

Исаев Иван Сергеевич, магистрант  
МГТУ им. Н.Э. Баумана

## АППРОКСИМАЦИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ НА НЕРЕГУЛЯРНЫХ СЕТКАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

**Аннотация.** В статье рассматривается метод аппроксимации эллиптических операторов монотонными разностными схемами на нерегулярных сетках в области сложной геометрии с граничными условиями первого и второго рода с использованием квадратичного программирования.

**Ключевые слова:** Эллиптические операторы, нерегулярные сетки, монотонные схемы, квадратичное программирование, краевые задачи.

### Введение

Численное решение краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений является важной задачей вычислительной математики и математического моделирования [1]. Для дискретизации таких задач широко используются конечно-разностные методы, обеспечивающие простоту реализации и высокую вычислительную эффективность.

Обработка областей сложной геометрии с границами, не совпадающими с регулярной сеткой, требует применения специальных приёмов из-за невозможности использования стандартных разностных схем [5, 6]. Одним из подходов является построение локальных аппроксимаций разностных схем на нерегулярных множествах узлов [2–4].

### Методика

Рассмотрим эллиптическое дифференциальное уравнение второго порядка в ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\Delta u(x, y) + \mathbf{b}(x, y) \cdot \nabla u(x, y) = f(x, y), (x, y) \in \Omega,$$

где  $\mathbf{b}(x, y)$  – вектор коэффициентов конвективного переноса,  $f(x, y)$  – заданная функция источника.

На границе области  $\partial\Omega$  задаются граничные условия первого и второго рода. Для части границы  $\Gamma_D$  выполняется условие Дирихле

$$u(x, y) = g_D(x, y),$$

а для части  $\Gamma_N$  – условие Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = g_N(x, y),$$

где  $n$  – внешняя нормаль к границе области.

Требуется построить разностную аппроксимацию дифференциального оператора на нерегулярной сетке, обеспечивающую монотонность получаемой дискретной схемы.

Построим нерегулярную сетку, покрыв область  $\Omega$  регулярной прямоугольной сеткой и равномерно дискретизировав её границу дополнительными узлами. Для узлов, принадлежащих  $\Gamma_D$ , значения решения считаются известными и непосредственно включаются в систему уравнений. Для узлов, принадлежащих  $\Gamma_N$ , строятся пары зеркальных и мнимых точек, после чего граничное условие второго рода аппроксимируется центральной разностью второго порядка точности.

Для зеркальных узлов, а также для узлов сетки, расположенных вблизи границы области, строится локальная аппроксимация дифференциального оператора на множестве соседних точек. Аппроксимация ищется в виде линейной комбинации значений функции в соседних узлах

$$\mathcal{L}u(\mathbf{x}_0) \approx \frac{1}{h^2} \sum_{j=0}^m w_j u(\mathbf{x}_j),$$

где  $\mathbf{x}_0$  – рассматриваемый узел,  $\mathbf{x}_j$  – соседние узлы,  $w_j$  – коэффициенты аппроксимации.



Для определения коэффициентов разложим функцию в соседних узлах в ряд Тейлора в окрестности  $\mathbf{x}_0$ :

$$u(\mathbf{x}_j) = u(\mathbf{x}_0) + \nabla u(\mathbf{x}_0)\Delta\mathbf{x}_j + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}_j^T \mathbf{H}(\mathbf{x}_0)\Delta\mathbf{x}_j + O(\|\Delta\mathbf{x}_j\|^3),$$

Подставляя данные выражения в разностную аппроксимацию и группируя коэффициенты при производных, получим систему условий согласования

$$Aw = b.$$

Для обеспечения монотонности разностной схемы на коэффициенты накладываются ограничения

$$w_0 \leq 0, w_j \geq 0, j = 1, \dots, m.$$

Поскольку число соседних узлов превышает число условий согласования, полученная система является недоопределённой. Для подбора коэффициентов используется задача квадратичного программирования

$$\min_w \sum_{j=1}^m \rho_j w_j^2,$$

при вышеобозначенных ограничениях. Решение данной задачи позволяет получить монотонную аппроксимацию эллиптического оператора на нерегулярной сетке.

### Заключение

В работе рассмотрен метод построения монотонных разностных схем для аппроксимации эллиптических операторов на нерегулярных сетках. Метод позволяет учитывать граничные условия первого и второго рода в областях сложной геометрии и обеспечивает выполнение условий монотонности дискретной схемы. Полученные результаты могут быть использованы при численном решении широкого класса краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений.

### Список литературы:

1. Hamfeldt B., Lesniewski J. Convergent Finite Difference Methods for Fully Nonlinear Elliptic Equations in Three Dimensions // Journal of Scientific Computing. 2021. Vol. 90. No. 3.
2. Tominec I., Larsson E., Heryudono A. A Least Squares Radial Basis Function Finite Difference Method with Improved Stability Properties // SIAM Journal on Scientific Computing. 2021. Vol. 43. No. 2. P. 1441–1471.
3. Davydov O., Oanh D.T., Tuong N.M. Improved Stencil Selection for Meshless Finite Difference Methods in 3D // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2023. Vol. 425.
4. Ye Q., Tian X. Monotone Meshfree Methods for Linear Elliptic Equations in Non-Divergence Form via Nonlocal Relaxation // Journal of Scientific Computing. 2022. Vol. 96.
5. Coco A., Russo G. High-Order Finite-Difference Ghost-Point Methods for Elliptic Problems in Domains with Curved Boundaries // Open Mathematics. 2024. Vol. 22. No. 1.
6. Ren Y., Feng H., Zhao S. A FFT Accelerated High Order Finite Difference Method for Elliptic Boundary Value Problems over Irregular Domains // Journal of Computational Physics. 2022. Vol. 448.

