УДК 512.643 + 517.52

Друшляк Анастасия Игоревна, преподаватель,
Севастопольский государственный университет
Anastasia Igorevna Drushlyak
lecturer, Sevastopol State University

О РАЗЛОЖЕНИИ МАТРИЦЫ В СУММУ МАТРИЦ РАНГА 2.
DECOMPOSITION OF A MATRIX INTO A SUM OF MATRICES OF RANK 2

Аннотация. Цель статьи — исследовать свойства ранга и спектра квадратных матриц, а также продемонстрировать практические приложения полученных теоретических результатов в матричном анализе. На основе проведенного автором исследования удалось углубить понимание структуры матриц, разработать новые методы анализа и решить сложную задачу, о разложении произвольной квадратной матрицы ранга $2k$ в сумму матриц второго ранга. Разработана и обоснована формула для вычисления A^n, а также ее применение к вычислению функций от матрицы 2 ранга.

Abstract. The purpose of the article is to investigate the properties of the rank and spectrum of square matrices, and to demonstrate practical applications of the obtained theoretical results in matrix analysis. Based on the author's research, it was possible to deepen the understanding of the structure of matrices, develop new methods of analysis, and solve a complex problem of decomposing an arbitrary square matrix of rank $2k$ into a sum of matrices of second rank. A formula for calculating A^n has been developed and justified, as well as its application to calculating functions of a matrix of rank 2.

Ключевые слова. Разложение матрицы, матрица ранга 2, ранг матрицы, спектр матрицы, степень матрицы, элементарные функции, квадратная матрица, матричные функции, спектральная теория.

Keywords. Matrix decomposition, matrix of rank 2, matrix rank, matrix spectrum, matrix power, elementary functions, square matrix, matrix functions, spectral theory.

Введение.

Хорошо известна важная роль теории матриц в различных разделах математики и физики. Особую роль в этой теории играют матрицы первого ранга, поскольку произвольная квадратная матрица ранга k представима в виде суммы k матриц первого ранга [3-5].

В статье исследованы свойства квадратных матриц низкого ранга и разработаны аналитические методы работы с функциями от таких матриц. Уточнены и структурированы ключевые факты теории матриц применительно к матрицам низкого ранга: проанализированы взаимосвязи между рангом и спектром квадратной матрицы; рассмотрены свойства матриц ранга $2k$ и их спектральные характеристики. Предложен конструктивный алгоритм разложения, установлены условия существования такого разложения, оценено минимальное количество слагаемых (матриц ранга 2), необходимое для точного представления исходной матрицы.

Разработана и обоснована формула для вычисления A^n (где A — квадратная матрица ранга $2, n \in N$), основанная на спектральных характеристиках матрицы. Данная формула исключает необходимость многократного перемножения матриц, даёт компактное аналитическое выражение для степени матрицы, а также применима для любого натурального показателя степени.

Методика

Основной целью исследования являются матрицы низкого ранга, так как с ростом вычислительных мощностей и появлением новых алгоритмов возникает потребность в эффективных и устойчивых методах вычисления ранга и спектра, особенно для больших матриц. Это актуально в контексте обработки больших данных, машинного обучения, численного моделирования сложных систем. Например, разработка методов декомпозиции матриц «по частям» для диагонализации матриц большой размерности остаётся важной задачей.

Для доказательства основной теоремы данного исследованию были применены основополагающие факты из теории спектрального разложения матриц ранга 1. Любую матрицу ранга k можно представить в виде суммы k различных матриц ранга [1]. При этом $A \in M_n(C)$, ранг которой равен 1 можно представить в виде: $A = ab^*$ где $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $b^* = (b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n)$. Обобщив данный подход можно получить формулу для вычисления произвольной натуральной степени матрицы ранга 1:

$$A^n = \begin{cases} (tr\ A)^{n-1}A, \ tr\ A \neq 0; \\ 0, tr\ A = 0, n \geq 2. \end{cases}$$

Причем, спектр такой матрицы будет состоять не более чем из двух чисел в случае, если $(a, b) \neq 0$, то $\sigma(A) = \{tr\ A, 0\}$, если $(a, b) = 0$, то $\sigma(A) = \{0\}$.

Применяя основной метод разложения экспоненты, синусоиды и косинусоиды в ряд — ряд Тейлора, можно получить формулы вычисления функций от матрицы 1 ранга:

- $e^A = E + \frac{1}{tr\ A}(e^{tr\ A} - 1)A, \qquad trA = 0, \Rightarrow e^A = E + A.$
- $\cos A = E + \frac{1}{tr\ A}(\cos(tr\ A) - 1)A, \ trA = 0, \Rightarrow \cos A = E.$
- $\sin\ A = \frac{1}{tr\ A}(\sin(tr\ A))A, \qquad trA = 0, \Rightarrow \sin A = A.$

Результаты

Результаты применения данного подхода к матрицам ранга 2. Данный факт о разложении матриц в сумму можно обобщить на случай матриц второго ранга, а именно: имеет место следующая теорема.

Теорема.

а) Ранг произвольной квадратной матрицы равен $2k$ *тогда и только тогда, когда она представима в виде суммы k различных невырожденных матриц второго порядка.*

b) Ранг произвольной квадратной матрицы равен $2k + 1$ *тогда и только тогда, когда она представима в виде суммы* k *различных матриц второго ранга и одной матрицы первого ранга.*

Важно отметить, что доказанная теорема применима к возведению произвольной матрицы ранга 2 в любую натуральную степень. При помощи возвратных уравнений и методов линейной алгебры были получены формулы для вычисления матрицы A^n. С учетом особенностей спектра такого типа матриц, данные результаты будут иметь вид:

$$A^n = \frac{\lambda_1^{n-1}}{\lambda_2 - \lambda_1}\big((\lambda_2 - \alpha_1)A_1 + (\lambda_2 - \alpha_2)A_2 + \alpha_4 A_3 + \alpha_3 A_4\big) -$$
$$- \frac{\lambda_2^{n-1}}{\lambda_2 - \lambda_1}\big((\lambda_1 - \alpha_1)A_1 + (\lambda_1 - \alpha_2)A_2 + \alpha_4 A_3 + \alpha_3 A_4\big), \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0).$$
$$A^n = \lambda_1^{n-2}(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 - \alpha_4 A_3 - \alpha_3 A_4), \qquad (\lambda_1 \neq \lambda_2 = 0).$$
$$A^n = \lambda_1^{n-1} n \left(\frac{\alpha_1 - \lambda_1}{\lambda_1} A_1 + \frac{\alpha_2 - \lambda_1}{\lambda_1} A_2 + \frac{\alpha_4}{\lambda_1} A_3 + \frac{\alpha_3}{\lambda_1} A_4\right) +$$
$$+ \lambda_1^{n-1}\left(\frac{2\lambda_1 - \alpha_1}{\lambda_1} A_1 + \frac{2\lambda_1 - \alpha_2}{\lambda_1} A_2 - \frac{\alpha_4}{\lambda_1} A_3 - \frac{\alpha_3}{\lambda_1} A_4\right), \qquad (\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0).$$

Где матрица $A = A_1 + A_2$, ранга 2. Её спектр состоит не более чем из трех чисел:

$$\begin{cases} \sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, 0\}, \\ \sigma(A) = \{\lambda_1, 0\}, \\ \sigma(A) = \{0\}, \sigma(S) = \{0\}. \end{cases}$$

Где λ_1, λ_2 это собственные значения матрицы: $S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_2 \end{pmatrix}$, причем:

$A_1 = f_1 g_1^*, \quad \alpha_1 = (g_1, f_1); \; A_2 = f_2 g_2^*, \quad \alpha_2 = (g_2, f_2);$
$A_3 = f_1 g_2^*, \quad \alpha_3 = (g_2, f_1); \; A_4 = f_2 g_1^*, \quad \alpha_4 = (g_1, f_2).$

Согласно полученным в ходе исследования данным были выведены формулы для вычисления функций от матрицы 2 ранга.

- $e^A = E + \frac{e^{\lambda_1 - 1}}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)}\big((\lambda_2 - \alpha_1)A_1 + (\lambda_2 - \alpha_2)A_2 + \alpha_4 A_3 + +\alpha_3 A_4\big) - \frac{e^{\lambda_2 - 1}}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}\big((\lambda_1 - \alpha_1)A_1 + (\lambda_1 - \alpha_2)A_2 + \alpha_4 A_3 + \alpha_3 A_4\big).$
- $\cos A = E + \frac{\cos\lambda_1 - 1}{(\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_1}\big((\lambda_2 - \alpha_1)A_1 + (\lambda_2 - \alpha_2)A_2 + \alpha_4 A_3 + +\alpha_3 A_4\big) - \frac{\cos\lambda_2 - 1}{(\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_2}\big((\lambda_1 - \alpha_1)A_1 + (\lambda_1 - \alpha_2)A_2 + \alpha_4 A_3 + \alpha_3 A_4\big).$
- $\sin\, A = \frac{sin\ \lambda_1}{(\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_1}\big((\lambda_2 - \alpha_1)A_1 + (\lambda_2 - \alpha_2)A_2 + \alpha_4 A_3 + +\alpha_3 A_4\big) - \frac{\sin\,\lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_2}\big((\lambda_1 - \alpha_1)A_1 + (\lambda_1 - \alpha_2)A_2 + \alpha_4 A_3 + \alpha_3 A_4\big).$

Заключение

Проведённое исследование демонстрирует, что матрицы ранга 2 обладают специфическими свойствами, позволяющими строить эффективные аналитические методы работы с их степенями и функциями от них. Доказано, что произвольная квадратная матрица ранга $2k$ может быть представлена в виде суммы матриц второго ранга. Предложен конструктивный алгоритм разложения, установлены условия существования такого разложения, оценено минимальное количество слагаемых (матриц ранга 2), необходимое для точного представления исходной матрицы.

Разработана и обоснована формула для вычисления A^n (где A — квадратная матрица ранга $2, n \in N$), основанная на спектральных характеристиках матрицы. Предложенные формулы позволяют вычислять e^A, $\cos A$, $\sin A$ для матриц 2-го ранга без прямого использования рядов Маклорена; опираются на спектральные свойства матрицы (собственные значения и проекторы); сокращают вычислительные затраты за счёт явного учёта структуры матриц; расширяют инструментарий матричного анализа для задач, где важны экспоненциальные и тригонометрические функции от операторов (например, в теории управления, квантовой механике, численных методах).

Список используемой литературы

1. Буков В. Н. Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. — Калуга: Изд-во научной литературы Н. Ф. Бочкаревой, 2006. — 716 с..
2. Клековкин Г. А. Введение в перечислительную комбинаторику: учебное пособие / Г. А. Клековкин. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2019. — 228 с. — ISBN 978-5-8114-4386-4.
3. Комраков Б. Б. Матричный анализ: курс лекций. — Минск: БГУ, 2006. — 102 с..
4. Ланкастер П. Теория матриц / П. Ланкастер//Пер. с англ. – М.: Наука, – 1982. – 272с.
5. Лобанов С. Г., Бурмистрова Е. Б. Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии: учебное пособие. — М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2007. — 220 с..
6. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон; пер. с англ. Х. Д. Икрамова и др.; под ред. Х. Д. Икрамова. — М.: Мир, 1989. — 655 с..