис. 2 черной точкой. Но мы знаем, что относительная оценка $\lambda_3(X_3^*)$ полученная из функции $f_3(X_3^*)$ на третьем шаге равна единице, обозначим ее как $\lambda_3^{\Delta}(X_3^*) = 1$ – показана на рис. 2 красной точкой.

Разность между $\lambda_3^{\Delta}(X_3^*) = 1$ и $\lambda_3(X_3^*) = 0.83$ является ошибкой Δ= 0.17 перехода от четырехмерной (а в общем случае N-мерной) к двухмерной области. Аналогично показана точка X_1^* и соответствующие относительные оценки $\lambda_1(X_1^*)$ и $\lambda_1^{\Delta}(X_1^*)$.

Таким образом, впервые в отечественной и зарубежной практике показан переход и его геометрическая иллюстрация от N-мерного к двухмерному измерению функции в векторных задачах математического программирования с соответствующими ошибками аппроксимации.

6.6. 5 этап. *Решение векторной задачи оптимизации - модели технической системы с заданным приоритетом критерия.*

Лицом, принимающим решения, как правило, является конструктор системы.

Шаг 1. Решение векторной задачи при равнозначных критериях. Алгоритм решения векторной задачи представлен на стадии 3. Численные результаты решения векторной задачи представлены выше.

Множество точек, оптимальных по Парето $\boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$ находится между оптимальными точками $X_1^*\ X^o\ X_3^*\ X^o\ X_4^*\ X^o\ X_2^*\ X^o\ X_1^*$. Мы проведем анализ множества точек Парето $\boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$. Для этой цели мы соединим вспомогательные точки: $X_1^* \, X_3^* \, X_4^* \, X_2^* \, X_1^*$с точкой X^o, которая условно представляет центр множества Парето. В результате получили четыре подмножеств точек $X \in \boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}, q = \overline{1,4}$. Подмножество $\boldsymbol{S_1^o} \subset \boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$ характеризуется тем, что относительная оценка $\lambda_1 \geq \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, λ4, то есть в поле первого критерия $\boldsymbol{S_1^o}$ имеет приоритет над остальными. Подобно $\boldsymbol{S_2^o}, \boldsymbol{S_3^o}, \boldsymbol{S_4^o}$- подмножества точек, где второй, третий и четвертый критерий имеет приоритет над другими соответственно. Множество точек, оптимальных по Парето, будем обозначать $\boldsymbol{S^o} = \boldsymbol{S_1^o} \cup \boldsymbol{S_2^o} \cup \boldsymbol{S_3^o} \cup \boldsymbol{S_4^o}$. Координаты всех полученных точек и относительные оценки представлены в двумерном пространстве $\{x_1 \; x_2\}$ на рис. 3. Эти координаты показаны в трех измеренных пространствах $\{x_1 \; x_2 \; \lambda\}$ на рис. 4, где третья ось λ- относительная оценка.

Ограничения набора точек, оптимальных по Парето, на рис. 4 он снижен до -0,5 (чтобы были видимы ограничения). Эта информация также является основой для дальнейшего исследования структуры множества Парето. Лицо, принимающее решения, как правило, является разработчиком системы.

Если результаты решения векторной задачи с равнозначными критериями не удовлетворяют лицо, принимающее решение, то выбор оптимального решения осуществляется из какого-либо подмножества точек $\boldsymbol{S_1^o}, \boldsymbol{S_2^o}, \boldsymbol{S_3^o}, \boldsymbol{S_4^o}$. Эти подмножества точек Парето показаны на рис.3 в виде функций $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$.

Шаг 2. Выбор приоритетного критерия $q \in \boldsymbol{K}$.

Из теории известно, что в оптимальной точке X^o всегда имеется два наиболее противоречивых критерия, $q \in \boldsymbol{K}$ и $p \in \boldsymbol{K}$, для которых в относительных единицах выполняется точное равенство:

$\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_p(X^o), q, p \in \boldsymbol{K}, X \in \boldsymbol{S}$,

а для остальных выполняется неравенства:

$\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), \forall k \in \boldsymbol{K}, \; q \neq p \neq k.$

В модели ТС (6.16)-(6.20) и соответствующей λ-задачи (6.29)-(6.34) такими критериями являются первый и третий:

$$\lambda^o = \lambda_1(X^o) = \lambda_3(X^o) = 03179. \qquad (6.38)$$

Покажем их на рис. 5, где представлены $\lambda_1(X), \lambda_3(X)$ отдельно со стороны оптимальной точки $\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\}$.

Здесь же показаны все точки и данные, о которых говорилось на рис. 4.

Как правило, из этой пары противоречивых критериев выбирается критерий, который ЛПР хотел бы улучшить. Такой критерий называется «приоритетным критерием», обозначим его $q = 3 \in \boldsymbol{K}$. Этот критерий исследуется во взаимодействии с первым критерием $q = 1 \in \boldsymbol{K}$. Мы исследуем эти два критерия из всего множества критериев $\boldsymbol{K} = 4$, показанных на рис. 5. На дисплей выдается сообщение:

q=input('Введите приоритетный критерий (номер) q= ') –

Ввели критерий q=3.

Шаг 3. Определяются числовые пределы изменения величины приоритета критерия $q = 3 \in \boldsymbol{K}$. Для приоритетного критерия $q = 3 \in \boldsymbol{K}$ определяются изменения числовых пределов в натуральных единицах при переходе из точки оптимума X^o (6.36) в точку X_q^*, полученную на первом шаге. Данные о критерии q=3 выдаются на экран:

$$f_q(X^o) = \; 65.96 \leq f_q(X) \leq 100.15 = \; f_q(X_q^*), q \in \boldsymbol{K}. \qquad (6.39)$$

В относительных единицах критерий q=3 изменяется в следующих пределах: $\lambda_q(X^o) = 0.3179 \leq \lambda_q(X) \leq 1 = \lambda_q\left(X_q^*\right), q \in \boldsymbol{K}$. Анализ этих данных.

Шаг 4. Выбор величины приоритетного критерия q∈K. (Decision-making). На сообщение: «Введите величину приоритетного критерия fq=» - вводим, например, fq=80.

Шаг 5. Вычисляется относительная оценка.

Для выбранной величины приоритетного критерия $f_q = 80$ вычисляется относительная оценка:

$$\lambda_q = \frac{f_q - f_q^0}{f_q^* - f_q^0} = \frac{80-50.03}{10.15-50.03} = \; 0.5979, \qquad (6.40)$$

которая при переходе от точки X^o к точке X_q^* лежит в пределах:

$0.3179 = \lambda_3(X^o) \leq \lambda_3 = 0.5979 \leq \lambda_3(X_3^*) = 1, q \in \boldsymbol{K}$.

Шаг 6. Вычислим коэффициент линейной аппроксимации

Предполагая линейный характер изменения критерия $f_q(X)$ в (6.39) и соответственно относительной оценки λ_q в (6.40), используя стандартные приемы линейной аппроксимации, вычислим коэффициент пропорциональности между λq(Xo), λq, который назовем ρ:

$$\rho = \frac{\lambda_q - \lambda_q(X^o)}{\lambda_q(X_q^*) - \lambda_q(X^o)} = \frac{0.5979 - 0.3179}{1 - 0.3179} = 0.4106, q = 3 \in \boldsymbol{K}. \quad (6.41)$$

Шаг 7. Вычислим координаты приоритета критериев с размерностью fq.

Предполагая линейный характер изменения вектора $X^q = \{x_1 \ \ x_2\}$ определим координаты для точки с размерностью fq =80 с λ_q (6.40):

$$x_{\lambda=0.81}^{q=3} = \{x_1 = X^o(1) + \rho(X_q^*(1) - X^o(1)), x_2 = X^o(2) + \rho(X_q^*(2) - X^o(2))\}, \quad (6.42)$$

где $X^o = \{X^o(1) = 80, X^o(2) = 69.11\}, X_3^* = \{X_3^*(1) = 80, X_3^*(2) = 0.0\}$.

Как результат решения мы получим точку с координатами:

$X^q = \{x_1 = 67.31, x_2 = 21.27\}$.

Шаг 8. Вычисление главных показателей точки X^q.

Для полученной точки X^q, вычислим:

все критерии в натуральных единицах $f_k(X^q) = \{f_k(X^q), k = \overline{1,K}\}$,

$f(X^q) = \{f_1(X^q) = 313.4, f_2(X^q) = 2575, f_3(X^q) = 74, f_4(X^q) = 60.6\}$;

все относительные оценки критериев:

$\lambda^q = \{\lambda_k^q, k = \overline{1,K}\}$, $\lambda_k(X^q) = \frac{f_k(X^q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1,K}$:

$\lambda_k(X^q) = \{\lambda_1(X^q) = 0.2405, \lambda_2(X^q) = 0.5102, \lambda_3(X^q) = 0.4825, \lambda_4(X^q) = 0.5586\}$;

минимальная относительная оценка:

$\min\lambda(X^q) = \min_{k \in K}(\lambda_k(X^q)) = 0.2405$.

вектор приоритетов $P^q(X) = \{p_k^q = \frac{\lambda_q(X^q)}{\lambda_k(X^q)}, k = \overline{1,K}\}$:

$P^q = [p_1^3 = 2.0061, p_2^3 = 0.9458, p_3^3 = 1.0, p_4^3 = 0.8637]$;

минимальная относительная оценка:

$$\lambda^{oo} = \min(p_1^3\lambda_1(X^q), p_2^3\lambda_2(X^q), \quad p_3^3\lambda_3(X^q), p_4^3\lambda_4(X^q)) = 0.4825$$

Аналогично другие точки из области Парето $\boldsymbol{X_t^o} = \{\lambda_t^o, X_t^o\} \in \boldsymbol{S^o}$ могут быть получены. Анализ результатов. Рассчитанная величина $f_q(X_t^o) = 74.2, q = 3 \in \boldsymbol{K}, q \in \boldsymbol{K}$ обычно не равна заданной $f_q = 80$. Ошибка выбора $\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q| = |74.2 - 80| = 5.8$ определяется ошибкой линейной аппроксимации: $\Delta f_{q\%} = 7.25\%$. Если ошибка $\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q| = |74.2 - 80| = 5.8$, измеренная в натуральных единицах или в процентах $\Delta f_{q\%} = \frac{\Delta f_q}{f_q} * 100 = 7.25\%$, больше заданной $\Delta f, \Delta f_q > \Delta f$, то переходим к шагу 2, если $\Delta f_q \leq \Delta f$, то вычисления завершаются. Конец.

В нашем примере окончательный вариант включает параметры:

$\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\} = \{X^o = \{x_1 = 52.9, x_2 = 36.1, x_3 = 8.8, x_4 = 2.2, \lambda^o = 0.3179\}$; параметры технической системы при заданном приоритете критерия: q=3: $X^q = \{x_1 = 67.31, x_2 = 21.27\}$.

6.7. Этап 6. *Результаты решения векторной задачи в трехмерной системе координат в физических единицах*

Мы представили параметры: $\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\} = \{X^o = \{x_1 = 52.9, x_2 = 36.097, x_3 = 8.8, x_4 = 2.2, \lambda^o = 0.3179\}$

в двухмерной системе координат x_1, x_2 Рис.3, трехмерной системе координат x_1, x_2 и λ Рис. 4. Также представим эти параметры в физических единицах для каждой характеристики технической системы (критерия): $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$. Первая характеристика технической системы $f_1(X)$ в координатах x_1, x_2 представлена рис. 6. Аналогично характеристика $f_1(X)$ в относительных единицах $\lambda_1(X)$ рис. 7.

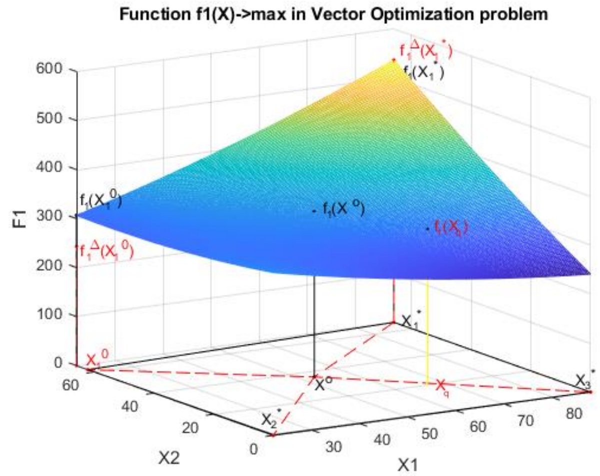

Рис. 6. Первая характеристики ТС $f_1(X)$ в натуральных показателях: x_1, x_2

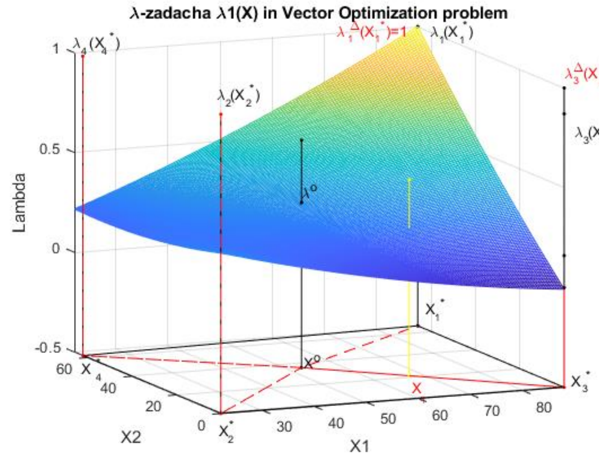

Рис. 7. Первая характеристики ТС $\lambda_1(X)$ в относительных единицах x_1, x_2

Показатели $f_1^{\Delta}(X_1^*)$, $f_1^{\Delta}(X_1^o)$ и $\lambda_1^{\Delta}(X_1^*)$, $\lambda_1^{\Delta}(X_1^o)$ первой характеристики технической системы (выделены красным цветом) определяют ошибки перехода от четырехмерной $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ к двухмерной $X^o = \{x_1, x_2\}$ системе координат. Вторая характеристика $f_2(X)$ в координатах x_1, x_2 на рис. 8. Аналогично характеристика $f_2(X)$ в относительных единицах $\lambda_2(X)$ показана на рис. 9.

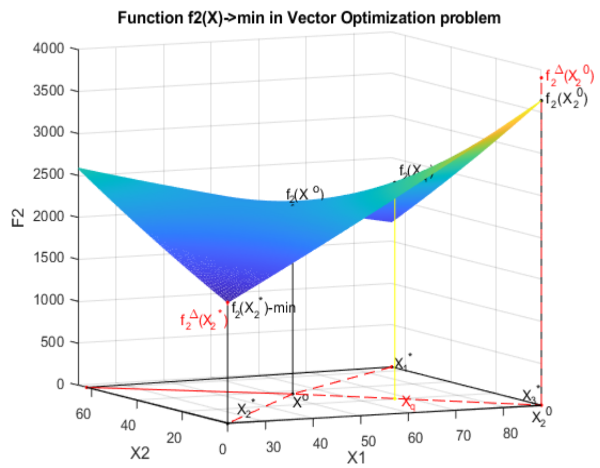

Рис. 8. Вторая характеристики $f_2(X)$ технической системы в натуральных показателях

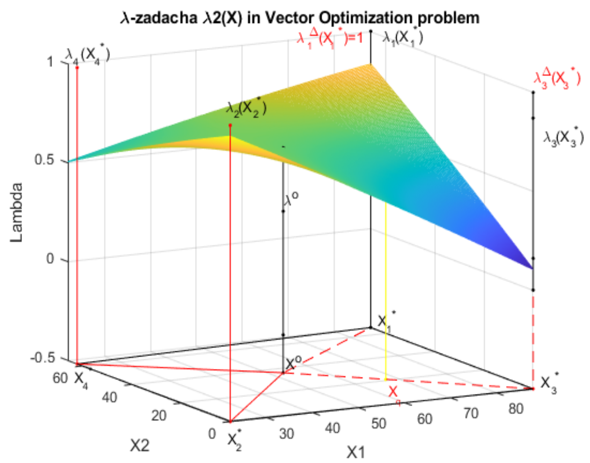

Рис. 9. Вторая характеристики ТС $\lambda_2(X)$ в координатах x_1, x_2 в относительных единицах

Показатели $f_2^{\Delta}(X_2^*)$, $f_2^{\Delta}(X_2^o)$ и $\lambda_2^{\Delta}(X_2^*)$, $\lambda_2^{\Delta}(X_2^o)$ второй характеристик технической системы (выделены красным цветом) определяют ошибки перехода от четырехмерной $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ к двухмерной $X = \{x_1, x_2\}$ системе. Обратим внимание на то, что в первой характеристике $f_1(X) \to max$ выпуклость в физических $f_1(X)$ и относительных единицах $\lambda_1(X)$ совпадают; во второй характеристике $f_2(X) \to min$ выпуклость в физических $f_2(X)$ и относительных единицах $\lambda_2(X)$ не совпадают. Поэтому в λ-задаче все $\{\lambda_1(X), \ldots, \lambda_4(X)\} \to max$. Третья характеристика технической системы $f_3(X)$ в координатах x_1, x_2 представлена на рис. 10. Аналогично характеристика $f_3(X)$ в относительных единицах $\lambda_3(X)$ рис. 11.

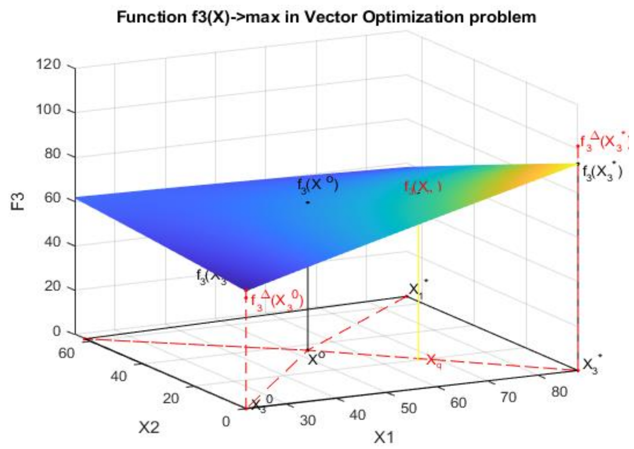

Рис. 10. Третья характеристики $f_3(X)$ технической системы в натуральных показателях

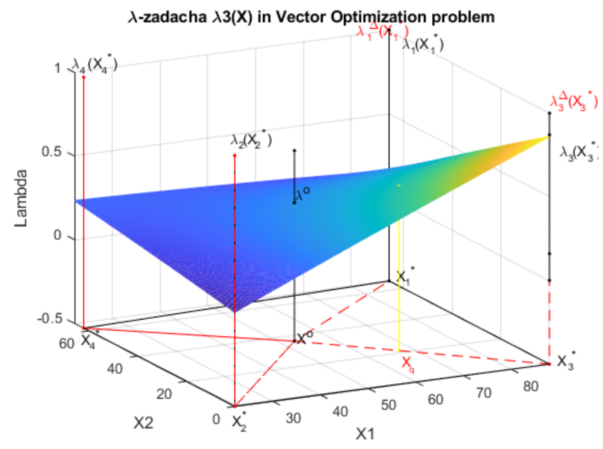

Рис. 11. Третья характеристики ТС $\lambda_3(X)$ в координатах x_1, x_2 относительных единицах

Показатели $f_3^{\Delta}(X_3^*)$, $f_3^{\Delta}(X_3^o)$ и $\lambda_3^{\Delta}(X_3^*)$, $\lambda_3^{\Delta}(X_3^o)$ второй характеристик технической системы (выделены красным цветом) определяют ошибки перехода от четырехмерной $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ к двухмерной $X = \{x_1, x_2\}$ системе. Четвертая характеристика $f_4(X)$ в координатах x_1, x_2 представлена рис. 12. Аналогично характеристика $f_4(X)$ в относительных единицах $\lambda_4(X)$ показана на рис. 13.

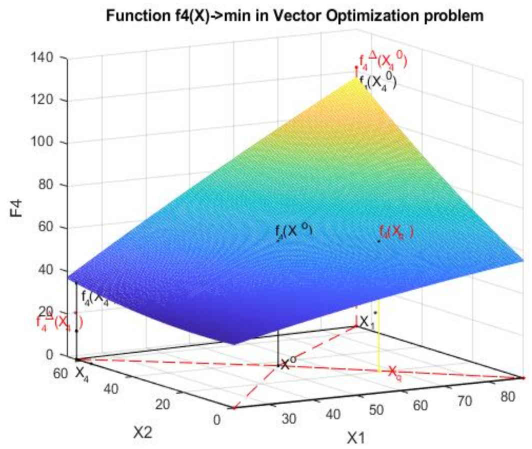

Рис. 12. Четвертая характеристики $f_4(X)$ технической системы в натуральных показателях

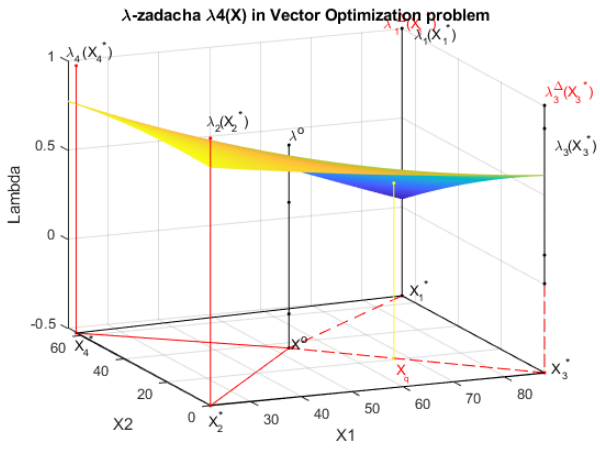

Рис. 13. Четвертая характеристика технической системы $\lambda_4(X)$ в координатах x_1, x_2 относительных единицах

$f_4^{\Delta}(X_4^*)$, $f_4^{\Delta}(X_4^o)$ и $\lambda_4^{\Delta}(X_4^*)$, $\lambda_4^{\Delta}(X_4^o)$ - это показатели второй характеристик технической системы (выделены красным цветом). Они определяют ошибки перехода от четырехмерной $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ к двухмерной $X^o = \{x_1, x_2\}$ системе координат.

В совокупности, представлена версия программного обеспечения выдает следующие результаты: Точку оптимума - X^o; Характеристики (критерии) - $F(X^o) = \{f_1(X^o), f_2(X^o), f_3(X^o), f_4(X^o)\}$; Максимальную относительную оценку - λ^o, такую что $\lambda^o \leq \lambda_k(X^o)\ \forall k \in \boldsymbol{K}$; относительные оценки - $\lambda(X^o) = \{\lambda_1(X^o), \lambda_2(X^o), \lambda_3(X^o), \lambda_4(X^o)\}$; Точку оптимума с приоритетом q–го критерия – X^q; характеристики (критерии) - $F(X^q) = \{f_1(X^q), f_2(X^q), f_3(X^q), f_4(X^q)\}$; относительные оценки - $\lambda(X^o) = \{\lambda_1(X^q), \lambda_2(X^q), \lambda_3(X^q), \lambda_4(X^q)\}$; максимальную относительную оценку - λ^{oo} , $\lambda^{oo} \leq p_k^q\, \lambda_k(X^q), k = \overline{1, K}$.

Заключение

Проблема разработки математических методов векторной оптимизации и принятия оптимального решения на их основе в сложной инженерной системе по некоторому набору экспериментальных данных и функциональных характеристик является одной из важнейших задач системного анализа и проектирования. В работе представлена методология автоматизации проектирования путем построения математической модели инженерной системы в условиях определенности и неопределенности в виде векторной задачи математического программирования. Разработана теория и конструктивные методы решения задач векторной оптимизации. Разработанное математическое обеспечение целесообразно использовать для исследования и на стадии проектирования выбора оптимальных параметров инженерных систем. Практическая апробация предложенного математического и программного обеспечения представлена на численном примере модели технической системы.

Список литературы:

1. Гермейер Ю.Б. Игры с не противоположными интересами. – М.: Наука, 1976, 326 с.

2. Зак Ю.А. Многоэтапные процессы принятия решений в задаче векторной оптимизации // АиТ. 1976. № 6, С. 41-45.

3. Михайлевич В. С., Волкович В. П. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. М.: Наука, 1982, 285 с.

4. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука. 1982. 256 с.

6. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе В.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Физматиз.1961. 268 с.

7. Красовский Н.Н., Красовский А.Н., Третьяков В.У. Управление динамической системой. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. 195 с.

8. Прядкин Л.Л., Гончаров А.Л., Бойчук В.Г. Автоматизация управления технологическими процессами в прокатном производстве на базе микропроцессорной технике. – М.: ЦНИИТЭИ приборостроения, 1986. 136 с.

8. Ю.Н. Киселёв, С.Н. Аввакумов, М.В. Орлов. Оптимальное управление. Линейная теория и приложения. – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, 2007. – 270 с. ISBN 5-89407-288-3.

9. Добрынина И.С., Карпов И.И., Черноусько Ф.Л. Метод декомпозиции в задачах управления системой твердых тел // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1995.№ 2.

10. Краснощеков П.С., Морозов В.В., Федоров В. В. Последовательное агрегирование в задачах внутреннего проектирования технических систем// Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1979. N 5.

11. Левицкий В. Л. Математическое моделирование и оптимизация магнитоэлектрических линейных индукторных двигателей постоянного тока. Диссертация канд. Техн. Наук, Новосибирск. НЭТИ. 1990. 163 с.

12. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И. В. Виноградов. –М.: Советская Энциклопедия. Т.4 Ок-Сло. 1984. 1216 с.

13. Машунин Ю.К. Методы и модели векторной оптимизации. - М.: Наука, 1986. 141 с.

14. Машунин Ю. К., Левицкий В. Л. Методы векторной оптимизации в анализе и синтезе технических систем: монография. - Владивосток: ДВГАЭУ, 1996. 131 с.

15. Машунин Ю.К. Решение композиционных и декомпозиционных задач синтеза сложных технических систем методами векторной оптимизации//Изв. РАН. ТиСУ. 1999. №3. С. 88-93. (русский вариант).

Yu. K. Mashunin, "Solving composition and decomposition problems of synthesis of complex engineering systems by vector optimization methods," Comput. Syst. Sci. Int. 38, 421 (1999). (Scopus). (русский вариант).

16. Машунин Ю.К., Машунин К.Ю. Моделирование технических систем в условиях неопределенности и принятие оптимального решения //Изв. РАН. ТиСУ. 2013. №4. С. 19-35.

Mashunin K. Yu., and Mashunin Yu. K. Simulation Engineering Systems under Uncertainty and Optimal Descision Making. Journal of Comput. Syst. Sci. Int. Vol. 52. No. 4. 2013. 519-534. (Scopus)

17. Машунин Ю.К. Теория управления. Математический аппарат управления в экономических системах. – М.: Логос. 2013. 448 с. (Новая университетская библиотека)

18. Mashunin Yu.K. Mashunin K.Yu. Modeling of technical systems on the basis of vector optimization (1. At equivalent criteria) / International Journal of Engineering Sciences & Research Technology. 3(9): September, 2014. P. 84-96 .

19. Mashunin Yu.K. Mashunin K.Yu. Modeling of technical systems on the basis of vector optimization (2. with a Criterion Priority) / International Journal of Engineering Sciences & Research Technology. 3(10): October, 2014. P. 224-240.

20. Yu. K. Mashunin, K. Yu. Mashunin. Simulation and Optimal Decision Making the Design of Technical Systems // American Journal of Modeling and Optimization. 2015. Vol. 3. No 3, 56-67.

21. Yu. K. Mashunin, K. Yu. Mashunin. Simulation and Optimal Decision Making the Design of Technical Systems (2.The Decision with a Criterion Priority) // American Journal of Modeling and Optimization. 2016. Vol. 4. No 2, 51-66.

22. Yu. K. Mashunin, “Methodology of the Choice of Optimum Parameters of Technological Process on Experimental to Data.” American Journal of Modeling and Optimization, vol. 7, no. 1 (2019): 20-28. doi: 10.12691/ajmo-7-1-4.

23. Yu. K. Mashunin. Vector optimization in the system optimal Decision Making the Design in economic and technical systems // International Journal of Emerging Trends & Technology in Computer Science. 2017. Vol. 7. No 1, 42-57.

24. Mashunin, Yu. K, Optimal designing in the interrelation Technical system – Materials (Theory) // Mathematical methods in engineering and technology: proceedings of international. Science. Conf.: 12 tons 4 /under General Ed. A. A. Bolshakova. –SPb.: Publishing house of Polytechnical Institute. 2018. P. 40-46.

25. Yu. K. Mashunin. Concept of Technical Systems Optimum Designing (Mathematical and Organizational Statement)// International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2017 Proceedings 8076394. Saint Petersburg. Russia/ WOS: 000414282400287 ISBN:978-1-5090-5648-4. (Scopus, Web of science).

26. Yu. K. Mashunin. Optimum Designing of the Technical Systems Concept (Numerical Realization) // International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2017 Proceedings 8076395. Saint Petersburg. Russia/ WOS: 000414282400288 ISBN: 978-1-5090-5648-4. (Scopus, Web of science).

27. Mashunin K. Yu., and Mashunin Yu. K. Vector Optimization with Equivalent and Priority Criteria. Journal of Comput. Syst. Sci. Int., 2017, Vol. 56. No. 6. pp. 975-996. https://rdcu.be/bhZ8i (Scopus).

28. Mathematical Apparatus of Optimal Decision-Making Based on Vector Optimization,” Appl. Syst. Innov. 2019, 2, 32. https://doi.org/10.3390/asi2040032 (Scopus)

29. Mashunin Yu.K. Theory and Methods Vector Optimization (Volume One), Cambridge Scholars Publishing. 2020, 183 p. ISBN (10): 1-5275-4831-7

30. Mashunin Yu.K. Theory and Methods Vector Optimization (Volume Two), Cambridge Scholars Publishing. 2021, ISBN (10): 1-5275-7413-X

ISBN (13): 978-1-5275-7413-7

31. Машунин Ю. К. Векторная оптимизация. Т. 1. Векторная оптимизация: теория: монография / Ю.К. Машунин. — Москва: РУ-САЙНС, 2021. — 258 с. ISBN 978-5-4365-8611-1

32. Машунин Ю. К. Векторная оптимизация. Т. 2. Векторная оптимизация в инженерии: монография / Ю.К. Машунин. — Москва: РУ-САЙНС, 2021. — 266 с. ISBN 978-5-4365-8611-3

33. Машунин, Ю. К. Векторная оптимизация. Т. 3. Векторная оптимизация в экономике: монография / Ю.К. Машунин. — Москва: РУ-САЙНС, 2022. — 318 с. ISBN 978-5-4365-0227-4

34. Торгашов А.Ю., Кривошеев В.П., Машунин Ю.К., Холланд Ч.Д. Расчет и многокритериальная оптимизация статических режимов массообменных процессов на примере абсорбции в производстве газоразделения // Изв. ВУЗов. Нефть и газ, 2001, №3, с. 82-86.

35. Pareto V. Cours d’Economie Politique. Lausanne: Rouge, 1896.

36. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. - М.: Мир, 1964, 837 с.

37. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения: Пер. с англ./Под ред. И. Ф. Шахнова. - М.: Радио и связь, 1981. – 560 с.

38. J. Johannes. Vector Optimization: Theory, Applications, and Extensions. New York, Berlin, Heidelberg. Springer-Verlag. 2010. 460 p.

39. Qamrul Hasan Ansari, Jen-Chih Yao. Recent Developments in Vector Optimization. Springer Heidelberg Dordrecht. New York. London. 2010. 550 p.

40. Nakayama Hirotaka, Yun Yeboon, Yoon Min. Sequential Approximate Multiobjective Optimization Using Computational Intelligence. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg . 2009. 197 p.

41. Shankar R. Decision Making in the Manufacturing Environment: Using Graft Theory and fuzzy Multiple Attribute Decision Making Methods. Springer; 2007. 373 p.

42. Cooke T., Lingard H., Blismas N. The development end evaluation of a decision support tool for health and safety in construction design // Engineering, Construction and Architectural Management. 2008. V. 15. №4. P. 336-351.

43. Машунин Ю.К. Теория и методы принятия оптимальных решений по множеству критериев в инженерных системах : монография / Ю.К. Машунин. - Москва: РУСАЙНС, 2023, - 340 с. ISBN 978-5-466-04638-0

44. Mashunin, Yu. K. Theory, applied mathematics and software for optimal decisions making on a set of criteria in engineering systems : monograph / Yu.K. Mashunin. Moscow : RuScience, 2024, - 260 с. ISBN 978-5-466-05940-3