

**Ворона Елизавета Андреевна,**  
Магистрант, Санкт-Петербургский государственный  
архитектурно-строительный университет

## **АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЁТА ЗОНЫ ОТТАИВАНИЯ МНОГОЛЕТНЕМЁРЗЛЫХ ГРУНТОВ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ**

**Аннотация:** Исследуются аналитические методы решения задачи Стефана для оценки глубины протаивания вечномёрзлых грунтов под зданиями и сооружениями. Рассмотрены традиционные методы определения границы фазового перехода на основе одномерного уравнения теплопроводности. Проанализированы автомодельные решения, метод интегральных соотношений и упрощённые инженерные формулы.

**Ключевые слова:** многолетнемёрзлые грунты, задача Стефана, фронт оттаивания, аналитические методы, фазовый переход, теплопроводность.

### **Введение**

В районах распространения многолетнемёрзлых грунтов одной из ключевых задач инженерной геотехники остаётся сохранение надёжности возводимых зданий и сооружений. Тепло, исходящее от отапливаемых объектов, постепенно нарушает температурный режим основания, из-за чего мерзлые грунты начинают таять. Это нередко приводит к неравномерной деформации фундамента и, в ряде случаев, создаёт угрозу аварийного состояния конструкции. Поэтому оценка того, насколько глубоко и с какой скоростью происходит протаивание под сооружениями, представляет собой обязательную часть инженерно-геологической подготовки строительства на вечной мерзлоте.

С математической точки зрения такой процесс относят к задачам Стефана — особому виду задач теплопроводности, в которых положение границы фазового перехода изменяется во времени.

В инженерной практике задачи, связанные с определением зоны оттаивания многолетнемёрзлых грунтов, нередко приходится решать в условиях сложной геометрии и неоднородности теплофизических свойств среды. В таких случаях обычно применяют численные подходы — метод конечных элементов, метод контрольного объёма, а также метод сквозного счёта. Тем не менее аналитические решения не утрачивают своей значимости: они особенно полезны на этапе предварительных расчётов, при оценке параметров и для проверки корректности численных моделей, поскольку позволяют установить явные зависимости между временем, глубиной оттаивания и характеристиками грунта.

В настоящей работе выполняется обзор и структурирование существующих аналитических методов, предназначенных для расчёта зоны оттаивания многолетнемёрзлых грунтов. Особое внимание уделяется анализу их сильных сторон, ограничений и тем областям, где их применение наиболее оправдано на практике.

### **Математическая постановка задачи Стефана для оттаивания грунта**

#### **Основные допущения**

При построении аналитической модели оттаивания многолетнемёрзлых грунтов используется набор допущений, позволяющих упростить описание процесса. Прежде всего, тепловой режим принимается одномерным: это оправдано, когда размеры источника тепла, например здания, значительно превышают глубину зоны оттаивания. Передача энергии в толще грунта считается обусловленной только теплопроводностью, тогда как миграция влаги не рассматривается. Кроме того, свойства грунта задаются как постоянные внутри каждой фазы, но различающиеся для мёрзлого и талого состояния: для них отдельно принимаются значения теплопроводности и объёмной теплоёмкости. Переход поровой воды из одного фазового состояния в другое предполагается происходящим при неизменной температуре  $T^*$ , которую обычно принимают равной  $0^\circ\text{C}$ .



### Одномерная двухфазная задача Стефана

Рассмотрим полубесконечный массив мёрзлого грунта с начальной температурой  $T_0 < T^*$ . На поверхности  $x = 0$  в момент времени  $t = 0$  задаётся температура  $T_s > T^*$ , моделирующая воздействие отапливаемого здания. По мере прогрева массива граница раздела фаз  $X(t)$  (фронт оттаивания) перемещается вглубь грунта. В талой зоне ( $0 < x < X(t)$ ) и мёрзлой зоне ( $x > X(t)$ ) температурные поля описываются уравнениями теплопроводности:

$$\rho_t c_t = \frac{\partial T_t}{\partial t} = \lambda_t \frac{\partial^2 T_t}{\partial x^2}, 0 < x < X(t), t > 0$$

$$\rho_f c_f = \frac{\partial T_f}{\partial t} = \lambda_f \frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2}, x > X(t), t > 0$$

На подвижной границе фазового перехода выполняются два условия. Условие изотермичности задаёт температуру фазового перехода:

$$T_t(X(t), t) = T_f(X(t), t) = T^*$$

Второе условие, называемое условием Стефана, выражает баланс тепла на фронте с учётом скрытой теплоты фазового перехода  $L$ :

$$\lambda_f \left. \frac{\partial T_f}{\partial x} \right|_{x=X(t)} - \lambda_t \left. \frac{\partial T_t}{\partial x} \right|_{x=X(t)} = L \rho_f \frac{dX}{dt},$$

Где  $\rho_f$  — плотность мёрзлого грунта,  $L$  — удельная теплота фазового перехода (для воды  $L = 334$  кДж/кг).

### Классические аналитические методы решения

#### Автомодельное решение для полубесконечного массива

Для случая постоянных температур на границе и в начальный момент задача Стефана допускает автомодельное решение, впервые полученное Стефаном. Решение ищется в виде, зависящем от безразмерной переменной  $\eta = x/2\sqrt{a_t t}$ , что приводит к выражению для положения фронта оттаивания:

$$X(t) = 2\beta\sqrt{a_t t}$$

где  $a_t = \lambda_t/(\rho_t c_t)$  — температуропроводность талого грунта,  $\beta$  — безразмерный параметр, определяемый из трансцендентного уравнения.

При граничном условии первого рода (постоянная температура на поверхности) температура в талой зоне описывается функцией ошибок Гаусса:

$$T_t(x, t) = T_s - (T_s - T^*) \frac{\operatorname{erf}(x/2\sqrt{a_t t})}{\operatorname{erf}(\beta)}$$

Параметр  $\beta$  находится из уравнения:

$$\frac{Ste}{\sqrt{\pi} \cdot \operatorname{erf}(\beta) \cdot e^{\beta^2}}$$

где  $Ste = c_t (T_s - T^*)/L$  — число Стефана, характеризующее отношение явной теплоты к скрытой теплоте фазового перехода.

#### Метод интегральных соотношений

В инженерной практике часто применяют приближённый способ интегральных соотношений, также известный как метод теплового баланса, который был разработан Г. П. Бочевеком и А. В. Павловым. Его суть состоит в том, что распределение температуры в зоне таяния заменяют параболической кривой заранее выбранного вида.

Для первой стадии оттаивания, когда теплота, поступающая в мёрзлую зону, мала по сравнению с теплотой фазового перехода, получается особенно простое выражение:

$$X(t) = \sqrt{\frac{2\lambda_t(T_s - T^*)t}{L\rho_f}}$$

Формула Стефана используется в случаях, когда процесс протаивания можно рассматривать без учёта накопления тепла в зоне промёрзшего грунта, то есть в режиме, где



теплоаккумуляция происходит лишь в одной фазе. Благодаря своей простоте она позволяет оперативно оценивать глубину оттаивания и поэтому часто применяется в инженерных расчётах.

Для уточнённых расчётов можно использовать решение, учитывающее теплоаккумуляцию как в талой, так и в мёрзлой зоне :

$$X(t) = \sqrt{\frac{2\lambda_t(T_s - T^*)t}{L\rho_f}} (\lambda_t\vartheta_t + \lambda_f\vartheta_f)t,$$

где  $\vartheta_t$  и  $\vartheta_f$  — функции, учитывающие тепловые потоки в зонах.

### Решение для многослойных покрытий

В практических условиях основание здания часто представляет собой не один массив грунта, а многокомпонентную систему, включающую, например, бетонную подготовку, слой теплоизоляции и гидроизоляцию. Для таких многослойных схем аналитическое определение глубины оттаивания возможно выполнить с применением метода эффективных коэффициентов.

Суть данного способа состоит в том, что расчёт ведётся поэтапно: для каждого последующего слоя отдельно, при этом на каждом шаге используется точное аналитическое решение задачи нестационарной теплопроводности в многослойной среде. Значение глубины оттаивания за тот промежуток времени, когда фронт достигает границы очередного слоя, определяется по формуле:

$$X_n(t) = \sqrt{\frac{2(T_s - T^*)}{L\rho_f} \left( \frac{\lambda_t}{R_{\Sigma n}} \right) t},$$

где  $R_{\Sigma n}$  — суммарное термическое сопротивление вышележащих слоёв. Сравнение результатов расчёта с экспериментальными данными показывает удовлетворительную сходимость, позволяющую применять метод для предварительных инженерных расчётов глубины оттаивания оснований аэродромных покрытий и зданий со сложной конструкцией пола.

### Заключение

В современной геотехнической практике по-прежнему востребованы аналитические способы определения зоны оттаивания многолетнемёрзлых грунтов, если они основаны на решении одномерной задачи Стефана. Их основное преимущество заключается в том, что они дают достаточно простые и наглядные зависимости, позволяющие оперативно оценить глубину протаивания уже на начальных этапах проектирования.

Наиболее точное описание процесса обеспечивает классическое автомоделное решение, применимое для полубесконечной среды при неизменных граничных условиях. Для инженерных расчётов особенно удобен метод интегральных соотношений, известный как формула Стефана, поскольку он позволяет получить компактную и достаточно надёжную аппроксимацию. Кроме того, были предложены подходы, расширяющие аналитические решения на многослойные покрытия и повышающие их точность за счёт учёта теплопереноса в пределах мёрзлой толщи.

### Список литературы:

- 1 Численное решение задачи о процессах промерзания и протаивания в многолетнемёрзлых грунтах // Вестник Северо-Восточного федерального университета им. М.К. Аммосова – 2015 – С. 36 – 42
- 2 Крылов Д.А., Федотов А.А. Температурный режим вечномерзлого грунта под зданием со свайным фундаментом // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Естественные науки». – 2013. – № 3. – С. 106-119.
- 3 Д. А. Крылов, Н. И. Сидняев, А. А. Федотов, “Математическое моделирование распределения температурных полей”, Матем. моделирование, 25:7 (2013), 3–27

