DOI 10.58351/2949-2041.2026.35.6.011

Васенин Валерий Иванович, к.т.н.
Пермский национальный исследовательский
политехнический университет, Пермь
Vasenin Valery Ivanovich

МЕМУАР ОБ АПОРИЯХ ЗЕНОНА
MEMOIR ABOUT ZENO'S PARADOXES

Аннотация: Если не принимать во внимание изменения процесса во времени, то при бесконечной делимости пространства в апории «Дихотомия» движение никогда не заканчивается (или не начинается), а в эпихейреме «Ахиллес» быстроногий бегун никогда не догонит черепаху. Как и говорил Зенон. Если же посмотреть на процесс во времени, то это «никогда» составляет, например, всего 1 секунду (стремится к 1-й секунде) при расстоянии 1 м и скорости 1 м/с (апория «Дихотомия»). В апории «Ахиллес» при начальном расстоянии 10 м и скорости черепахи, в 10 раз меньшей скорости Ахиллеса, расстояние будет стремиться к 11,1(1) м, а время «бесконечного» движения – к 11,1(1) с. Если бы, например, в эпихейреме «Дихотомия» при каждом шаге скорость бы тоже уменьшалась в 2 раза, то время такого движения равно бесконечности. Но при этом вводится дополнительное условие в задачу. В апории «Стрела» на основе неверного рассуждения по аналогии (неподвижная стрела находится в равном себе месте, перемещающееся тело тоже находится в равном себе месте, поэтому перемещающееся тело стоит неподвижно) делается ложный вывод об её неподвижности. Этот тезис опровергается практикой. В эпихейреме «Стадион» Зенон прав: время прохода подвижных тел *A* и *C* относительно неподвижного тела *B* до его середины равна половине времени прохождения мимо всей длины неподвижного тела *B* телами *A* или *C*.

Abstract: If we do not take into account the changes in the process over time, then with the infinite divisibility of space in the "Dichotomy" paradox the movement never ends (or does not begin), and in the "Achilles" paradox the swift runner will never catch up with the tortoise, as Zeno said. If we look at the process in time, then this "never" is, for example, only 1 second (tends to 1 second) at a distance of 1 m and a speed of 1 m/s (the "Dichotomy" paradox). In the "Achilles" paradox, with an initial distance of 10 m and the speed of the tortoise 10 times less than the speed of Achilles, the distance will tend to 11.1(1) m, and the time of "infinite" movement to 11.1(1) s. If, for example, in the "Dichotomy" paradox the speed were also reduced with each step, then the time of such movement would be infinite. But this phenomenon introduces an additional condition into the problem. In the "Arrow" paradox a false conclusion is made about its immobility based on incorrect reasoning by analogy (a stationary arrow is in the same place as itself, a moving body is also in the same place as itself, therefore the moving body is stationary). This thesis is refuted by practice. Zeno is correct in his "Stadium" paradox: the time for moving bodies A and C to pass relative to a stationary body B to reach its midpoint is equal to half the time it takes for bodies A or C to pass the entire length of the stationary body B.

Ключевые слова: покой, движение, непрерывность, дискретность, делимость пространства, делимость времени, скорость.

Keywords: rest, motion, continuity, discretion, divisibility of space, divisibility of time, speed.

«Иногда сигара – это просто сигара» – Зигмунд Фрейд

«Обсуждение … парадоксов Зенона, как и обсуждение всякой истинно философской проблемы, никогда не может быть завершено … Поднятая Зеноном проблема не относится к одному лишь движению: она касается времени, пространства и движения в той мере, в какой включает в себя понятия бесконечности и непрерывности» [1, с. 27]. Будем иметь это ввиду, но займёмся более земными делами («делами нашими скорбными»): с первоисточниками, аргументациями и экспериментами. Эти четыре апории – "Дихотомия", "Ахиллес", "Стрела" и "Стадий" – являются мысленными экспериментами, хотя апории «Стрела» и «Стадион» могут быть проверены опытным путем, а остальные 2 – с точностью существующих методов и пределов измерений. Однако не следует исходить из того, что их нужно обязательно опровергнуть. Ранее об апориях были опубликованы статьи [2, 3]. Толчком к продолжению изысканий послужили размышления В.Л. Мерцалова о полете стрелы [4, 5].

Слово «апория» переводится с древнегреческого как «отсутствие выхода, тупик, непреодолимая трудность». Апории еще называют эпихейремами. И, как сказал Б.М. Попов, «для носителя русского языка «эпихейрема» звучит намного содержательнее, чем «апория». Согласимся с данным бесспорным утверждением. Но все же будем использовать эти слова как синонимы.

Апория «Дихотомия» (деление пополам): … о невозможности движения, так как перемещающееся [тело] прежде должно дойти до половины, нежели до конца [6, с. 199].

В постановке задачи уже лежит её решение: каждый раз проходится только половина оставшегося пути, и, следовательно, путь никогда не будет пройден или никогда не начнется – при заданном способе передвижения. О чём спорят две с половиной тысячи лет, непонятно.

Чтобы начать движение, сначала нужно пройти половину пути. Затем половину оставшегося пути. И так до бесконечности. Движение никогда не начнется, нет движения. Но делается вывод, что движения нет вообще, хотя движения нет только при этих условиях передвижения. Мы приближаемся к точке старта так (расстояние от точки старта до точки финиша примем равным 1): 0,5, 0,25, 0,125, 0,0625, 0,03125, 0,015625, 0,00178125, … → 0. То есть расстояние до точки старта уменьшается до любой бесконечно малой заданной величины, но не становится равным нулю. И Зенон прав: движения нет, так как оно никогда не начнется (при таких условиях движения).

Это в случае бесконечной делимости пространства. При конечной делимости пространства деление остановится на расстоянии, большем или равном минимальному кванту расстояния от точки старта. Да, деление прекратилось, дальнейшее перемещение на эту величину невозможно. И движение никогда не начнется.

Давайте теперь займёмся математикой для случая, если движение началось. Рассмотрим первые 4 шага: 0,5+0,25+0,125+0,0625=0,9375 – до единицы не хватает как раз последнего из четырех слагаемых – 0,0625.

Следующие 3 слагаемые, прибавляемые к 0,9375: 0,9375+0,03125+0,015625+0,0078125=0,9921875 – до единицы не хватает последнего их трех слагаемых – 0,0078125.

Следующие 3 слагаемые, прибавляемые к 0,9921875: 0,9921875+0,00390625+0,01953125+ 0,00097656625=0,9990234375 – до единицы не хватает последнего их трех слагаемых – 0,00097656625.

Ещё раз проделаем эту операцию: 0,9990234375+0,00048828124+0,000244140625+ 0,0001220703125=0,99993896484375 – до единицы не хватает последнего из трех слагаемых – 0,0001220703125.

По-видимому, хватит. После прибавления каждых трех слагаемых появляется очередная цифра «9», а до единицы не хватает последнего из трех слагаемых. А ряд можно представить себе так: 0,5+0,25+0,125+0,0625+0,03125+0,015625+0,0078125+ … + 2^{-N} =$1-2^{-N}$. То есть сумма ряда всегда меньше 1, движение никогда не закончится, никогда сумма ряда не будет равна 1, всегда меньше на величину 2^{-N}. И Зенон прав. Этот ряд стремится к 1, до единицы остается любая наперед заданная бесконечно малая величина, но никогда не появится 1. Если бы когда-то вдруг вместо 0,9(9) [«9» в периоде] загорелась 1, то все, Зенон ошибся. Однако этого никогда не будет. И Зенон знал об этом почти 2500 лет тому назад.

Это мы учли только перемещение в пространстве. Однако у нас есть еще один параметр процесса – время. Что же произойдет со временем? Неужели оно стремится к бесконечности? Предположим, что скорость движения равна 0,5 м/с. Тогда отрезок в 0,5 м мы пройдем за 1 с, отрезок в 0,25 м – за 0,5 с, 0,125 м – за 0,25 с, 0,0625 м – за 0,125 с… То есть опять получается ряд, который мы уже подсчитали + 1. Сумма этого ряда стремится к 2 секундам. Ничего себе вечность – 2 секунды! Это же квест (или пранк?) ещё на 2 с половиной тысячи лет!

Это в случае бесконечной делимости пространства. При конечной делимости пространства деление остановится на расстоянии $1–2^{-M}$, большем или равном минимальному кванту расстояния до точки финиша. Да, деление прекратилось, перемещение на эту величину невозможно**.** И движение закончится, не достигнув точки финиша.

Можно ли спасти положение? Можно! Предположим, что при каждом следующем шаге скорость падает в 2 раза. Тогда отрезок в 0,5 м мы пройдем за 1 с, отрезок в 0,25 м – за 1 с, 0,125 м – за 1 с, 0,0625 м – за 1 с… Получается ряд: 1+1+1+1+1+1+… Но сумма этого ряда равна бесконечности, или, как говорят математики, ряд расходится. То есть мы бесконечно приближаемся к 1 м, а время передвижения стремится к бесконечности. И расстояние в 1 м мы никогда не закончим, Зенон прав. Но это произошло при изменении условий задачи.

Апория «Ахиллес»: … Медленного [бегуна] никогда не догонит быстрый [бегун], ибо необходимо, чтобы догоняющий прежде достиг [той точки], откуда стартовал убегающий, поэтому более медленный [бегун] по необходимости всегда должен быть чуть впереди. Аналогично апории «Дихотомия», при этих условиях движения Ахиллес никогда не догонит более медленного бегуна (или черепаху) [6, с. 200].

Произведем расчет процесса. Предположим, что расстояние между Ахиллесом и черепахой составляет 10 м, скорость черепахи – 0,1 м/с, скорость Ахиллеса – 1 м/с. Вполне разумные цифры. Можно взять, конечно, любые другие расстояния и времена их прохождения. Но в предлагаемых условиях процесс выглядит проще и нагляднее. Расстояние от точки старта будет изменяться так: 10 м, 11 м, потом 11,1 м, затем 11,11 м, 11,111 м, 11,1111 м, 11,11111 м и т. д. В «Дихотомии» оно стремилось к 1 м, а здесь удаляется от 11 м на всё более мелкие отрезки. Никаких ограничений по математике нет. Задача сформулирована правильно, и если мы соглашаемся с такими условиями движения, то не догнать более медленного бегуна. У нас нет ограничений на деление пространства. Останется ли 10^{-1} м, 10^{-50} м или 10^{-1000} м. И процесс никогда не закончится. Это бесконечность, и там много места.

Однако что же будет со временем при бесконечном делении пространства? При этих значениях расстояния между бегунами и скоростях бегунов время процесса будет изменяться так: 10 с, 11 с, потом 11,1 с, затем 11,11 с, 11,111 с, 11,1111 с, 11,11111 с, …, 11,1(1) («1» – в периоде). Как видно, максимальная продолжительность процесса чуть больше 11,1 с. Ничего себе вечность – в 11,1(1) с! Эти расчёты сразу меняют наше отношение к апориям. Исчезают слова «всегда», «никогда» – ведь речь идёт о секундах. Время процесса стремится всего лишь к двум секундам в “Дихотомии” и к 11,1(1) секунды в “Ахиллесе” (при заданных разумных расстояниях и условиях передвижения).

Однако в случае конечной делимости пространства нас ждет сюрприз: Ахиллес догонит более медленного бегуна (или черепаху). В определенный момент более медленному бегуну потребуется преодолеть расстояние, меньшее минимально кванта расстояния, что невозможно. А Ахиллес может преодолеть расстояние до более медленного бегуна (догонит его), так как для Ахиллеса это расстояние больше минимально делимого кванта расстояния. И все, гонка закончилась.

Апория «Стрела».

Аристотель: «Летящая стрела стоит неподвижно; оно вытекает из предположения, что время слагается из [отдельных] «теперь» [6, с. 200]. Под «теперь», согласно Аристотелю, понимается неделимый квант времени.

Аристотель также пишет следующее: «Зенон же рассуждает неправильно. Если всегда, – говорит он, – всякое [тело] покоится, когда оно находится в равном [себе месте], а перемещающееся [тело] в момент «теперь» всегда [находится в равном себе месте], то летящая стрела неподвижна. Но это неверно, потому что время не слагается из неделимых «теперь», а также никакая другая величина» [6, с. 199].

Диоген Лаэртский: «Зенон отрицает движение, утверждая, что «движущееся не находится ни в том месте, где оно есть, ни в том, где его нет» [7, с. 382].

Но ведь это говорит о движении (полете) стрелы, а не об отсутствии движения. Стрелы в одном месте уже нет, в другом ее еще нет. Значит, она летит. Странные люди эти древние греки.

Симпликий: «Летящая стрела покоится в полете, коль скоро все по необходимости либо движется, либо покоится, а движущееся всегда занимает равное себе пространство. Между тем то, что занимает равное себе пространство, не движется. Следовательно, она покоится» [8, с. 236].

Предполагается, что стрела занимает равное себе место – и неподвижна. Летящая стрела тоже занимает равное себе место и, значит, она неподвижна. Рассуждение по аналогии: предмет 1 имеет свойства А, Б, В, Г и Д. Предмет 2 имеет свойства А, Б, В и Г. Вероятно, предмет 2 имеет свойство Д. Вероятно! А у стрелы всего одно свойство – занимает равное самой себе место и в покое, и в полете. И из этого делать вывод о неподвижности летящей стрелы не следует – на основе всего лишь одного совпадающего признака, об остальных признаках ничего не говорится. Например, о кинетической энергии летящей стрелы. Аргументы не доказывают тезис, а тысячи лет запусков многих миллионов стрел опровергают тезис о неподвижности стрелы.

Почему Аристотель считает, что нельзя составить время из неделимых потерь? Ведь «теперь» – это промежуток времени, а не 0. И время полета от старта до финиша можно составить из этих неделимых «теперь». Стрела не может пересчитывать все эти «теперь». Как стрела узнает о неделимом «теперь» и как она остановится? Никакой связи неделимых «теперь» с полетом стрелы нет. Стрела-то уже вылетела, препятствия в виде неделимого кванта (неделимого «теперь») не было. Как и препятствия в виде неделимого кванта расстояния. На траектории полета стрелы множество неподвижных точек, но стрела в этих точках не останавливается, а проходит через них. Чтобы стрела остановилась, нужно препятствие, в которое она воткнется или упадет на землю. Сейчас с помощью киносъемки можно фиксировать и время, и координаты стрелы в плоскости *X-Z*.

Интересно, вылетевший из пушки снаряд тоже неподвижен?

В измышлениях об апориях Зенона часто приводится афоризм, приписываемый ведущему представителю древнекитайской «школы имён» Гунсунь Луну (середина IV века до н. э. – середина III до н. э.): «В стремительном [полете] стрелы есть момент отсутствия и движения, и остановки» [Википедия]. Но ведь при остановке стрела упадет на землю. За счет каких сил она остановится, упадет, снова вернется в прежнее положение, продолжит полёт и достигнет цели? И Зенон, Аристотель, Симпликий, Диоген Лаэртский, Гунсунь Лун этим ничуть не обеспокоены. Это уже какая-то чертовщина. «Этого не может быть, потому что этого не может быть никогда». Понять движение стрелы сложно. Но можно это проверить на себе. Введем понятие «полет ступни». Речь идет о ходьбе и беге. Здесь множество неподвижных точек и *множество непрерывных траекторий движения, не имеющих точек разрыва*. При начале ходьбы нужно преодолеть 2 тормоза – неделимый квант расстояния и неделимый квант времени – и это не вызывает затруднений. А остановиться можно при неожиданном столкновении с неувиденным стеклом или наткнувшись на руку, сжатую в кулак.

Апория «Стадион». Четвертый аргумент касается равных тел, которые движутся по стадиону в противоположных направлениях – одни с конца стадиона, другие из середины – с одинаковой скоростью. Из этого, по его [Зенона] мнению, следует, что половина времени равна его удвоенной величине… [6, с. 201]. В Стэнфордской философской энциклопедии написано: «Текст довольно загадочен… По общему мнению, Зенон безнадежно запутался в вопросе относительных скоростей в этом парадоксе». Давайте посмотрим, кто же запутался.

Рассмотрим диспозицию участников процесса. Имеются три равных тела *A*, *B* и *C*. Раз одно тело (тело *A*) движется с конца стадиона, а тело *C* с середины стадиона, то длина неподвижного тела *B* равна половине длины стадиона, тело *B* занимает положение от середины стадиона до левого его конца. Подвижное тело *A* находится за пределом стадиона, находясь одним концом на одном уровне с неподвижным телом *B*. Второе подвижное тело *C* располагается от середины стадиона до его правого конца. Тела *A* и *C* движутся по стадиону навстречу друг другу: тело *A* с конца стадиона, тело *C* – из середины стадиона. Каждое подвижное тело *A* и *C* проходит мимо неподвижного тела *C* за *t* секунд. Но если движутся оба тела *A* и *C*, то они проходят каждый до середины тела *B* за время *t*/2. И время прохода подвижных тел *A* и *C* относительно неподвижного *B* до его середины равна половине времени прохождения мимо всей длины неподвижного тела *B* телом *A* или *C*. Зенон прав.

«А разве так можно было?»

Подведем итоги.

Если не принимать во внимание изменения процесса во времени, то при бесконечной делимости пространства в апории «Дихотомия» движение никогда не заканчивается (или не начинается), а в эпихейреме «Ахиллес» быстроногий бегун никогда не догонит черепаху. Как и говорил Зенон. Если же посмотреть на процесс во времени, то это «никогда» составляет, например, всего 1 секунду (стремится к 1-й секунде) при расстоянии 1 м и скорости 1 м/с (апория «Дихотомия»). В эпихейреме «Ахиллес» при начальном расстоянии 10 м и скорости черепахи, в 10 раз меньшей скорости Ахиллеса, расстояние будет стремиться к 11,1(1) м, а время «бесконечного» движения – к 11,1(1) с. Если бы, например, в апории «Дихотомия» при каждом шаге скорость бы тоже уменьшалась в 2 раза, то время такого движения равнялось бы бесконечности. Но при этом вводится дополнительное условие в задачу. В «Стреле» на основе неверного рассуждения по аналогии (неподвижная стрела находится в равном себе месте, перемещающееся тело тоже находится в равном себе месте, поэтому перемещающееся тело стоит неподвижно) делается ложный вывод об её неподвижности. Сам тезис опровергается практикой. В апории «Стадион» Зенон прав: время прохода подвижных тел *A* и *C* относительно неподвижного тела *B* до его середины равно половине времени прохождения мимо всей длины неподвижного тела *B* телом *A* или С.

Все (или почти все) знают, что «не нужно умножать сущности без необходимости» (Уильям Оккам, 1287–1347). Прошло 700 лет. Но тяга к умножению сущностей не уменьшилась. Вспоминаются слова героини Зои Фёдоровой из фильма 1944 года «Свадьба»: «Они хочут свою образованность показать и всегда говорят о непонятном!» Вот что применялось для решения апорий Зенона: неевклидова геометрия, принцип дополнительности, теория множеств, теория относительности, нестандартный анализ, единство противоположностей, математический анализ, квантовая механика, соотношение неопределённостей, N-мерное пространство, потенциальная и актуальная бесконечности, континиум, диалектическая противоположность, отрицание отрицания, бытие и небытие, фальсифицируемость и верифицируемость, математическая и диалектическая логики, недостаточность формальной логики, единство прерывного и непрерывного, сингулярность… Не использовались только теоремы К. Гёделя о неполноте, неравенства Д. Белла о нелокальности, инопланетяне и выражение i^i, где i – мнимая единица.

Не хочется завершать на грустной ноте историю, которой почти 2500 лет. Поэтому закончим замечательным четверостишием Константина Ефетова:

Ахилл бежал, а черепаха
Влекла его к земному краю.
Герой подумал не без страха:
«Я что-то тут не догоняю!»

Или я тоже что-то (или кого-то) не догнал?

***

В обсуждении результатов работы участвовали А.Д. Васенин, В.Д. Васенин, Д.В. Васенин, А.И. Тюшев, В.И. Тюшева и Д.В. Тюшева.

Список литературы:

1. Койре А. «Очерки истории философской мысли». – М.: Прогресс, 1985. – 282 с.

2. Васенин В.И. «Об апориях Зенона» // Журнал научных и прикладных исследований. – 2013. – № 4. – С. 56–58.

3. Васенин В.И. «Об апориях Зенона – II» // Журнал научных и прикладных исследований. – 2013. – № 11. – С. 42–44.

4. Мерцалов В.Л. «Решение апории Зенона «Стрела» // Журнал философских исследований. – 2022. – Том 8. – № 4. – С. 36–53.

5. Мерцалов В.Л. «Стрела Зенона – летит! (решение апории)» // Электронный философский журнал. – 2024. – Вып. 47. – С. 59–75.

6. Аристотель «Физика» // Сочинения в четырех томах. Том 3 – М.: Мысль, 1981 – 616 с.

7. Диоген Лаэртский «О жизни, учениях и изречениях знаменитых философов». – М.: Мысль, 1979. – 620 с.

8. «Фрагменты ранних греческих философов». Часть 1. – М.: Наука, 1989. – 576 с.