DOI 10.58351/2949-2041.2025.24.7.002

Машунин Юрий Константинович
Доктор экономических наук, к.т.н., профессор
Дальневосточный федеральный университет
Mashunin Yu.K., Doctor of Economics, Ph.D., Professor
Far Eastern Federal University
ORCID id: 0000-0001-7071-8729

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА, МОДЕЛИРОВАНИЕ, ИНТЕРПРЕТАЦИЯ N-МЕРНОЙ В ДВУХМЕРНУЮ СИСТЕМУ, ВЫБОР ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ В ИНЖЕНЕРИИ И МАТЕРИАЛОВЕДЕНИИ. МНОГОМЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

COMPUTATIONAL MATHEMATICS, MODELING, INTERPRETATION OF AN N-DIMENSIONAL INTO A TWO-DIMENSIONAL SYSTEM, SELECTION OF OPTIMAL PARAMETERS IN ENGINEERING AND MATERIALS SCIENCE. MULTIDIMENSIONAL MATHEMATICS

Аннотация. Цель работы состоит в компьютерной инженерии и материаловедение: моделирование, интерпретация N-мерной в двухмерную и выбор оптимальных параметров инженерной системы на базе многомерной математики (раздел: теории и методов векторной оптимизации).

В рамках теории векторной оптимизации представлены принципы оптимальности решения векторных задач при равнозначных критериях и при заданном приоритете критерия https://rdcu.be/bhZ8i. (Работа "Vector optimization with equivalent and priority criteria" Springer Nature распространяется бесплатно.). На основе теории разработаны конструктивные методы решения задач векторной оптимизации, которые позволяют оценивать экспериментальные данные, во-первых, при равнозначных критериях, во-вторых, при моделировании инженерных систем с заданным приоритетом критерия при принятии оптимального решения. Практическая направленность показана при автоматизированном проектировании на базе векторной оптимизации инженерных систем, которым относятся структура материала. Для этой цели разработано программное обеспечение решения векторных задач нелинейного (ВЗНП) программирования. Программное обеспечение решения ВЗНП используются при цифровой трансформации принятия оптимальных решений в инженерных задачах. Численные примеры представлены цифровой трансформацией принятия оптимальных решений по структуре материала.

При принятии оптимальных решений в инженерных системах разработано: построение исходных данных (техническое задание) для моделирования структуры материала; преобразование математической модели структуры материала в условиях неопределенности в модель в условиях определенности; принятие оптимального решения (которое включает параметры и характеристики материала) с равнозначными критериями; принятие оптимального решения с заданным приоритетом критерия.

Abstract. The purpose of the work is in computer engineering and materials science: modeling, interpretation of N-dimensional into two-dimensional and selection of optimal parameters of an engineering system based on multidimensional mathematics (section: theory and methods of vector optimization). Within the framework of the theory of vector optimization, the principles of optimality of solving vector problems with equivalent criteria and with a given priority of the criterion are presented https://rdcu.be/bhZ8i. (The work "Vector optimization with equivalent and priority criteria» by Springer Nature is distributed free of charge.). On the basis of the theory, constructive methods for solving vector optimization problems have been developed, which make it possible to evaluate experimental data, firstly, with equivalent criteria, and secondly, when modeling engineering systems with a given criterion priority when making an optimal decision. Practical orientation is shown in computer-aided design based on vector optimization of engineering systems, which include the structure of the material. For this purpose, software for solving vector problems of nonlinear programming (VPNP) has been developed. VPNP solution software is used in the digital transformation of optimal decision-making in engineering problems. Numerical examples are presented by the digital transformation of optimal decision-making on the structure of the material. To make the optimal decision in engineering systems (on the example of the structure of the material), the following has been developed: the construction of initial data (technical specification) for modeling the structure of the material; transformation of a mathematical model of the structure of a material under conditions of uncertainty into a model under conditions of certainty; making an optimal decision (which includes parameters and characteristics of the material) with equivalent criteria; making an optimal decision with a given priority criterion.

Ключевые слова: Инженерия, материаловедение, Теория векторной оптимизации, Программное обеспечение векторной оптимизации, Цифровая трансформация, Многомерная математика.

Keywords: Engineering, Materials Science Research, Vector Optimization Theory, Vector Optimization Software, Digital Transformation, Multidimensional mathematics

1. Introduction

Исследование развития инженерных систем и науки о материалах показало, что их развитие зависит от некоторого множества функциональных характеристик, которые необходимо учитывать на стадии проектирования. Анализ функционирования инженерных систем показал, что улучшение по одной из характеристик приводит к ухудшению других характеристик. Для улучшения функционирования инженерной системы в целом необходимо улучшения всех характеристик в совокупности, [1, 2].

Математическая модель таких (инженерных) систем представлена многокритериальными задачами оптимизации и, как следствие, требуется решение многокритериальных (векторных) задач математического программирования. Исследования такого класса задач началось более ста лет тому назад в работе Pareto V [3]. Дальнейшее исследования многокритериальной оптимизации проводилось как на теоретическом уровне зарубежными [4, 5, 6, 34-39] и русскими авторами [13, 14, 15-33], так и на решении практических задач сначала в области экономики [15, 16, 44], а за тем в области инженерных систем [7-12, 16-33, 44].

Цель работы анализ, построение математической модели инженерных систем и структуры материала, исследование процессов цифровой трансформации развития инженерных систем в условиях определенности и неопределенности, выбор оптимальных параметров структуры материала на базе теории и методов векторной оптимизации (Многомерной математики).

В рамках теории Многомерной математики (раздел: векторной оптимизация) представлены принципы оптимальности решения векторных задач при равнозначных критериях и при заданном приоритете критерия, а также показаны конструктивные методы решения задач векторной оптимизации. Для моделирования и цифровой трансформации инженерных систем использованы векторные задачи нелинейного программирования, которые решались в условиях определенности и неопределенности.

Для реализации поставленной цели в работе представлены две области исследования: математическое, программное обеспечение и прикладная область.

В области математического и программного обеспечения представлена характеристика, проведён анализ и исследование задач векторной оптимизации, [13, 14, 15-33, 44]. В рамках теории векторной оптимизации представлены аксиоматика и принципы оптимальности решения векторных задач при равнозначных критериях и при заданном приоритете критерия. На основе принципов оптимальности разработаны конструктивные методы решения задач векторной оптимизации, которые позволяют принимать оптимальное решение, во-первых, при равнозначных критериях, во-вторых, при заданном приоритете критерия. При исследовании проблемы векторной оптимизации представлено численное решение векторной задачи нелинейного (выпуклого) программирования с четырьмя однородными критериями.

В прикладной части работы в организационном плане процесс моделирования и симулирования структуры материала представлен в виде методологии: «Методология выбора оптимальных параметров инженерных систем в условиях определенности и неопределенности». (Технические системы [16-32], технологические процессы [16, 22], материалы [18, 44]),

Задачи, которые возникают в процессе принятия оптимального решения выбора оптимальных параметров сложных инженерных системах включает последовательно три вида. *1 вид. Решение векторной задачи при равнозначных критериях*. Полученный результат является основой для дальнейшего исследования системы. При этом используется метод решения векторной задачи при равнозначных критериях. Если полученный результат удовлетворяет лицу, принимающего решения, (ЛПР – проектировщик), то он берется за основу. Если решение не удовлетворяет ЛПР, то переходим ко *2-му виду* (прямая задача), связанная с изменением параметров; или 3-му виду решения векторных задач (Обратная задача: «Какие будут параметры сложных технических систем при заданных характеристиках).

В организационном плане процесс моделирования и симулирования (the process of modeling and simulation of a engineering system) сложных инженерных систем, включающий три вида выше представленных задач, сформирован в виде методологии:

«*Методология выбора оптимальных параметров сложных инженерных систем в условиях определенности и неопределенности*», [18, 44].

Методология включает три блока, разделенных на ряд этапов:

Блок 1. Формирование технического задания, преобразование условий неопределенности в условия определенности;

Блок 2. Методология процесса принятия оптимального решения (выбора оптимальных параметров) в инженерной системе на базе векторной оптимизации (the process of simulation of a engineering system)

Блок 3. Исследование, проектирование, геометрическая интерпретация перехода от ***N***-мерному пространству и выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы (структуры материала) в многомерной математике

Реализация всех блоков методологии показана на численном примере (структуры материала).

2. Постановка проблемы. Построение математической модели структуры материала в условиях определенности и неопределенности

Химический состав материала изделия определяется (на единицу объема, веса) процентным содержанием некоторого множества компонент материала, которые в сумме равны ста процентам. Состав материала, характеризуется определенным набором функциональных характеристик, которые включают в себя механические и физико-химические свойства материалов. Одна группа свойств (функциональных характеристик) материала характеризуется тем, что их желательно по своей числовой величине получить как можно больше (например, прочность), другая группа свойств характеризуется тем, что их желательно по своей числовой величине получить как меньше. Улучшение по одной из этих характеристик приводит к ухудшению другой. В целом требуется подобрать такой состав материала, чтобы все свойства материала были как можно лучше в совокупности.

2.1. Математическая модель структуры материала

Рассматривается состав материала какого-либо изделия, технической системы, которая зависит от ряда компонент материала: $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_V\}$, где $\boldsymbol{V}$ – множества компонент материала, $Y = \{y_j, j = \overline{1,V}\}$, V – число компонент, из которых может быть составлен (изготовлен) материал, y_V – величина в процентах v-ой компоненты материала, каждая из которых лежит в заданных пределах:

$$y_v^{min} \leq y_v \leq y_v^{max}, v = \overline{1,V}, \quad (2.1)$$

где y_v^{min}, y_v^{max}, $\forall v \in V$ – нижний и верхний пределы изменения вектора компонент материала.

$\sum_{v=1}^{V} y_v = 100\%,$ (2.2)

сумма всех компонент материала равна ста процентам.

Состав материала оценивается набором (множеством) K физических свойств материала:

$H\ (Y) = \{h_k\ (Y), k = \overline{1, K}\},$ (2.3)

которые функционально зависят от конструктивных параметров: $Y = \{y_v, k = \overline{1, V}\}^T$;

k – индекс вида физического свойства материала, $k = \overline{1, K}$, где K – число видов свойств (функциональных характеристик) материала, представим их в виде вектор – функции.

$H\ (Y)$ – вектор-функция (векторный критерий), имеющая K – компонент-функций, (K – мощность множества $\boldsymbol{K}$): $H\ (Y) = \{h_k\ (Y), k = \overline{1, K}\}$. Множество $\boldsymbol{K}$ состоит из подмножества $\boldsymbol{K}_1$ компонент максимизации и подмножества $\boldsymbol{K}_2$ минимизации; $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_1 \cup \boldsymbol{K}_2$;

$H_1(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K_1}\}$ – это векторный критерий, каждая компонента которого максимизируется, $\boldsymbol{K}_1$ – число критериев, а $K_1 \equiv \overline{1, K_1}$- множество критериев максимизации. В дальнейшем будем предполагать, что $H_1(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K_1}\}$ непрерывные вогнутые функции (иногда будем их называть критериями максимизации);

$H_2(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K_2}\}$ – векторный критерий, каждая компонента которого минимизируется, $K_2 \equiv \overline{K_1 + 1, K} \equiv \overline{1, K_2}$ – множество критериев минимизации, K_2 – число. Предполагаем, что $h_k(Y), k = \overline{1, K_2}$- непрерывные выпуклые функции (будем иногда их называть критериями минимизации), т. е.:

$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_1 \cup \boldsymbol{K}_2, \boldsymbol{K}_1 \subset \boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}_2 \subset \boldsymbol{K}.$

Характеристики материала $H\ (Y) = \{h_k\ (Y), k = \overline{1, K}\}$ мы используем как критерии, а пределы изменения, накладываемые на каждый вид компонент, как параметрические ограничения. Математическую модель материала, решающую в целом проблему выбора оптимального проектного решения (выбора оптимальной структуры материала), представим в виде векторной задачи математического программирования:

$Opt\ H(Y) = \{\max H_1(Y) = \{\max h_k\ (Y), k = \overline{1, K_1}\},$ (2.4)

$\min H_2(Y) = \{\min h_k\ (Y), k = \overline{1, K_2}\}\},$ (2.5)

$G\ (Y) \le B,$ (2.6)

$\sum_{v=1}^{V} y_v(t) = 100\%,$ (2.7)

$y_v^{min} \le y_v \le y_v^{max}, v = \ \overline{1, V},$ (2.8)

где $Y = \{y_j, j = \overline{1, V}\}$ – вектор управляемых переменных (компонент материала) из (2.1);

$H\ (Y) = \{h_k\ (Y), k = \overline{1, K}\}$ – векторный критерий, каждая функция которого представляет характеристику (свойство) материала, функционально зависящую от вектора переменных Y;

$G\ (Y) = \{g_1\ (Y), \ldots, g_M\ (Y)\}^T$ – вектор-функция ограничений, накладываемых на структуру материала, $\boldsymbol{M}$ – множество ограничений.

Предполагается, что функции $H\ (Y) = \{h_k\ (Y), k = \overline{1, K}\}$ дифференцируемы и выпуклы, $G\ (Y) = \{g_i\ (Y), i = \overline{1, M}\ \}^T$ непрерывны, а заданное ограничениями (2.6)- (2.8) множество допустимых точек $\boldsymbol{S}$ не пусто и представляет собой компакт:

$S = \{X \in R^n | G(Y) \le 0, Y^{min} \le Y \le Y^{max}\} \ne \emptyset,$ (2.9)

Соотношения (2.4)-(2.8) образуют математическую модель материала. Требуется найти такой вектор параметров $Y^o \in \boldsymbol{S}$, при котором каждая компонента (характеристика) вектор – функции: $H_1(Y)$ принимает максимально возможное значение, а вектор – функции $H_2(Y)$ принимает минимальное значение:

$H_1(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K_1}\}, H_2(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K_2}\}.$ (2.10)

В данной статье исследование конструктивных свойств материала рассматриваются в статике. Но структура материала могут рассматриваться в динамике (например, при изменении внешней температуры за какой-нибудь период времени). Для этого можно, использовать дифференциально-разностные методы преобразования [4] и проводить исследование за небольшой дискретный промежуток времени $\Delta t \in \boldsymbol{T}$. В совокупности математическую модель материала (2.4)- (2.8) можно трактовать как системный подход к исследованию материала.

2.2. Построение математической модели структуры материала в условиях определенности и неопределенности

При построении математической модели материала (2.4)- (2.8), как и для технической системы [10-16], возможны условия: определенности и неопределенности.

2.2.1. Построение математической модели материала в условиях определенности

Условия определенности характеризуются тем, что известна функциональная зависимость каждой характеристики (свойства) материала и ограничений от конструктивных компонент материала. Для построения функциональной зависимости выполняем следующие работы.

1. Формируем множество всех функциональных характеристик (свойств) материала $\boldsymbol{K}$. Величину характеристики обозначим $h_k\ (Y), k = \overline{1,K}$. Определяем множество всех компонент материала $\boldsymbol{V}$, от которых зависят эти характеристики. Величины параметров представим в виде вектора $Y = \{y_j, j = \overline{1,V}\}$. Даем вербальное описание характеристик материала.

2. Мы проводим исследование физических процессов, протекающих в материале. Для этого используем фундаментальные законы физики: моделирование магнитных, температурных полей; законы сохранения энергии, движения и т. д. Устанавливаем информационную и функциональную связь характеристик материала и ее параметров: $H\ (Y) = \{h_k\ (Y), k = \overline{1,K}\}$.

3. Мы определяем функциональные ограничения: $H\ (Y) = \{h_k\ (Y), k = \overline{1,K}\}$

$h_k^{min} \le h_k \le h_k^{max}, k = \ \overline{1,K}$, или $H^{min} \le H \le H^{max}$

и параметрические ограничения:

$y_v^{min} \le y_v \le y_v^{max}, v = \ \overline{1,V}$, или $Y^{min} \le Y \le Y^{max}$.

Сумма всех компонент материала равна ста процентам: $\sum_{v=1}^{V} y_v(t) = 100\%$.

4. В результате мы построим математическую модель материала в виде векторной задачи математического программирования:

$$Opt\ H(Y) = \{\max H_1(Y) = \{\max h_k\ (Y), k = \overline{1,K_1}\}, \tag{2.10}$$

$$\min H_2(Y) = \{\min h_k\ (Y), k = \overline{1,K_2}\}\}, \tag{2.11}$$

$$H^{min} \le H \le H^{max}, \tag{2.12}$$

$$\text{при ограничениях } \sum_{v=1}^{V} y_v = 100\%, \tag{2.13}$$

$$y_v^{min} \le y_v \le y_v^{max}, v = \ \overline{1,V}, \tag{2.14}$$

Задача (2.10)- (2.14) адекватна задачи (2.4)- (2.8).

2.2.2. Построение математической модели материала в условиях неопределенности

Условия неопределенности характеризуются тем, что отсутствует достаточная информация о функциональной зависимости свойства материала от состава компонент. В этом случае проводятся экспериментальные исследования. Для заданного числа составов материалов:

$$Y_i = \{y_{ij}, j = \overline{1,V}\}, i = \overline{1,M}$$

определяются соответствующий набор свойств:

$H\ (Y_i) = \{h_k\ (Y_i), k = \overline{1,K}\}, i = \overline{1,M}$.

С учетом этого матрица экспериментов по исследованию структуры материала принимает вид:

$$\mathrm{I} = \left\| \begin{matrix} Y_1 = \{y_{1v}, v = \overline{1,V_1}\}\ h_1(Y_1) \dots\ h_K\ (Y_1) \\ \dots \\ Y_M = \{y_{Mv}, v = \overline{1,V_M}\}\ h_1(Y_M) \dots\ h_K\ (Y_M) \end{matrix} \right\|. \tag{2.15}$$

где столбец $v \in \boldsymbol{V}$ представляет числовую величину v-ой компоненты материала в процентах, $v = \overline{1,V}$ столбец $k \in \boldsymbol{K}$ представляет числовую величину k-го свойства материала, $k = \overline{1,K}$. Задача лица, принимающего решения, (ЛПР) – конструктора состоит в выборе такой альтернативы, которая позволила бы получить "в наибольшей мере устраивающий его (оптимальный) результат" [16, 18]. Множество критериев (характеристик) $\boldsymbol{K}$ подразделяется на два подмножества $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_1 \cup \boldsymbol{K}_2, \boldsymbol{K}_1 \subset \boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}_2 \subset \boldsymbol{K}$.

$\boldsymbol{K}_1$ – это подмножество характеристик, числовые величины которых желательно получить, как можно выше:

$$I_1\,(Y_i) = \{h_k\,(Y_i, i = \overline{1,M}), k = \overline{1,K_1}\} \to max$$

$\boldsymbol{K}_2$ – это подмножества технических характеристик, числовые величины которых желательно получить, как можно ниже:

$$I_2\,(Y_i) = \{h_k\,(Y_i, i = \overline{1,M}), k = \overline{1,K_2}\} \to min.$$

Решение задачи принятия решений по структуре материала (2.15) по своей сути близка к решению векторной задачи математического программирования, которая в условиях неопределенности примет вид:

$Opt\ H(Y) = \{\max I_1(Y) = \{\max h_k\,(Y_i, i = \overline{1,M}), k = \overline{1,K_1}\},$ (2.16)

$\min I_2(Y) = \{\min h_k\,(Y_i, i = \overline{1,M}), k = \overline{1,K_2}\}\},$ (2.17)

при ограничениях $h_k^{min}\,(Y_i, i = \overline{1,M}) \le h_k \le h_k^{max}\,(Y_i, i = \overline{1,M}), k = \overline{1,K},$ (2.18)

$\sum_{v=1}^{V} y_v = 100\%,$ (2.19)

$y_v^{min} \le y_v \le y_v^{max}, v = \overline{1,V},$ (2.20)

где $Y_i = \{y_{ij}, j = \overline{1,V}\}, i = \overline{1,M}$ – вектор управляемых переменных (конструктивных параметров);

$H(Y_i) = \{I_1(Y_i), I_1(Y_i)\}$ – векторный критерий, каждая компонента которого представляет характеристику (свойство) материала, функционально зависящую от величины дискретного значения вектора переменных $Y_i, i = \overline{1,M}$; M – множество дискретных значений вектора переменных $Y_i, i = \overline{1,M}$;

в (2.18) $h_k^{min}\,(Y_i) \le h_k \le h_k^{max}\,(Y_i), k = \overline{1,K}$ – вектор-функция ограничений, накладываемых на функции материала изделия, $y_v^{min} \le y_v \le y_v^{max}, v = \overline{1,V}$ – параметрические ограничения.

2.3. Построение математической модели материала в условиях определенности и неопределенности в виде векторной задачи

В реальной жизни условия определенности и неопределенности совмещаются. Модель материала так же отражает эти условия. Объединим модели (2.10)- (2.14) и (2.16)- (2.20). В итоге получим модель материала в условиях определенности и неопределенности в совокупности в виде векторной задачи математического программирования:

$Opt\ H(Y) = \{\max H_1(Y) = \{\max h_k\,(Y), k = \overline{1,K_1^{def}}\},$ (2.21)

$\max I_1(Y) = \{\max h_k\,(Y_i, i = \overline{1,M}), k = \overline{1,K_1^{unc}}\},$ (2.22)

$\min H_2(Y) = \{\min h_k\,(Y), k = \overline{1,K_2^{def}}\},$ (2.23)

$\min I_2(Y) = \{\min h_k\,(Y_i, i = \overline{1,M}), k = \overline{1,K_2^{unc}}\}\},$ (2.24)

при ограничениях $h_k^{min} \le h_k \le h_k^{max}, k = \overline{1,K},$ (2.25)

$\sum_{v=1}^{V} y_v = 100\%,$ (2.26)

$y_v^{min} \le y_v \le y_v^{max}, v = \overline{1,V},$ (2.27)

где Y – вектор управляемых переменных (конструктивных параметров материала);

$H(Y) = \{H_1(Y)\ I_1(Y)\ H_2(Y)\ I_2(Y)\}$ – векторный критерий, каждая компонента которого представляет вектор критериев (характеристик) материала, которые функционально зависят от значений вектора переменных Y; K_1^{def}, K_2^{def} (*definiteness*), K_1^{unc}, K_2^{unc} (*uncertainty*) множество критериев max и min сформированные в условиях определенности и неопределенности; в (2.25) вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование материала в производственных условиях, (2.27) параметрические ограничения.

3. Введение в многомерную математику: Анализ, Векторная задача математического программирования, Теория, Аксиомы и Аксиоматические методы, Принципы оптимальности

Математические модели структуры материала (2.21)-(2.27), а также модели технических систем, технологических процессов и динамической системы представлены векторными задачами математического программирования (ВЗМП), [16-21, 44]. Дальнейшее развитие исследования работ по теории векторной оптимизации привела к формированию "Многомерной математики".

3.1. Анализ развития современной математики.

Анализ математики современной проведен в соответствии [1, с. 560-563].

Математика – это наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира. Математика, как наука стала возможной после накопления достаточно большого фактического материала, возникла в древней Греции в 6-5 веках до новой эры, в соответствии с [1] четыре периода.

1. Зарождение математики. На ранних стадиях развития счет предметов бытия привел к созданию простейших понятий арифметики натуральных чисел.

2. Период элементарной математики. Исследование предметов бытия привел к созданию простейших понятий арифметических вычислений, определения площадей, объемов и т.п. возникает математика, как наука.

3. Период создания математики переменных величин. С 17 века начинается новый период развития математики. На первый план выдвигается ***понятие функции***, определяющее взаимосвязь переменных (параметров) исследуемого объекта. Изучение переменных величин и функциональных зависимостей приводит далее к основным понятиям математического анализа, к понятию предела, производной, дифференциала и интеграла. Создается анализ бесконечно малых в виде *дифференциального и интегрального* вычислений, позволяющее связывать конечные изменения переменных величин с их поведением на принимаемое решение (функцию). Основные законы механики и физики записываются в форме дифференциальных уравнений, и задача интегрирования этих уравнений выдвигается одной из важнейших задач математики.

4. Современная математики. Все созданные в 17 и 18 веках разделы математического анализа продолжали развиваться в 19, 20 и 21 веках. В качестве основного аппарата новых областей механики и математической физики усиленно разрабатывается теория дифференциальных уравнений обыкновенных и уравнений с частными производными, вычислительной математики. Проблемы нахождения наилучшего решения в задачах управления физическими или механическими системами, описываемые дифференциальными уравнениями, привели к созданию *теории оптимального управления*.

В целом процесс развития математики показывает, что при решении математических проблем, происходило исследование и анализ отдельной ***функции (одномерной)***, зависящей от некоторого множества переменных (параметров) исследуемого объекта, системы. (Подробнее смотри в [1, с. 560-563]).

В реальной жизни исследуемый объект, система при своем функционировании (развитии) характеризуется некоторым набором функциональных характеристик, которые зависят от одних и тех же параметров системы. Отсюда проблема многомерности исследуемых объектов, систем стала общенаучной.

Для решения проблемы многомерности мы представим векторную (многомерную) задачу оптимизации и рассмотрим теорию (аксиоматику, принципы оптимальности) ее решения, [15, 29, 44].

3.2. Векторная задача математического программирования

Векторная задача математического программирования (ВЗМП) представляет стандартную задачу математического программирования, которая имеет множество критериев. В задаче множество критериев представлены в виде вектора критериев.

Векторные задачи подразделяются на однородные и неоднородные ВЗМП.

Однородные ВЗМП максимизации – это векторная задача, у которой каждая компонента множества критериев направлена на максимизацию – max.

Однородные ВЗМП минимизации – это векторная задача, у которой каждая компонента множества критериев направлена на минимизацию – min.

Неоднородные ВЗМП – это векторная задача, у которой множество критериев разделено на два подмножества (вектора) критериев – максимизации и минимизации соответственно, т. е. неоднородные ВЗМП – это объединение двух видов однородных задач.

В соответствии с этими определениями представим выпуклую векторную задачу математического программирования с неоднородными критериями [5, 19, 21, 46].

$$Opt\ F(X) = \{\max F_1(X) = \{\max f_k\ (X), k = \overline{1, K_1}\}, \quad (3.1)$$

$$\min F_2(X) = \{\min f_k\ (X), k = \overline{1, K_2}\}\}, \quad (3.2)$$

$$G\ (X) \leq B, \quad (3.3)$$

$$X \geq 0, \quad (3.4)$$

где $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ – вектор переменных, т.е. это вектор из N-мерного евклидова $\boldsymbol{R}^N$, (обозначение $j = \overline{1, N}$ эквивалентно $j = 1,\ldots,N$);

$F(X)$ – вектор-функция (векторный критерий), имеющая K – компонент-функций, (K – мощность множества $\boldsymbol{K}$), $F(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K}\}$. Множество $\boldsymbol{K}$ состоит из подмножества $\boldsymbol{K}_1$ компонент максимизации и подмножества $\boldsymbol{K}_2$ минимизации; $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_1\cup\boldsymbol{K}_2$, для оценки совокупности критериев вводится обозначение операция «*opt*», которое включает в себя *max* и *min*;

$F_1(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K_1}\}$ – это векторный критерий, каждая компонента которого максимизируется, K_1 – число критериев, а $K_1 \equiv \overline{1, K_1}$- множество критериев максимизации (задача (3.1), (3.3), (3.4) представляют собой ВЗМП с однородными критериями максимизации). В дальнейшем будем предполагать, что $f_k(X), k = \overline{1, K_1}$ – непрерывные вогнутые функции (иногда будем их называть критериями максимизации);

$F_2(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K_2}\}$ – векторный критерий, каждая компонента которого минимизируется, $K_2 \equiv \overline{K_1 + 1, K} \equiv \overline{1, K_2}$ – множество критериев минимизации, K_2 – число, (задача (3.2) – (3.4) это ВЗМП с однородными критериями минимизации). Предполагаем, что $f_k(X), k = \overline{1, K_2}$- непрерывные выпуклые функции (будем иногда их называть критериями минимизации), т. е.:

$$\boldsymbol{K}_1 \cup \boldsymbol{K}_2 = \boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}_1 \subset \boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}_2 \subset \boldsymbol{K}. \quad (3.5)$$

$G(X) \leq B, X \geq 0$ – стандартные ограничения, $g_i(X) \leq b_i, i = 1, \ldots, M$, где b_i – набор вещественных чисел, а функции $g_i\ (X)$ предполагаются непрерывными и выпуклыми.

Обозначим: $\boldsymbol{S} = \{X \in \boldsymbol{R}^n | G(X) \leq 0, X^{min} \leq X \leq X^{max}\} \neq \emptyset$ – (3.6)

это допустимое множество точек (или более кратко – допустимое множество), задающиеся стандартными ограничениями (3.3)- (3.4) и тривиальными ограничениями $X \geq 0$. Предполагаем, что допустимое множество точек не пусто и представляет собой компакт. Векторная функция (критерий) минимизации $F_2(X)$может быть преобразован в векторную функцию (критерий) максимизации умножением каждой компоненты $F_2(X)$ на минус единицу. Векторный критерий $F_2(X)$ введен в ВЗМП (3.1)- (3.4) для того, чтобы показать, что в задаче имеется два подмножества критериев $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ с принципиально различными направлениями оптимизации.

Предполагаем, что точки оптимума, полученные по каждому критерию, не совпадают хотя бы для двух критериев. Если все точки оптимума совпадают между собой для всех критериев, то считаем решение тривиально.

3.3. Теория векторной оптимизации

Теория векторной оптимизации направлена на решение векторных (многокритериальных) задач математического программирования (3.1)- (3.4) с однородными и неоднородными критериями. Теория векторной оптимизации включает теоретические основы: аксиоматика, принципы оптимальности и методы решения векторных задач, во-первых, с равнозначными критериями и, во-вторых, с заданным приоритетом критерия. В совокупности теория векторной оптимизации представляет математический аппарат моделирования и принятия оптимального решения «объекта принятия решений».

В соответствии с этим определением «Теория векторной оптимизации" включает следующие разделы.

Основные теоретические понятия и определения, которые будут использованы при построении аксиоматики (аксиоматики Машунина Ю.К.), принципов оптимальности и методы решения задач векторной оптимизации. Аксиоматика Машунина Ю.К. подразделяется на аксиоматику, принципы оптимальности и методы решения векторных задач, во-первых, с равнозначными критериями и во-вторых, с заданным приоритетом критерия.

Концепция решения задач векторной оптимизации с равнозначными критериями. Концепция векторной оптимизации с приоритетом критерия. Симметрия в векторных задачах математического программирования: исследование, анализ.

«Объектом принятия решений» является: социальная система, экономическая и техническая система. Математический аппарат позволяет выбрать любую точку из множества точек, оптимальных по Парето, и показать ее оптимальность. Мы представили аксиоматику, принцип оптимальности и методы решения задач векторной оптимизации (3.1)- (3.4) с равнозначными критериями и заданным приоритетом критериев [6, 20]. Для простоты исследования критерии и ограничения ВЗМП (3.1)- (3.4) представлены полиномами второй степени, т.е. рассматриваются выпуклые векторные задачи, которые также включают векторные задачи линейного программирования. Выпуклые ВЗМП характеризуются свойством, что точка оптимума существует и такая точка только одна (Теорема Вейерштрасса).

3.4. Теоретические основы: Аксиомы и Аксиоматические методы.

Аксиома – это утверждение, не требующее логического доказательства. На основе этих утверждений строится та или иная теория.

Аксиоматический метод – это способ построения научной теории, при котором в основу теории кладутся некоторые исходные положения, называемые Аксиомами теории. В итоге все остальные положения теории получаются как логические следствия аксиом, [41]. В математике Аксиоматический метод зародился в работах древнегреческих геометров. Образцом аксиоматического метода является древнегреческий ученый Евклид, аксиомы которого были заложены в его знаменитом сочинении «Начала».

Дальнейшее развитие аксиоматического метода получил в работах Д. Гильберта в виде так называемого метода формализма системы. Общая схема построения произвольной формальной системы («S») включает:

1. *Язык системы*, в том числе алфавит – это перечень элементарных символов; правила образования (синтаксис), по которым строится формулы «S».

2. *Аксиомы системы* «S», которые представляют некоторое множество формул.

3. *Правила* вывода системы «*S*» [41].

В приложении к решению задачи векторной оптимизации Аксиоматика подразделяется на два раздела: 1. Аксиоматика решения задачи векторной оптимизации с равнозначными критериями; 2. Аксиоматика решения задачи векторной оптимизации с заданным приоритетом критериев.

Только при построении первоначальной аксиоматики возможно в дальнейшем построение принципа оптимальности и вытекающих из него алгоритмов решения векторных задач математического программирования.

4. Многомерная математика. Теория и методы векторной оптимизации

4.1. Теория, аксиоматика, принцип оптимальности и методы решения задач векторной оптимизации: равнозначные критерии

Аксиоматика векторной оптимизации с равнозначными критериями, как и теоретическая аксиоматика, рекомендованная Д. Гильбертом [41, с. 111], включает три раздела, представленные: 1) языком системы в виде определений нормализации критериев и относительной оценки; 2) аксиоматикой равенства критериев в задаче векторной оптимизации; 3) принципом оптимальности решения векторной задачи, на основании которого формируется конструктивный метод решения задачи векторной оптимизации с равнозначными критериями.

4.1.1. Язык системы: Нормализация критериев, относительная оценка

Определение 1. ***Нормализация критериев***.

Нормализация критериев (математическая операция: сдвиг плюс нормирование) представляет однозначное отображение функции $f_k(X)\ \forall k \in K$, в одномерное пространство R^1 (сама функция $f_k(X)\ \forall k \in K$ представляет собой функцию преобразования из N-мерного евклидова пространства $\boldsymbol{R^N}$ в $\boldsymbol{R^1}$). Для нормализации критериев в векторных задачах будут использоваться линейные преобразования:

$$f_k(X) = a_k f'_k(X) + c_k\ \forall k \in K, \text{ или } f_k(X) = (f'_k(X) + c_k)/a_k\ \forall k \in K, \quad (4.1)$$

где $f'_k(X), k = \overline{1,K}$ – старое (до нормализации) значение критерия; $f_k(X), k = \overline{1,K}$ – нормализованное значение, a_k, c_k- постоянные.

Нормализация критериев (4.1) $f_k(X) = (f'_k(X) + c_k)/a_k\ \forall k \in K$ представляет простое (линейное) инвариантное преобразование полинома, в результате которого структура полинома остается неизменной. В оптимизационной задаче нормализация критериев $f_k(X) = (f'_k(X) + c_k)/a_k\ \forall k \in K$ не влияет на результат решения. Действительно, если решается выпуклая оптимизационная задача:

$$\boldsymbol{max}_{\boldsymbol{X \in S}}\ f(X), \text{то в точке оптимума } X^* \in S\text{: } \frac{df(X^*)}{\mathrm{d}X} = 0. \quad (4.2)$$

В общем случае (в том числе с нормализацией критерия (2.7)) решается задача:

$$\boldsymbol{max}_{\boldsymbol{X \in S}}\ (a_k f'_k(X) + c_k), \quad (4.3)$$

то в точке оптимума $X^* \in S$:

$$\frac{d\,(a_k f(X^*) + c_k)}{\mathrm{d}X} = a_k \frac{d\big(f(X^*)\big)}{\mathrm{d}X} + \frac{d\,(c_k)}{\mathrm{d}X} = 0. \quad (4.4)$$

Результат идентичен, т.е. точка оптимума $X^*_k, k = \overline{1,K}$ является одной и той же для ненормализованных и нормализованных задач.

Определение 2. ***Определение относительной оценки функции (критерия).*** В векторной задаче (3.1)- (3.4) введем обозначение:

$$\lambda_k(X) = \frac{f_k(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0},\ \forall k \in \boldsymbol{K} \quad (4.5)$$

$\lambda_k(X)$ – *это относительная оценка*, которая представляет нормализованный критерий: $f_k(X)$, $\forall k \in \boldsymbol{K}$ в точке $X \in \boldsymbol{S}$, где в точке $X \in \boldsymbol{S}$ величина k-го критерия равна $f_k(X)$;

f_k^* – величина k-го критерия в точке оптимума $X \in \boldsymbol{S}$, полученной при решении векторной задачи (3.1)- (3.4) отдельно по k-му критерию; f_k^0- наихудшая величина k-го критерия на допустимом множестве $\boldsymbol{S}$ в векторной задаче. Относительная оценка $\lambda_k(X)\ \forall k \in K$, во-первых, измеряется в относительных единицах; во-вторых, относительная оценка $\lambda_k(X)\ \forall k \in K$ на допустимом множестве $\boldsymbol{S}$ меняется с нуля в точке X_k^0 к единице в точке оптимума X_k^*:

$$\forall k \in \boldsymbol{K} \lim_{X \to X_k^0} \lambda_k(X) = 0;\ \forall k \in \boldsymbol{K} \lim_{X \to X_k^*} \lambda_k(X) = 1:$$

Относительная оценка $\lambda_k(X)\ \forall k \in K$ находится в следующих пределах:

$$\forall k \in \boldsymbol{K}\ 0 \le \lambda_k(X) \le 1, X \in \boldsymbol{S}, \quad (4.6)$$

В результате такой нормализации все критерии ВЗМП (3.1)- (3.4) соизмеримы в относительных единицах, что позволяет, сравнимая их друг с другом, использовать критерии при совместной оптимизации.

Определение 3. ***Операция сравнения относительных оценок функции (критерия) между собой***.

Так как, любая функция (критерий) представлен в относительных оценках функций $\lambda_k(X)\ \forall k \in K$, которые лежат пределах (4.6) $\forall k \in \boldsymbol{K}\ 0 \le \lambda_k(X) \le 1$, то возможно сравнение относительных оценок по числовой величине. Для сравнения используется операция «вычитания». Если сравнивается две функции (критерия), измеренные в относительных оценках $\lambda_{k=1}(X)$ и $\lambda_{k=2}(X)\ \forall k \in K$, то возможны три ситуации:

первая, когда $\lambda_{k=1}(X) > \lambda_{k=2}(X)$;
вторая, когда $\lambda_{k=1}(X) = \lambda_{k=2}(X)$; (4.7)
третья, когда $\lambda_{k=1}(X) < \lambda_{k=2}(X)$. (4.8)

Первая и третья ситуация исследуется в разделе 6.

В разделе 5 исследуется вторая ситуация (4.7).

4.1.2. Аксиома равенства критериев в задаче векторной оптимизации.

Аксиома 1. ***О равенстве и равнозначности критериев в допустимой точке векторной задачи математического программирования***.

В векторной задаче оптимизации два критерия с индексами $l \in \boldsymbol{K}, q \in \boldsymbol{K}$ будем считать равнозначными в точке $X \in \boldsymbol{S}$, если относительные оценки по k-му и q-му критерию равны между собой в этой точке: $\lambda_l(X) = \lambda_q(X), l, q \in \boldsymbol{K}$.

Пояснение. Если в точке $X \in \boldsymbol{S}$ функции (критерии) в относительных единицах будут равны: $\lambda_l(X) = 0{,}45\ l \in \boldsymbol{K}$ и $\lambda_q(X) = 0{,}45, q \in \boldsymbol{K}$ (т.е. 45% от своей оптимальной величины, которая в относительных единицах равна 1), то такие критерии не «равны» друг другу, а равнозначны по своему числовому значению. И каждый критерий $l \in \boldsymbol{K}$, $q \in \boldsymbol{K}$ несет свой функциональный смысл, числовая величина которого может быть получена, используя нормализацию критериев (4.5).

Определение 4. Определение минимального относительного уровня.

Относительный уровень λ в векторной задаче представляет нижнюю оценку точки $X \in S$ среди всех относительных оценок $\lambda_k(X), k = \overline{1,K}$:

$$\forall X \in \boldsymbol{S}\ \lambda \le \lambda_k(X), k = \overline{1,K}, \tag{4.9}$$

нижний уровень для выполнения условия (2.9) в точке $X \in S$ определяется как:

$$\forall X \in S\ \lambda = \boldsymbol{min}_{k \in K} \lambda_k(X). \tag{4.10}$$

Соотношения (4.9) и (4.10) являются взаимосвязанными. Они служат переходом от операции (4.10) определения min к ограничениям (4.9) и наоборот. Относительный уровень λ позволяет объединить все критерии в векторной задаче одной числовой характеристикой λ и производить над ней определенные операции, тем самым, выполняя эти операции над всеми критериями, измеренными в относительных единицах.

Относительный уровень λ функционально зависит от переменной $X \in \boldsymbol{S}$. Поэтому, изменяя X, можем изменять все $\lambda_k(X), k = \overline{1,K}$ и соответственно нижний уровень $\lambda = \boldsymbol{min}_{k \in K} \lambda_k(X)$, который является характеристикой многомерной (многофункциональной) системы.

Пояснение. Величина относительной оценки $\forall k \in K\ \lambda_k(X)$ является характеристикой *одномерной системы*, а величина минимального относительного уровня $\lambda = \boldsymbol{min}_{k \in K} \lambda_k(X)$ является характеристикой *многомерной* математики.

4.1.3. Принцип оптимальности решения многомерной (векторной) задачи оптимизации с равнозначными критериями.

Определение 5. ***Принцип оптимальности решения векторной задачи с равнозначными критериями.***

Векторная задача математического программирования при равнозначных критериях решена, если найдена точка $X^o \in \boldsymbol{S}$ и максимальный уровень λ^o (верхний индекс о – оптимум) среди всех относительных оценок такой, что

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{X \in \boldsymbol{S}} \boldsymbol{min}_{k \in \boldsymbol{K}} \lambda_k(X) \tag{4.11}$$

Используя взаимосвязь выражений (4.9) и (4.10), преобразуем максиминную задачу (4.11) в экстремальную задачу:

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{X \in \boldsymbol{S}}\ \lambda \tag{4.12}$$

при ограничениях $\lambda \le \lambda_k(X), k = \overline{1,K}$. (4.13)

Полученную задачу (4.12)- (4.13) назовем λ-задачей. λ-задача (4.12)- (4.13) имеет (N+1) размерность, как следствие результат решения λ-задачи (4.12)- (413) представляет собой оптимальный вектор $X^o \in R^{N+1}$, (N+1)-я компонента которого суть величина λ^o, т. е. $\boldsymbol{X^o} = \{x_1^o,\ x_2^o, \dots, x_N^o, x_{N+1}^o\}$, при этом $x_{N+1}^o = \lambda^o$, (N+1) компонента вектора X^o выделена в λ^o.

Полученная пара $\{\lambda^o, X^o\} = \boldsymbol{X^o}$ характеризует оптимальное решение λ-задачи (4.12)-(4.13) и соответственно векторной задачи математического программирования (3.1)- (3.4) с равнозначными критериями, решенную на основе нормализации критериев и принципе гарантированного результата. Назовем в оптимальном решении $\boldsymbol{X^o} = \{\lambda^o, X^o\}$, X^o – оптимальной точкой, а λ^o – максимальным уровнем.

Теорема 1. ***Теорема о двух наиболее противоречивых критериях в ВЗМП с равнозначными критериями***.

В выпуклой векторной задаче математического программирования (3.1)- (3.4) с равнозначными критериями, решенной на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата, в оптимальной точке $\boldsymbol{X^o} = \{\lambda^o, X^o\}$ всегда имеется два критерия – обозначим их индексами $q\in\boldsymbol{K}, p\in\boldsymbol{K}$ (которые являются самыми противоречивыми из множества критериев $k = \overline{1, K}$), и для которых выполняется равенство:

$$\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_p(X^o), q, p \in \boldsymbol{K}, X \in \boldsymbol{S}, \tag{4.14}$$

и другие критерии определяются неравенством:

$$\lambda^o \le \lambda_k(X^o), \forall k \in \boldsymbol{K}, q \ne p \ne k. \tag{4.15}$$

Впервые доказательство теоремы 1 представлено в [15, стр.22], в дальнейшем повторено в работе [19, стр.234]. Вместе с тем, что точка X^o является оптимальным решением ВЗМП.

4.1.4. Компьютерный метод решения задачи векторной оптимизации с равнозначными критериями.

Для решения векторной задачи математического программирования (3.1)-(3.4) разработан метод, основанный на нормализации критериев, аксиоматике и принципе максимина (гарантированного результата). Конструктивный метод решения векторной задачи оптимизации с равнозначными критериями включает два блока: *1-й блок* «Системный анализ» – разделен на три шага; *2-й блок* «Принятие оптимального решения», включающий два шага: построения λ-задачи и ее решения.

Блок 1. Системный анализ.

Шаг 1. Решается задача (3.1)- (3.4) по каждому критерию отдельно, т.е. для $\forall k \in \boldsymbol{K}_1$ решается на максимум, а для $\forall k \in \boldsymbol{K}_2$ решается на минимум.

В результате получим: X_k^*- точка оптимума по соответствующему критерию, $k = \overline{1, K}$; $f_k^* = f_k\ (X_k^*)$ – величина k-го критерия в этой точке, $k = \overline{1, K}$.

Шаг 2. Определяем наихудшую величину каждого критерия (антиоптимум): $f_k^0, k = \overline{1, K}$. Для чего решается задача (3.1)- (3.4) для каждого критерия $k = \overline{1, \boldsymbol{K}_1}$ на минимум: $f_k^0 = min\ f_k\ (X), G\ (X) \le B, X \ge 0, k = \overline{1, \boldsymbol{K}_1}$ для каждого критерия $k = \overline{1, \boldsymbol{K}_2}$ на максимум:

$$f_k^0 = max\ f_k\ (X), G\ (X) \le B, X \ge 0, k = \overline{1, \boldsymbol{K}_2}.$$

В результате решения получим: $X_k^0 = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ – точка оптимума по соответствующему критерию, $k = \overline{1, K}$; $f_k^0 = f_k\ (X_k^0)$ – величина k-го критерия.

Шаг 3. Выполняется системный анализ множества точек, оптимальных по Парето. В точках $X^* = \{X_k^*, k = \overline{1, K}\}$ определяются величины целевых функций $F\ (X^*)$ и относительных оценок $\lambda\ (X^*)$: $\lambda_k(X) = \frac{f_k\ (X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, \forall k \in \boldsymbol{K}$. Результат системного анализа:

$$F\ (X^*) = \{f_k\ (X_k^*), q = \overline{1, K}, k = \overline{1, K}\} = \begin{vmatrix} f_1(X_1^*), \dots, f_K(X_1^*) \\ \dots \\ f_1\ (X_K^*), \dots, f_K\ (X_K^*) \end{vmatrix}, \tag{4.16}$$

$$\lambda\ (X^*) = \{\lambda_q\ (X_k^*), q = \overline{1, K}, k = \overline{1, K}\} = \begin{vmatrix} \lambda_1(X_1^*), \dots, \lambda_K(X_1^*) \\ \dots \\ \lambda_1\ (X_K^*), \dots, \lambda_K\ (X_K^*) \end{vmatrix}. \tag{4.17}$$

Любая относительная оценка (4.17) лежит в пределах $0 \le \lambda_k(X) \le 1, k = \overline{1, K}$.

Из результатов системного анализа (4.16)-(4.17) вытекает проблема: найти такую (оптимальную) точку, в которой все относительные оценки: $\lambda_q\ (X), q = \overline{1, K}$ были близки к единице. На решение этой проблемы направлена λ-задача.

Блок 2. Принятие оптимального решения. Включает два шага.

Шаг 4. Построение λ-задачи. Создание λ-задачи осуществляется в два этапа: первоначально строится максиминная задача оптимизации с эквивалентными критериями, которые на втором этапе преобразуются в стандартную задачу математического программирования, названной λ-задачей. Для построения максиминная задача используем определение 2:

$\forall X \in \boldsymbol{S}\ \lambda = \boldsymbol{min}_{\boldsymbol{k \in K}} \lambda_k\ (X).$

Нижний уровень λ максимизируем по $X \in S$. В результате сформулируем максиминную задачу оптимизации с нормализованными критериями:

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{\boldsymbol{X \in S}} \boldsymbol{min}_{\boldsymbol{k \in K}} \lambda_k\ (X). \quad (4.18)$$

На втором этапе задача (4.18) преобразуется в стандартную задачу математического программирования, названную λ-задача:

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{\boldsymbol{X \in S}}\ \lambda, \lambda^o = \boldsymbol{max}_{\boldsymbol{X \in S}}\ \lambda, \quad (4.19)$$

$$\lambda - \lambda_k(X) \le 0, k = \overline{1, K}, \to \lambda - \frac{f_k\ (X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0} \le 0, k = \overline{1, K}, \quad (4.20)$$

$$G\ (X) \le B, X \ge 0, G\ (X) \le B, X \ge 0, \quad (4.21)$$

где вектор неизвестных $\boldsymbol{X}$ имеет размерность $N + 1$: $X = \{\lambda, x_1, \dots, x_N\}$.

Шаг 5. Решение λ-задачи. λ-задача (4.19)-(4.21) – стандартная задача выпуклого программирования, для ее решения используются стандартные методы. В результате решения λ-задачи получим:

$\boldsymbol{X^o} = \{\lambda^o, X^o\}$ – точку оптимума; (4.22)

$f_k(X^o), k = \overline{1, K}$- величины критериев в этой точке; (4.23)

$\lambda_k(X^o) = \frac{f_k\ (X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}$- величины относительных оценок; (4.24)

λ^o – максимальная относительная оценка, которая является максимальным нижним уровнем для относительных оценок $\lambda_k(X^o)$. λ^o – гарантированный результат в относительных единицах.

λ^o гарантирует, что в точке X^o относительные оценки $\lambda_k(X^o)$ больше или равны λ^o:

$$\lambda_k(X^o) \ge \boldsymbol{\lambda^o}, k = \overline{1, K} \text{ or } \boldsymbol{\lambda^o} \le \lambda_k(X^o), k = \overline{1, K}, X^o \in \boldsymbol{S}, \quad (4.25)$$

и в соответствии с теоремой 1 точка оптимума $X^o = \{\boldsymbol{\lambda^o}, x_1, \dots, x_N\}$ является оптимальной по Парето.

4.2. Теория, аксиоматика, принцип оптимальности и методы решения задач векторной оптимизации: с приоритетом критерия

В определении 3 указано, что если сравнивать две функции (критерия), измеренных в относительных оценках $\lambda_{k=1}(X)$ и $\lambda_{k=2}(X)\ \forall k \in K$, то возможны три ситуации. Вторая ситуация, когда $\lambda_{k=1}(X) = \lambda_{k=2}(X)$ исследована в разделе 2.2 (равнозначные критерии). Ситуации: первая, когда $\lambda_{k=1}(X) > \lambda_{k=2}(X)$, и третья, когда $\lambda_{k=1}(X) < \lambda_{k=2}(X)$, исследуются в этом разделе. Такие ситуации определяются, как задачи с приоритетом критерия.

Для построения методов решения проблемы векторной оптимизации с приоритетом критерия мы введем следующие определения: О приоритете одного критерия над другим; О числовом выражении приоритета критерия над другим; О заданном числовом выражении приоритета одного критерия над другим; О нижнем уровне среди всех относительных оценок с приоритетом критерия; О подмножестве точек, приоритетных по критерию; Принцип оптимальности 2 – Решение векторной задачи с заданным приоритетом критерия, [17, 43, 44].

4.2.1. Аксиоматика векторной оптимизации с приоритетом критерия

Язык системы аксиоматики решения векторной задачи с заданным приоритетом критерия включает определения: 1) Приоритет одного критерия над другим; 2) Числовое значение приоритета критерия; 3) Нижний уровень критерия среди всех относительных оценок с приоритетом критерия.

Определение 6. О приоритете одного критерия над другим.

Критерий $q \in \boldsymbol{K}$ в векторной задаче (3.1)- (3.4) в точке $X \in \boldsymbol{S}$ имеет приоритет над другими критериями $k = \overline{1, K}$, если относительная оценка $\lambda_q(X)$ по этому критерию больше или равна относительных оценок $\lambda_k(X)$ других критериев, т. е.:

$\lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), k = \overline{1,K},$ (4.26)

строгий приоритет, если хотя бы для одного критерия $t \in \boldsymbol{K}$:

$\lambda_q(X) > \lambda_k(X), t \neq q$, а для остальных критериев $\lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), k = \overline{1,K}, k \neq t.$ (4.27)

Введением определения приоритета критерия $q \in \boldsymbol{K}$ в ВЗМП (3.1)- (3.4) выполнено переопределение раннего понятия приоритета. Если раньше в него вкладывалось интуитивное понятие о важности этого критерия, то сейчас эта "важность" определяется математически: чем больше относительная оценка q-го критерия над другими, тем он важнее (приоритетнее), и наиболее высокий приоритет в точке оптимума $X_k^*, \forall q \in \boldsymbol{K}$.

Из определения выражения приоритета критерия $q \in \boldsymbol{K}$ в векторной задаче в уравнениях (3.1)- (3.4) следует, что возможная область соответствующая множеству точек $\boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}$, которое характеризуется как $\lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), \forall k \neq q, \forall X \in \boldsymbol{S}_q$. Однако, вопрос на сколько критерий $q \in \boldsymbol{K}$ в точке множества $\boldsymbol{S}_q$ имеет больший приоритет относительно другого критерия остается открытым. Для ответа на этот вопрос, мы вводим коэффициент связи между парой относительных оценок q и k, что, в целом, представляет вектор:

$P^q(X) = \{p_k^q(X) \mid k = \overline{1,K}\}, q \in \boldsymbol{K}\ \forall X \in \boldsymbol{S}_q.$ (4.28)

Определение 7. О числовом выражении приоритета критерия над другими.

В векторной задаче (3.1)- (3.4) с приоритетом критерия q-го над другими критериями $k = \overline{1,K}$, для $\forall X \in \boldsymbol{S}_q$, вектор $P^q(X)$ показывает во сколько раз относительная оценка $\lambda_q(X), q \in \boldsymbol{K}$, больше относительных оценок $\lambda_k(X), k = \overline{1,K}$:

$P^q(X) = \left\{p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}, k = \overline{1,K}\right\}, p_k^q(X) \geq 1\ \forall X \in \boldsymbol{S}_q \subset S, k = \overline{1,K}, \forall q \in \boldsymbol{K}.$ (4.29)

Такое отношение $p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}$ назовем числовым выражением приоритета q-го критерия над остальными критериями $k = \overline{1,K}$.

Определение 7а. О заданном числовом выражении приоритета одного критерия над другим. В векторной задаче (3.1)- (3.4) с приоритетом критерия $q \in \boldsymbol{K}$ для $\forall X \in \boldsymbol{S}$ вектор $P^q = \{p_k^q, k = \overline{1,K}\}$, считается заданным лицом, принимающим решения, (ЛПР), если задана каждая компонента этого вектора. Заданная ЛПР компонента p_k^q, с точки зрения ЛПР, показывает во сколько раз относительная оценка $\lambda_q(X), q \in \boldsymbol{K}$ больше остальных относительных оценок $\lambda_k(X), k = \overline{1,K}$. Вектор $p_k^q, k = \overline{1,K}$ является заданным числовым выражением приоритета q-го критерия над остальными критериями $k = \overline{1,K}$:

$P^q(X) = \{p_k^q(X), k = \overline{1,K}\}, p_k^q(X) \geq 1, \forall X \in \boldsymbol{S}_q \subset S, k = \overline{1,K}, \forall q \in \boldsymbol{K}.$ (4.30)

Векторная задача (3.1)– (3.4), в которой задан приоритет какого-либо из критериев, называют векторной задачей с заданным приоритетом критерия. Проблема задачи вектора приоритетов возникает тогда, когда необходимо определить точку $X^o \in \boldsymbol{S}$ по заданному вектору приоритетов.

При операции сравнения относительных оценок с приоритетом критерия $q \in \boldsymbol{K}$, аналогично, как и в задаче с эквивалентными критериями, введем дополнительную числовую характеристику λ, которую назовем *уровнем*.

Определение 8. О нижнем уровне среди всех относительных оценок с приоритетом критерия. Уровень λ является нижним среди всех относительных оценок с приоритетом критерия $q \in \boldsymbol{K}$, таким, что

$$\lambda \leq p_k^q \lambda_k(X), k = \overline{1,K}, q \in \boldsymbol{K}, \forall X \in \boldsymbol{S}_q \subset S, \quad (4.31)$$

нижний уровень для выполнения условия (4.32) определяется

$$\lambda = min_{k \in K} p_k^q \lambda_k(X), q \in \boldsymbol{K}, \forall X \in \boldsymbol{S}_q \subset S. \quad (4.32)$$

Соотношения (4.31) и (4.32) являются взаимосвязанными и служат в дальнейшем переходом от операции определения min к ограничениям и наоборот. В разделе 3.1 мы дали определение точки $X^o \in \boldsymbol{S}$, оптимальной по Парето, с эквивалентными критериями. Рассматривая данное определение как исходное, мы построим ряд аксиом деления допустимого множества точек $\boldsymbol{S}$, во-первых, как подмножество точек, оптимальных по Парето S^o, и, во-вторых, на подмножество точек $\boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}, q \in \boldsymbol{K}$, приоритетным на q -му критерию.

4.2.2. Аксиоматика приоритета критериев в задаче векторной оптимизации.

Аксиома 2. О подмножестве точек, приоритетных по критерию в задаче векторной оптимизации.

В векторной задаче (3.1)-(3.4) подмножество точек $\boldsymbol{S}_q \subset S$ называется областью приоритета критерия $q \in K$ над другими критериями, если $\forall X \in \boldsymbol{S}_q\ \forall k \in \boldsymbol{K}\ \lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), q \neq k$.

Это определение распространяется и на множество точек $\boldsymbol{S}^o$, оптимальных по Парето, что дается следующим определением.

Аксиома 2а. ***О подмножестве точек, приоритетных по критерию, на множестве точек оптимальных по Парето***.

В векторной задаче (3.1)- (3.4) подмножество точек $\boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}^o \subset \mathrm{S}$ называется областью приоритета критерия $q \in \boldsymbol{K}$ над другими критериями, если $\forall \mathrm{X} \in S_q^o\ \forall k \in K\ \lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), q \neq k$. Дадим некоторые пояснения.

Аксиома 2 и 2а позволила представить в векторной проблеме (3.1)-(3.4) допустимое множество точек $\boldsymbol{S}$, включая подмножество точек, оптимальных по Парето, $\boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S}$, в подмножества:

одно подмножество точек $\boldsymbol{S}' \subset \boldsymbol{S}$, где критерии эквивалентны, и подмножество точек $\boldsymbol{S}'$, пересекаясь с подмножеством точек $\boldsymbol{S}^o$, выделяет подмножество точек, оптимальных по Парето, в подмножество с эквивалентными критериями $\boldsymbol{S}^{oo} = \boldsymbol{S}' \cap \boldsymbol{S}^o$, которое, как это показано далее, состоит из одной точки $X^o \in \boldsymbol{S}$, т.е.

$X^o = \boldsymbol{S}^{oo} = \boldsymbol{S}' \cap \boldsymbol{S}^o, \boldsymbol{S}' \in \boldsymbol{S}, \boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S}$; (4.33)

«$\boldsymbol{K}$» подмножеств точек, где у каждого критерия $q = \overline{1, K}$ имеется приоритет над другими критериями $k = \overline{1, K}, q \neq k$. Таким образом, выполнено разделение, во-первых, множества всех допустимых точек $\boldsymbol{S}$, на подмножества $\boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}, q = \overline{1, K}$, и, во-вторых, разделение подмножества точек, оптимальных по Парето, $\boldsymbol{S}^o$, на подмножества $\boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}, q = \overline{1, K}$.

Отсюда верны следующие соотношения:

$\boldsymbol{S}' \cup \left(\bigcup_{q \in K} \boldsymbol{S}_q^o\right) \equiv \boldsymbol{S}^\circ, \boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}^\circ \subset \boldsymbol{S}, q = \overline{1, K}$. (4.34)

Мы заметим, что подмножество точек $\boldsymbol{S}_q^o$, с одной стороны, включено в область (подмножество точек), имеющих приоритет критерия $q \in \boldsymbol{K}$ над другими критериями: $\boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}$,

и с другой стороны, на подмножество точек, оптимальны поз Парето: $\boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}^\circ \subset \boldsymbol{S}$.

Аксиома 2 и числовое выражение приоритета критерия (Определение 5) позволяет определять каждую допустимую точку $X \in \boldsymbol{S}$ (посредством вектора:

$P^q(X) = \{p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}, k = \overline{1, K}\}$, формироваться и выбирать: (4.35)

• подмножество точек по приоритетному критерию $\boldsymbol{S}_q$, который включен в множество точек $\boldsymbol{S}$, $\forall q \in \boldsymbol{K}\ X \in \boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}$, (такое подмножество точек может использоваться в проблемах кластеризации, но это вне статьи);

• подмножество точек по приоритетному критерию $\boldsymbol{S}_q^o$, который включен в ряд точек $\boldsymbol{S}^o$, оптимальных по Парето, $\forall q \in K, X \in \boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}^\circ$.

В итоге получим:

Множество допустимых точек $X \in \boldsymbol{S} \rightarrow$	Подмножества точек оптимума по Парето, $X \in \boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S} \rightarrow$	Подмножество точек Парето с приоритетом $q \in K\ X \in \boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S} \rightarrow$	Отдельная точка, $\forall X \in \boldsymbol{S}$ $X \in \boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S}$

Это самый важный результат теории, который позволяет на основе этих трех аксиом вывести принцип оптимальности и построить методы выбора *любой точки* из множества точек, оптимальных по Парето. Такая классификация подмножества точек может использоваться в проблемах кластеризации, но это выходит за рамки статьи.

4.2.3. Принцип оптимальности решения векторной оптимизации с заданным приоритетом критерия

Определение 9. Принцип оптимальности 2. Решение векторной задачи с заданным приоритетом критерия.

Векторная задача (3.1)-(3.4) с заданным приоритетом q-го критерия $p_k^q\lambda_k(X), k = \overline{1,K}$ считается решенной, если найдена точка X^o и максимальный уровень λ^o среди всех относительных оценок такой, что

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{X\in S}\boldsymbol{min}_{k\in K} p_k^q\lambda_k\ (X), q \in \boldsymbol{K}. \quad (4.36)$$

Используя взаимосвязь (4.31) и (4.32), преобразуем максиминную задачу (4.36) в λ-задачу, которую назовем λ-задачей с приоритетом q-го критерия:

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{X\in S}\ \lambda, \quad (4.37)$$

при ограничениях $\lambda \le p_k^q\lambda_k\ (X), k = \overline{1,K}$. (4.38)

Мы называем уравнения (4.37)-(4.38) λ-задачей с приоритетом критерия.

В оптимальном решении $\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\}$, $\boldsymbol{X^o}$ – оптимальная точка, а λ^o – максимальный нижний уровень. Точка X^o и уровень λ^o соответствуют ограничениям (5.8), которые можно записать как: $\lambda^o \le p_k^q\lambda_k(X^o), k = \overline{1,K}$.

Эти ограничения являются основой оценки правильности результатов решения в практических векторных задачах оптимизации.

Определение 1 и 2 «Принципы оптимальности» дают возможность сформулировать понятие операции «opt».

Определение 9. (*Математическая операция «opt»*).

В векторной задаче (3.1)- (3.4), которая представлена критериями «max» и «min», математическая операция «opt» состоит в определении точки X^o и максимального нижнего уровня λ^o, в котором все критерии измеряются в относительных единицах:

$$\lambda^\circ \le \lambda_k\ (X^\circ) = \frac{f_k\ (X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1,K}, \quad (4.39)$$

т.е. все критерии $\lambda_k(X^o), k = \overline{1,K}$ равны или больше максимального уровня λ^o, (поэтому λ^o также называется гарантированным результатом).

Теорема 2. ***Теорема о наиболее противоречивых критериях в векторной задаче с заданным приоритетом***.

Если в выпуклой векторной задаче математического программирования максимизации (3.1)- (3.4) задан приоритет q-го критерия $p_k^q, k = \overline{1,K}, \forall q \in \boldsymbol{K}$ над другими критериями, в точке оптимума $X^o \in \boldsymbol{S}$, полученной на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата, всегда найдется два критерия с индексами $r \in \boldsymbol{K}, t \in \boldsymbol{K}$, для которых выполняется строгое равенство из:

$$\lambda^\circ = p_k^r\lambda_r\ (X^\circ) = p_k^t\ \lambda_t\ (X^\circ), r, t, \in \boldsymbol{K}, \quad (4.40)$$

и другие критерии определяются неравенствами:

$\lambda^\circ \le p_k^q\ (X^\circ), k = \overline{1,K}, \forall q \in \boldsymbol{K}, q \ne r \ne t$. (4.41)

Критерии с индексами $r \in \boldsymbol{K}, t \in \boldsymbol{K}$, для которых выполняется равенство (4.40), называются наиболее противоречивыми.

Доказательство. Аналогично теореме 2 [19, 20].

Заметим, что в (4.40) и (4.41) индексы критериев $r \in \boldsymbol{K}, t \in \boldsymbol{K}$ могут совпадать с индексом $q \in \boldsymbol{K}$.

Следствие теоремы 1. О равенстве оптимального уровня и относительных оценок в векторной задаче с двумя критериями с приоритетом одного из них.

В выпуклой векторной задаче математического программирования с двумя эквивалентными критериями, решаемой на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата, в оптимальной точке X^o всегда выполняется равенство: при приоритете первого критерия над второй:

$$\lambda^o = \lambda_1(X^o) = p_2^1\ (X^\circ)\lambda_2(X^o), X^o \in \boldsymbol{S}, \quad (4.42)$$

где $p_2^1\ (X^\circ) = \lambda_1(X^o)/\lambda_2(X^o)$, при приоритете второго критерия над первым:

$\lambda^o = \lambda_2(X^o) = p_1^2\,(X^o)\lambda_1(X^o), X^o \in \boldsymbol{S}$,

где $p_1^2\,(X^o) = \lambda_2(X^o)/\lambda_1(X^o)$.

4.2.4.

Шаг 1. Решаем векторную задачу с равнозначными критериями. Алгоритм решения представлен в разделе 4.1.4. В результате решения получаем:

оптимальные точки по каждому критерию отдельно $X_k^*, k = \overline{1,K}$ и размеры критериальных функций в этих точках $f_k^* = f_k\,(X_k^*), k = \overline{1,K}$;

точки антиоптимума по каждому критерию $X_k^0 = \{x_j, j = \overline{1,N}$ и наихудшей неизменной части каждого критерия $f_k^0 = f_k\,(X_k^0), k = \overline{1,K}$;

$\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\}$ оптимальная точка, как результат решения VPMP с эквивалентными критериями, т. Е. Результата решения максимальной задачи и λ-задачи, построенной на ее основе; λ^o – максимальная относительная оценка, которая является максимальным нижним уровнем для всех относительных оценок $\lambda_k\,(X^o)$, или гарантированный результат в относительных единицах, λ^o гарантирует, что все относительные оценки $\lambda_k\,(X^o)$ равны или больше λ^o:

$$\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), k = \overline{1,K}, X^o \in S \qquad (4.43)$$

Лицо, принимающее решение, проводит анализ результатов решения векторной задачи с равнозначными критериями. Если полученные результаты удовлетворяют лицо, принимающее решение, то конец, иначе выполняются последующие расчеты.

Дополнительно вычислим:

в каждой точке $X_k^*, k = \overline{1,K}$ определим величины всех критериев $f_k^* = f_k\,(X_k^*), k = \overline{1,K}$, которые представляют границу множества Парето, и относительных оценок: $\lambda\,(X^*) = \{\lambda_q\,(X_k^*), q = \overline{1,K}, k = \overline{1,K}\}, \lambda_k\,(X) = \frac{f_k\,(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, \forall k \in \boldsymbol{K}$:

$$F\,(X^*) = \begin{vmatrix} f_1(X_1^*) \dots f_K(X_1^*) \\ \dots \\ f_1(X_K^*) \dots f_K(X_K^*) \end{vmatrix}, \lambda\,(X^*) = \begin{vmatrix} \lambda_1(X_1^*) \dots \lambda_K(X_1^*) \\ \dots \\ \lambda_1(X_K^*) \dots \lambda_K(X_K^*) \end{vmatrix}. \qquad (4.44)$$

Матрицы критериев $F\,(X^*)$ и относительных оценок $\lambda\,(X^*)$ показывают величины каждого критерия $k = \overline{1,K}$ при переходе от точки оптимума $X_k^*, k \in \boldsymbol{K}$ к другой $X_q^*, q \in \boldsymbol{K}$;

в точке оптимума при равнозначных критериях X^o вычислим величины критериев и относительных оценок:

$f_k(X^o), k = \overline{1,K}$; $\lambda_k(X^o), k = \overline{1,K}$, (4.45)

которые удовлетворяют неравенству (4.43). В других точках $X \in \boldsymbol{S^o}$ меньший из критериев в относительных единицах $\lambda = \boldsymbol{min_{k\in K}}\lambda_k\,(X)$ всегда меньше λ^o. Запоминаются данные λ-задачи (4.37)- (4.38). Эта информация и является основой для дальнейшего изучения множества Парето.

Шаг 2. Выбор приоритетного критерия $q \in \boldsymbol{K}$.

Из теории (см. теорему 1) известно, что в оптимальной точке X^o всегда имеется два наиболее противоречивых критерия $q \in \boldsymbol{K}$ и $v \in \boldsymbol{K}$, для которых в относительных единицах выполняется точное равенство: $\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_v(X^o), q, v \in \boldsymbol{K}, X \in \boldsymbol{S}$, а для остальных: $\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), \forall k \in \boldsymbol{K}, q \neq v \neq k$.

Как правило, из этой пары выбирается критерий, который ЛПР хотел бы улучшить, такой критерий называется «приоритетным критерием»: $q \in \boldsymbol{K}$.

Шаг 3. Определяются числовые пределы изменения величины приоритета критерия $q \in \boldsymbol{K}$. Для приоритетного критерия $q \in \boldsymbol{K}$ из матрицы (4.44) определим числовые пределы изменения величины критерия: в натуральных единицах $f_q\,(X)$ и в относительных единицах $\lambda_q\,(X)$, которые лежат в пределах:

$$f_k(X^o) \leq f_q\,(X) \leq f_q\,(X_q^*), k \in \boldsymbol{K}, \qquad (4.46)$$

где $f_q\,(X_q^*)$ выводится из матрицы уравнения $F\,(X^*)$ (4.44), все критерии показывают размеры, измеренные в физических единицах, $f_k(X^o), k = \overline{1,K}$ из уравнения (4.45), и, в относительных единицах:

$\lambda_k(X^o) \leq \lambda_q (X) \leq \lambda_q (X_q^*), k \in \boldsymbol{K},$ (4.47)

где $\lambda_q (X_q^*)$ выводится из матрицы $\lambda (X^*)$, все критерии показывают размеры, измеренные в относительных единицах (отметим, что $\lambda_q (X_q^*) = 1), \lambda_q (X^o)$.

Выражения (4.46) и (4.47) выдаются на дисплей для анализа.

Шаг 4. Выбор величины приоритетного критерия (Принятие решения). ЛПР проводит анализ результатов расчетов (4.46), выбирает числовую величину $f_q, q \in \boldsymbol{K}$**:**

$f_q(X^o) \leq f_q \leq f_q\left(X_q^*\right), q \in \boldsymbol{K}.$ (4.48)

Для выбранной величины критерия f_q необходимо определить вектор неизвестных X^{oo}, для этого проводим последующие вычисления.

Шаг 5. Расчет относительной оценки:

$\lambda_q = \frac{f_q - f_q^0}{f_q^* - f_q^0},$ (4.49)

которая при переходе от точки X^o к X_q^*, в соответствии с (4.44):

$\lambda_q (X^\circ) \leq \lambda_q \leq \lambda_q (X_q^*) = 1.$

Шаг 6. Вычисление коэффициента линейной аппроксимации. Используя стандартные приемы линейной аппроксимации, вычислим коэффициент пропорциональности ρ между $\lambda_q(X^\circ), \lambda_q$: $\rho = \frac{\lambda_q - \lambda_q (X^o)}{\lambda_q^* - \lambda_q^0}, q \in \boldsymbol{K},$

Шаг 7. Вычисление координат приоритетного критерия f_q.

Координаты точки приоритетного критерия X_q лежат в следующих пределах: $X^o \leq X_q \leq X_q^*, q \in \boldsymbol{K}$**.** Предполагая линейный характер изменения вектора $X_q = \{x_1^q, \dots, x_N^q\}$ определим координаты точки приоритетного критерия с величиной f_q с относительной оценкой λ_q (4.44):

$X_q = \{x_1^q = x_1^o + \rho\,(x_q^* \,(1) - x_1^o), \dots,$

$x_N^q = x_N^o + \rho\,(x_q^*\,(N) - x_N^o)\},$ (4.50)

где $X^o = \{x_1^o, \dots, x_N^o\}, X_q^* = \{x_q^*\,(1), \dots, x_q^*\,(N)\}.$

Шаг 8. Вычисление основных показателей точки X_q.

Для полученной точки $X_q = \{x_{qj}, j = \overline{1,N}\}$, вычислим:

все критерии в натуральных единицах: $F^q = \{f_k\left(X_q\right), k = \overline{1,K}\}$;

все относительные оценки критериев:

$\lambda^q = \{\lambda_k^q, k = \overline{1,K}\}, \lambda_k\,(x^q) = \frac{f_k\,(X_q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1,K};$ (4.51)

минимальную относительную оценку: $\lambda^{oq} = \min\,(p_k^q\,\lambda_k\,(X_q), k = \overline{1,K}).$

Аналогично рассчитывается любая точка по Парето: $\boldsymbol{X_t^o} = \{\boldsymbol{\lambda_t^o}, \boldsymbol{X_t^o}\} \in \boldsymbol{S^o}$.

Анализ результатов. Рассчитанная величина критерия $f_q\,(X_t^o), q \in \boldsymbol{K}$ обычно не равна заданной f_q. Ошибка выбора $\Delta f_q = \left|f_q(X_t^o) - f_q\right|$ определяется ошибкой линейной аппроксимации.

Результаты исследования симметрии в ВЗМП с заданным приоритетом аналогичны, как и для ВЗМП с равнозначными критериями, но центр симметрии смещен в сторону приоритетного критерия.

Заключение по теории и аксиоматике векторной оптимизации.

Представленная теория, аксиоматика, принципы оптимальности являются дальнейшим развитием аксиоматического подхода, заложенного в знаменитом сочинении «Начала», древнегреческого ученого Евклида, который представил аксиомы для одно мерной математики. Это нашло отражение в теории оптимизации с одним критерием. Аксиоматика (Машунина Ю.К.), изложенная в работе, направлена на системное (с множеством критериев) исследование объектов, процессов инженерных систем.

5. Программное обеспечение и Методология моделирования и принятия оптимального решения выбора параметров сложных инженерных систем

5.1. Программное обеспечение моделирования сложных инженерных систем на базе теории и методов векторной оптимизации

Математические модели структуры материала (2.4)-(2.8) и инженерные системы построены в виде векторной задачи нелинейного программирования (ВЗНП). Представим программное обеспечение моделирования инженерных систем на базе теории и методов решения задач векторной оптимизации, [46].

5.1.1. Разработка программного обеспечение решения ВЗНП

Программное обеспечение решения векторной задачи нелинейного программирования (3.1)- (3.4), на базе которой сформированы модели инженерных систем, реализовано на основе алгоритма решения ВЗНП, изложенного в предыдущих разделах. При решении ВЗНП по каждому критерию использована программа FMINCON (…) в системе MATLAB.

При использовании программы FMINCON (…) необходимо разработать две подпрограммы – функции. Первая функция включает два блока: первый блок предназначен для оценки в точке X критерия $f_k(X)$ $\forall k \in$К; второй блок для расчета первой производной в этой точке $\frac{df_k(X)}{dX}$ $\forall k \in$К. Вторая функция включает те же два блока только для ограничений. Программа FMINCON (…) используется на первом шаге алгоритма (максимизации критериев) и на втором шаге алгоритма (минимизации). Аналогично в соответствии с алгоритмом на 4 и 5 шаге решается λ-задача.

В целом при нелинейных ограничениях программное обеспечение решения ВЗНП включает: К*2 (1 шаг) + К*2 (2 шаг)+2 (λ-задача) функций. Так как критерии и ограничения ВЗНП индивидуальны, то для каждой ВЗНП пишется индивидуальное программное обеспечение.

Для решения ВЗНП (3.1)- (3.4) ниже представлена программа, которая по существу представляет программу – шаблон для написания и решения других векторных задач нелинейного программирования (3.1)- (3.4) – математических моделей инженерных систем.

5.1.2. Численная реализация векторной задачи нелинейного программирования

Пример 1.

Дано. Рассматривается *векторная задача нелинейного (выпуклого) программирования* с четырьмя однородными критериями. В качестве критериев используем окружность, а на переменные наложены линейные ограничения. Так как критерии и ограничения симметричны, то ответ очевиден.

$$opt\ F\ (X) = \{min\ F_2(X) = min\ f_1(X) \equiv (x_1-80)^2 + \ (x_2-80)^2, \quad (5.1)$$
$$min\ f_2(X) \equiv (x_1-80)^2 + \ (x_2-20)^2, \quad (5.2)$$
$$min\ f_3(X) \equiv (x_1-20)^2 + \ (x_2-20)^2, \quad (5.3)$$
$$min\ f_4(X) \equiv (x_1-20)^2 + \ (x_2-80)^2, \quad (5.4)$$
при ограничениях $0 \le x_1 \le 100,\ 0 \le x_2 \le 100.$ (5.5)

Требуется определить. Разработать программное обеспечение в MATLAB решения векторной задачи нелинейного программирования. Используя программное обеспечение решить задачу (5.1)-(5.5).

4.3. Программное обеспечение решения векторной задачи нелинейного программирования (ВЗНП)

Для решения векторной задачи нелинейного программирования (5.1)- (5.5) – модели инженерной системы разработана программа в системе MATLAB, которая реализует алгоритм решения ВЗНП с равнозначными критериями. Ниже представлен результат решения ВЗНП (5.1)- (5.5), полученный этой программой.

Запись программы в формате MATLAB

```
% Программа "Решение векторной задачи нелинейного программирования":
function [x,f] = VPNP_2_4Krit_100 (x)
% Автор: Машунин Юрий Константинович (Mashunun Yu. K.)
% Алгоритм и программа предназначена для использования в образовании и научных
```

```
% исследованиях, для коммерческого использования обращаться: Mashunin@mail.ru
% Algorithm VPNP: 4Kritery + L-zadaha
% [X,Fval,EXITFLAG,OUTPUT,LAMBDA,GRAD,HESSIAN]=
% FMINCON (FUN,Xo,A,b,Aeq,beq, lb,ub,nonlcon,options,P1,P2,...)
disp ('*** Блок Исходных данных. ВЗНП:***')
disp ('opt F (X)={max F1 (X)={min f1= (x1-80).^2+ (x2-80).^2; ')
disp (' min f2= (x1-80).^2+ (x2-20).^2; ')
disp (' min f3= (x1-20).^2+ (x2-20).^2; ')
disp (' min f4= (x1-20).^2+ (x2-80).^2; ')
disp (' 0<=x1<=100, 0<=x2<=100 ')
lb= [0. 0.];
ub= [100. 100.]; Xo= [0. 0.];
options=optimset ('LargeScale','off');
options=optimset (options,'GradObj','on','GradConst','off');
A= [1 0;
0 1];
b= [100 100];
Aeq= []; beq= [];
XoK1max= [0. 0.];
disp ('*** Шаг 1. Решение по каждому критерию (наилучшее) ***')%
[x1max,f1max]= fmincon ('VPNP_2_Krit1max',XoK1max,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X1max] = VPNP_2_Krit1min (x1max)
[f2X1max] = VPNP_2_Krit2min (x1max)
[f3X1max] = VPNP_2_Krit3min (x1max)
[f4X1max] = VPNP_2_Krit4min (x1max)
XoK2max= [0. 0.];
[x2max,f2max]= fmincon ('VPNP_2_Krit2max',XoK2max,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X2max] = VPNP_2_Krit1min (x2max)
[f2X2max] = VPNP_2_Krit2min (x2max)
[f3X2max] = VPNP_2_Krit3min (x2max)
[f4X2max] = VPNP_2_Krit4min (x2max)
XoK3max= [0. 0.];
[x3max,f3max]= fmincon ('VPNP_2_Krit3max',XoK3max,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X3max] = VPNP_2_Krit1min (x3max)
[f2X3max] = VPNP_2_Krit2min (x3max)
[f3X3max] = VPNP_2_Krit3min (x3max)
[f4X3max] = VPNP_2_Krit4min (x3max)
XoK4max= [0. 0.];
[x4max,f4max]= fmincon ('VPNP_2_Krit4max',XoK4max,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X4max] = VPNP_2_Krit1min (x4max)
[f2X4max] = VPNP_2_Krit2min (x4max)
[f3X4max] = VPNP_2_Krit3min (x4max)
[f4X4max] = VPNP_2_Krit4min (x4max)
disp ('*** Шаг 2. Решение по каждому критерию (наихудшее) ***')%
XoK1min= [0. 0.];
[x1min,f1min]= fmincon ('VPNP_2_Krit1min',XoK1min,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X1min] = VPNP_2_Krit1min (x1min)
[f2X1min] = VPNP_2_Krit2min (x1min)
[f3X1min] = VPNP_2_Krit3min (x1min)
[f4X1min] = VPNP_2_Krit4min (x1min)
[x2min,f2min] = fmincon ('VPNP_2_Krit2min',Xo,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X2min] = VPNP_2_Krit1min (x2min)
```

```
[f2X2min] = VPNP_2_Krit2min (x2min)
[f3X2min] = VPNP_2_Krit3min (x2min)
[f4X2min] = VPNP_2_Krit4min (x2min)
[x3min,f3min] = fmincon ('VPNP_2_Krit3min',Xo,A,b,Aeq,beq,lb,ub,",options)
[f1X3min] = VPNP_2_Krit1min (x3min)
[f2X3min] = VPNP_2_Krit2min (x3min)
[f3X3min] = VPNP_2_Krit3min (x3min)
[f4X3min] = VPNP_2_Krit4min (x3min)
[x4min,f4min] = fmincon ('VPNP_2_Krit4min',Xo,A,b,Aeq,beq,lb,ub,",options)
[f1X4min] = VPNP_2_Krit1min (x4min)
[f2X4min] = VPNP_2_Krit2min (x4min)
[f3X4min] = VPNP_2_Krit3min (x4min)
[f4X4min] = VPNP_2_Krit4min (x4min)
disp ('*** Шаг 3. Системный анализ результатов ***')%
disp ('Оценка критериев в точках оптимума: X1min,X2min,X3min,X4min')%
F= [f1X1min f2X1min f3X1min f4X1min;
f1X2min f2X2min f3X2min f4X2min;
f1X3min f2X3min f3X3min f4X3min;
f1X4min f2X4min f3X4min f4X4min].
d1=f1X1min-f1X1max
d2=f2X2min-f2X2max
d3=f3X3min-f3X3max
d4=f4X4min-f4X4max
disp ('Оценка критериев в относительных единицах: X1min,X2min,X3min,X4min')%
L= [(f1X1min-f1X1max)/d1 (f2X1min-f2X2max)/d2 (f3X1min-f3X3max)/d3 (f4X1min-f4X4max)/d4;
(f1X2min-f1X1max)/d1 (f2X2min-f2X2max)/d2 (f3X2min-f3X3max)/d3 (f4X2min-f4X4max)/d4;
(f1X3min-f1X1max)/d1 (f2X3min-f2X2max)/d2 (f3X3min-f3X3max)/d3 (f4X3min-f4X4max)/d4;
(f1X4min-f1X1max)/d1 (f2X4min-f2X2max)/d2 (f3X4min-f3X3max)/d3 (f4X4min-f4X4max)/d4]
disp ('*** Шаг 4. Построение L-задачи ***')%
Ao= [1 0 0;
0 1 0];
bo= [100 100]; Aeq= []; beq= [];
Xoo= [0 0 0]
lbo= [0. 0. 0.]
ubo= [100. 100. 1]
disp ('*** Шаг 5. Решение L-задачи ***')%
[Xo,Lo]=fmincon ('VPNP_2_L',Xoo,Ao,bo,Aeq,beq,lbo,ubo,'VPNP_2_LConst') %,options)
disp ('Оценка критериев в точке оптимума Xo')%
[f1Xo] = VPNP_2_Krit1min (Xo (1:2))
[f2Xo] = VPNP_2_Krit2min (Xo (1:2))
[f3Xo] = VPNP_2_Krit3min (Xo (1:2))
[f4Xo] = VPNP_2_Krit4min (Xo (1:2))
disp ('Оценка критериев в точке оптимума Xo в относительных единицах')%
L1Xo= (f1Xo+f1max)/d1
L2Xo= (f2Xo+f2max)/d2
L3Xo= (f3Xo+f3max)/d3
L4Xo= (f4Xo+f4max)/d4
% ****Конец*********
```

```
% [Программа "Расчет 1 критер. – max"] файл: VPNP_2_Krit1max
function [f,G] = VPNP_2_Krit1max (x)
f=- (x (1)-80).^2- (x (2)-80).^2; %Расчет функции – критерий 1
G= [-2* (x (1)-80), -2* (x (2)-80)];%Расчет 1 производной критерия 1
% [Программа "Расчет 1 критер. – min"] Файл: VPNP_2_Krit1min
function [f,G] = VPNP_2_Krit1min (x);
f= (x (1)-80).^2+ (x (2)-80).^2;
G= [2* (x (1)-80); 2* (x (2)-80)];
% [Программа "Расчет 2 критер. – max"] Файл: VPNP_2_Krit2max
function [f,G] = VPNP_2_Krit2max (x);
f=- (x (1)-80).^2- (x (2)-20).^2;
G= [-2* (x (1)-80); -2* (x (2)-20)];
% [Программа "Расчет критер. 2 – min"] Файл: VPNP_2_Krit2min
function [f,G] =VPNP_2_Krit2min (x);
f= (x (1)-80).^2+ (x (2)-20).^2;
G= [2* (x (1)-80); 2* (x (2)-20)];
% [Программа "Расчет 3 критер. – max"] Файл: VPNP_2_Krit3max
function [f,G] = VPNP_2_Krit3max (x);
f=- (x (1)-20).^2- (x (2)-20).^2;
G= [-2* (x (1)-20); -2* (x (2)-20)];
% [Программа "Расчет 3 критер. – min"] Файл: VPNP_2_Krit3min
function [f,G] = VPNP_2_Krit3min (x);
f= (x (1)-20).^2+ (x (2)-20).^2;
G= [2* (x (1)-20); 2* (x (2)-20)];
% [Программа "Расчет 4 критер. – max"] Файл:VPNP_2_Krit4max
function [f,G] = VPNP_2_Krit4max (x);
f=- (x (1)-20).^2- (x (2)-80).^2;
G= [-2* (x (1)-20); -2* (x (2)-80)];
% [Программа "Расчет 4 критер. – max"] Файл:VPNP_2_Krit4max
function [f,G] = VPNP_2_Krit4max (x);
f=- (x (1)-20).^2- (x (2)-80).^2;
G= [-2* (x (1)-20); -2* (x (2)-80)];
% [Программа "Расчет критер. L-задачи"] файл: VPNP_2_L
function [f,G] = VPNP_2_L (x)
f=-x (3);
G= [0; 0; -1];
% [Программа "Расчет ограничений L-задачи"] файл: VPNP_1_LConst
function [c,ceq,DC,DCeq]= VPNP_2_LConst (x)
d1=12800;d2=12800;d3=12800;d4=12800;
f1X1max=12800;f2X2max=12800;f3X3max=12800;f4X4max=12800;
c (1)= ((x (1)-80).^2+ (x (2)-80).^2)/d1+x (3)-f1X1max/d1;
c (2)= ((x (1)-80).^2+ (x (2)-20).^2)/d2+x (3)-f2X2max/d2;
c (3)= ((x (1)-20).^2+ (x (2)-20).^2)/d3+x (3)-f3X3max/d3;
c (4)= ((x (1)-20).^2+ (x (2)-80).^2)/d4+x (3)-f4X4max/d4;
G1= [2* (x (1)-80)/d1, 2* (x (1)-80)/d2, 2* (x (1)-20)/d3, 2* (x (1)-20)/d4;
2* (x (2)-80)/d1, 2* (x (2)-20)/d2, 2* (x (2)-20)/d3, 2* (x (2)-80)/d4;
1.0, 1.0, 1.0, 1.0];
ceq= []; DCeq= [];
% *****Конец*****
```

5.1.4. Решение векторной задачи нелинейного программирования

Для решения ВЗНП (4.1)- (4.5) использована выше приведенная программа. Решение представлено, как последовательность шагов.

Шаг 1. Решается векторная задача (4.1)- (4.5) на max по каждому критерию отдельно. Результаты решения ВЗМП (4.1)- (4.5) по каждому критерию:

1 критерий $X_1^* = \{x_1 = 0, x_2 = 0\}, f_1^* = f_1(X_1^*) = -12800;$ (5.6)

2 критерий $X_2^* = \{x_1 = 0, x_2 = 100\}, f_2^* = f_2(X_2^*) = -12800;$

3 критерий $X_3^* = \{x_1 = 100, x_2 = 100\}, f_3^* = f_3(X_3^*) = -12800;$

4 критерий $X_4^* = \{x_1 = 100, x_2 = 0\}, f_4^* = f_4(X_4^*) = -12800;$

Шаг 2. Решается векторная задача (4.1)- (4.5) на min по каждому критерию отдельно. Результаты решения ВЗМП (4.1)- (4.5) по каждому критерию:

1 критерий $X_1^0 = \{x_1 = 80, x_2 = 80\}, f_1^0 = f_1(X_1^0) = 0:$ (5.7)

2 критерий $X_2^0 = \{x_1 = 80, x_2 = 20\}, f_2^0 = f_2(X_2^0) = 0:$

3 критерий $X_3^0 = \{x_1 = 20, x_2 = 20\}, f_3^0 = f_3(X_3^0) = 0:$

4 критерий $X_4^0 = \{x_1 = 20, x_2 = 80\}, f_4^0 = f_4(X_4^0) = 0:$

Результаты решения ВЗМП (5.1)- (5.5) по каждому критерию (наилучшие, наихудшие) при ограничениях (5.6) представлены на рис. 5.1 в угловых точках.

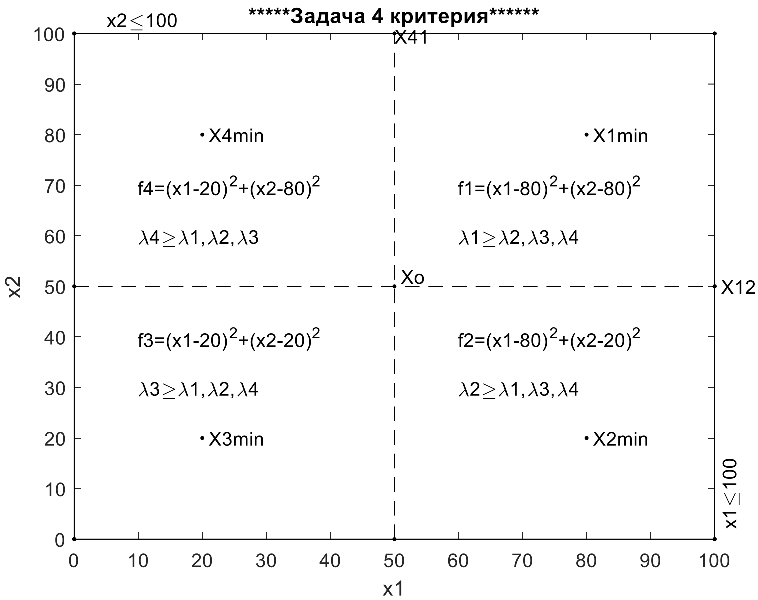

Рис. 5.1. Ограничения ВЗМП (5.1)-(5.5), точки оптимума $X_1^* = X1min, X2min, X3min, X4min$ и относительные оценки

Множество Парето лежит между точками оптимума $X_1^* X_2^* X_3^* X_4^*$, т. е. область допустимых точек ***S***, образованных ограничениями (5.5), совпадает с множеством точек, оптимальных по Парето ***S^o***, ***S^o***=***S***.

Шаг 3. Выполняется системный анализ множества точек Парето.

В точках оптимума $X^* = \{X_k^*, k = \overline{1, K}\}$, определяются величины целевых функций F (X^*) и относительных оценок λ (X^*):

$F(X^*) = \{\{f_q(X_k^*), q = \overline{1, K}\}, k = \overline{1, K}\},$

$\lambda(X^*) = \{\{\lambda_q(X_k^*), q = \overline{1, K}\}, k = \overline{1, K}\},$

В системе MATLAB в точках оптимума: $X_k^* = \{X1min, X2min, X3min, X4min\}$ вычисление этих функций будет следующим (Результат системного анализа):

$$F\ (X^*) = \begin{vmatrix} f_1(X_1^*)\ f_2(X_1^*)\ f_3(X_1^*)\ f_4(X_1^*) \\ f_1(X_2^*)\ f_2(X_2^*)\ f_3(X_2^*)\ f_4(X_2^*) \\ f_1(X_3^*)\ f_2(X_3^*)\ f_3(X_3^*)\ f_4(X_3^*) \\ f_1(X_4^*)\ f_2(X_4^*)\ f_3(X_4^*)\ f_4(X_4^*) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0\ 3600\ 7200\ 3600 \\ 3600\ 0\ 3600\ 7200 \\ 7200\ 3600\ 0\ 3600 \\ 3600\ 7200\ 3600\ 0 \end{vmatrix},$$

$$\lambda\,(X^*) = \begin{vmatrix} \lambda_1(X_1^*)\ \lambda_2(X_1^*)\ \lambda_3(X_1^*)\ \lambda_4(X_1^*) \\ \lambda_1(X_2^*)\ \lambda_2(X_2^*)\ \lambda_3(X_2^*)\ \lambda_4(X_2^*) \\ \lambda_1(X_3^*)\ \lambda_2(X_3^*)\ \lambda_3(X_3^*)\ \lambda_4(X_4^*) \\ \lambda_1(X_4^*)\ \lambda_2(X_4^*)\ \lambda_3(X_4^*)\ \lambda_4(X_4^*) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.0\ 0.7188\ 0.4375\ 0.7188 \\ 0.7188\ 1.0\ 0.7188\ 0.4375 \\ 0.4375\ 0.7188\ 1.0\ 0.7188 \\ 0.7188\ 0.4375\ 0.7188\ 1.0 \end{vmatrix}.$$

В точках оптимума $X_k^*, k = \overline{1, K}$ все относительные оценки (нормализованные критерии) равны единице: $\lambda_k(X_k^*) = \frac{f_k\,(X_k^*) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0} = 1, k = \overline{1, K}, K = 4$.

В точках оптимума $X_k^0, k = \overline{1, K}$ все относительные оценки равны нулю:

$\lambda_k(X_k^0) = \frac{f_k\,(X_k^0) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0} = 0, k = \overline{1, K}, K = 4$.

Отсюда $\forall k \in \boldsymbol{K}, \forall X \in \boldsymbol{S}, 0 \le \lambda_k\,(X) \le 1$.

Шаг 4. Строится λ-задача.

Шаг 5. Решение λ-задачи. Результаты решения λ-задачи:

Xo=$X^o = \{x_1 = 50.0, x_2 = 50.0, x_3 = 0.8594\}$ – точка оптимума, где

x_3=λ^o; а x_1, x_2 соответствует x_1, x_2 задачи (4.1)-(4.5);

Lo = λ^o= 0.8594 представляет оптимальное значение целевой функции.

Функции $\lambda_1\,(X), \lambda_2\,(X), \lambda_3\,(X), \lambda_4\,(X)$, а также точки оптимума X^o и λ^o, которые получены на их пересечении, в трех мерной системе координат x_1, x_2, λ показаны на рис. 5.2.

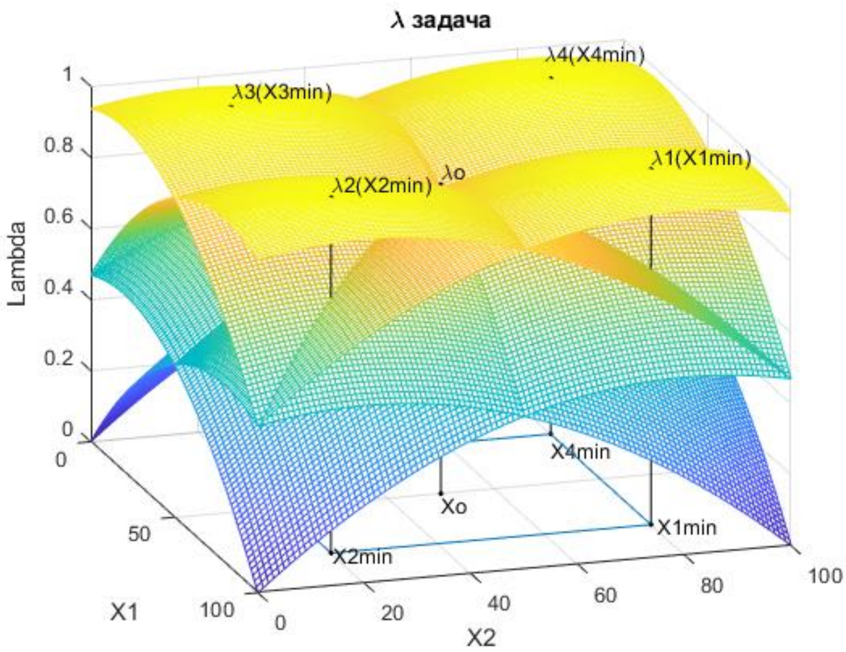

Рис. 5.2. Функции $\lambda_1\,(X), \lambda_2\,(X), \lambda_3\,(X), \lambda_4\,(X)$, точки оптимума X^o и λ^o.

На рис. 5.1, 5.2 видно, что область (множество точек) ограниченная точками $\boldsymbol{S_q} = \{X_1^* = X_{1opt}X_{12}X^oX_{41}\}$ характеризуется тем, что $\lambda_1(X) \ge \lambda_k(X), k = \overline{2,4}, X \in \boldsymbol{S_1}$, (на рис. 4.1 показано, как λ1>λ2, λ3, λ4), т. е. область $\boldsymbol{S_{q=1}}$ приоритетна по первому критерию. В этой области приоритет первого критерия относительно остальных всегда больше или равен единице:

$p_k^1(X) = \lambda_1\,(X)/\lambda_k\,(X) \ge 1, \forall X \in \boldsymbol{S_1}$.

Аналогично показаны области (множества точек) приоритетные по соответствующему критерию, в совокупности они дают множество точек, оптимальных по Парето, $\boldsymbol{S^o}$, а оно (для данного примера) равно множеству допустимых точек: $\boldsymbol{S^o} = \boldsymbol{S_1^o} \cup \boldsymbol{S_2^o} \cup \boldsymbol{S_3^o} \cup \boldsymbol{S_4^o} \cup X^o = \boldsymbol{S}$.

Если решать задачу (4.1)- (4.5) с двумя критериями, например, третьим и четвертым, то множество точек, оптимальных по Парето, лежит на отрезке $X_3^*X_4^*$, а точка X^{oo} определяет результат решения.

λ^{oo}- максимальный уровень, причем $\lambda^{oo} = \lambda_3(X^{oo}) = \lambda_4(X^{oo}) = 0.7917$ в соответствии с теоремой 1. Множество Парето лежит между точками оптимума $X_1^*X_2^*X_3^*X_4^*$, т.

е. область допустимых точек S, образованных ограничениями (4.5), совпадает с множеством точек, оптимальных по Парето $\boldsymbol{S^o}, \boldsymbol{S^o} = \boldsymbol{S}$.

5.2. Методология моделирования и принятия оптимального решения выбора параметров сложных инженерных систем в условиях определенности, неопределенности

В качестве объекта исследования нами рассматриваются «Инженерные системы», к которым относятся «технические системы», «технологические процессы», «материалы», [17, 42, 44]. Исследование инженерной системы выполнено, во-первых, в условиях определенности, когда известны данные о функциональных характеристиках инженерной системы; во-вторых, в условиях неопределенности, когда известны дискретные значения отдельных характеристик; также известны данные об ограничениях, которые накладываются на функционирование системы. Математический аппарат моделирования инженерной системы базируется на теории и методах векторной оптимизации, которые представлены в третьем разделе. В организационном плане процесс моделирования и симулирования технической системы представлен в виде методологии: «Методология выбора оптимальных параметров инженерных систем в условиях определенности и неопределенности».

5.2.1. Виды задач, возникающих в процессе моделирования и принятия оптимального решения выбора параметров сложных инженерных систем

Задачи, которые возникают в процессе принятия оптимального решения выбора оптимальных параметров сложных инженерных системах на базе векторной оптимизации включает последовательно три вида.

1 вид. *Решение векторной задачи математического программирования при равнозначных критериях*. Полученный результат является основой для дальнейшего исследования системы. При этом используется метод решения векторной задачи при равнозначных критериях. Если полученный результат удовлетворяет лицу, принимающего решения, (ЛПР – проектировщик), то он берется за основу. Если не удовлетворяет, то переходим ко второму виду (прямая задача) или третьему виду решения векторных задач (Обратная задача).

2 вид. *Решение прямой задачи векторной оптимизации*, которая состоит в следующем: «Какие будут показатели (характеристики), если изменить параметры сложных технических систем». – Используется метод решения векторной задачи при равнозначных критериях.

3 вид. *Решение обратной задач векторной оптимизации*, которая состоит в следующем: «Какие будут параметры сложных технических систем при заданных характеристиках». – Используется метод решения векторной задачи при заданном приоритете критерия.

5.2.2. Методология моделирования и выбора оптимальных параметров сложных инженерных систем в условиях определенности, неопределенности

В качестве объекта исследования нами рассматриваются «сложная (многофункциональная) инженерная система», [17, 42, 44]. В организационном плане процесс моделирования и симулирования (the process of modeling and simulation of a engineering system) сложных инженерных систем, включающий три вида выше представленных задач, сформирован в виде методологии:

«***Методология выбора оптимальных параметров сложных инженерных систем в условиях определенности и неопределенности***».

Методология включает три блока, разделенных на ряд этапов.

Блок 1. Формирование технического задания, преобразование условий неопределенности (связанных с экспериментальными данными) в условия определенности, построение математической и численной модели инженерной системы (the process of modeling of a engineering system) включает 4 этапа.

1 этап. Формирование технического задания (исходных данных) на численное моделирование и выбора оптимальных параметров системы. Исходные данные формирует конструктор, который проектирует инженерную систему.

2 этап. Построение математической и численной модели инженерной системы в условиях определенности.

3 этап. Преобразование условий неопределенности в условия определенности и построение математической и численной модели инженерной системы в условиях определенности.

4 этап. Построение агрегированной математической и численной модели инженерной системы в условиях определенности.

Блок 2. Методология процесса принятия оптимального решения (выбора оптимальных параметров) в инженерной системе на базе векторной оптимизации (the process of simulation of a engineering system)

5 этап. Решение векторной задачи математического программирования (ВЗМП) – модели инженерной системы при равнозначных критериях (решение прямой задачи).

6 этап. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП с N параметрами и K критериями в двухмерную систему координат в относительных единицах..

7 этап. Решение векторной задачи математического программирования – модели инженерной системы при заданном приоритете критерия (решение обратной задачи).

Блок 3. Исследование, проектирование, геометрическая интерпретация и выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы в многомерной математике включает 2 этапа.

8 этап. Геометрическая интерпретация результатов решения при проектировании инженерной системы перехода от двухмерного к $\boldsymbol{N}$-мерному пространству в относительных единицах.

9 этап. Геометрическая интерпретация результатов решения при проектировании инженерной системы перехода от двухмерного к $\boldsymbol{N}$-мерному пространству в физических единицах.

6. Выбор оптимальных параметров материала сложной структуры в условиях определенности и неопределенности на базе многомерной математики. Компьютерная реализация

Численная реализация выбора оптимальных параметров материала сложной структуры выполняется в соответствии с теоретическими основами многомерной математики, включающей аксиоматику, принципы оптимальности и конструктивные методы многомерной математики как при равнозначных критериях, так и при заданном приоритете критериев, в соответствии разделом 2. Методология процесса принятия оптимального решения (выбора оптимальных параметров) инженерной системы, в том числе материала сложной структуры, изложена в разделе 2. Рассматривается задача принятия решений в сложной структуре материала, о которой известны: во-первых, данные о функциональной взаимосвязи нескольких характеристик с ее компонентами (*условия определенности*); во-вторых, данные о некотором наборе дискретных значений нескольких характеристик (экспериментальные результаты), во взаимосвязи с дискретными значениями параметров – экспериментальные данные (*условия неопределенности*); в-третьих, ограничений, накладываемых на функционирование материала сложной структуры. Численная задача моделирования материала сложной структуры рассматривается с равнозначными критериями и с заданным приоритетом критерия.

6.1. ***Блок 1. Формирование технического задания и построение математической и численной модели материала сложной структуры*** (the process of modeling of the structure (composition) of the material).

Первый этап, а также этап анализа результатов решения, выбора приоритетного критерия и его величины выполняется ***конструктором материала сложной структуры***. Остальные этапы выполняются ***математиком – программистом***.

6.1.1. **1 этап.** ***Техническое задание: «Выбор оптимальных параметров материала сложной структуры»***

Дано. Исследуется структура материала, которая характеризуется четырьмя параметрами: $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$. Значения Y представляют вектор управляемых переменных. Заданы параметры структуры материала, которые изменяются в следующих пределах:

$21 \le y_1 \le 79;\ 5 \le y_2 \le 59;\ 2.1 \le y_3 \le 9.0;\ 2.2 \le y_4 \le 7.0.$

Функционирование структуры материала определяются четырьмя характеристиками (критериями): $H(Y) = \{h_1(Y), \dots, h_4(Y)\}$, величина оценки которых зависит от параметров $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$.

Условия определенности. Для первой характеристик: $h_1(Y)$ известна функциональная зависимость от параметров $Y = \{y_v, v = \overline{1, V}, V = 4\}$:

$h_1(Y) = 323.84 - 2.249y_1 - 3.49y_2 + 10.7267y_3 + 13.124y_4 + 0.0968y_1y_2 - 0.062y_1y_3 - 0.169y_1y_4 + 0.0743y_2y_3 - 0.1042y_2y_4 - 0.0036y_3y_4 + 0.0143y_1^2 + 0.0118y_2^2 - 0.2434y_3^2 - 0.5026x_4^2$, (6.1)

Условия неопределенности. Известны ***результаты экспериментальных данных***: для второй, третьей и четвертой характеристики $h_k(Y), k = 2, 3, 4$ для соответствующих величин параметров: $Y = \{y_v = \{y_{vi}, i = \overline{1, M}\}, v = \overline{1, V}\}$.

Числовые значения параметров Y и характеристик $h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)$ представлены в таблице 2.

Таблица 2

Экспериментальные значения параметров y_1, y_2, y_3, y_4
и характеристик структуры материала $h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)$.

y_1	y_2	y_3	y_4	$h_2(Y)$	$h_3(Y)$	$h_4(Y)$
20	0	2	2	1149.6	115.1	24.24
20	0	2	5	1164.0	114.5	27.60
20	0	2	8	1176.0	114.4	28.80
20	0	5	2	1212.0	118.8	30.00
20	0	5	5	1260.0	113.8	31.20
20	0	5	8	1257.6	113.3	32.40
20	0	8	2	1256.4	110.7	33.60
20	0	8	5	1252.8	109.2	34.80
20	0	8	8	1251.6	108.5	34.80
20	30	2	2	2143.2	128.3	19.92
20	30	2	5	2154.0	127.4	21.60
20	30	2	8	2163.6	126.8	25.20
20	30	5	2	2176.8	126.1	29.76
20	30	5	5	2185.2	124.3	33.48
20	30	5	8	2198.4	124.1	37.20
20	30	8	2	2211.6	123.9	39.48
20	30	8	5	2232.0	121.4	42.00
20	30	8	8	2245.2	121.7	49.20
20	60	2	2	2954.4	150.4	15.60
20	60	2	5	2820.0	144.9	18.00
20	60	2	8	2772.0	140.8	21.60
20	60	5	2	2748.0	138.6	24.24
20	60	5	5	2832.0	140.8	28.80
20	60	5	8	2904.0	143.5	32.40
20	60	8	2	3022.8	146.0	35.16
20	60	8	5	3036.0	144.9	39.60
20	60	8	8	3056.4	143.8	44.88
50	0	2	2	3583.2	181.3	11.28
50	0	2	5	3601.2	180.8	14.40
50	0	2	8	3608.4	179.4	16.80
50	0	5	2	3616.8	179.1	21.12

50	0	5	5	3622.8	178.0	22.80
50	0	5	8	3637.2	177.6	27.60
50	0	8	2	3651.6	176.9	30.84
50	0	8	5	3672.0	175.3	36.00
50	0	8	8	36852	174.7	40.56
50	30	2	2	1195.2	123.6	52.80
50	30	2	5	1212.0	118.7	60.00
50	30	2	8	1236.0	115.9	64.80
50	30	5	2	1251.6	115.1	68.64
50	30	5	5	1272.0	113.2	75.60
50	30	5	8	1296.0	111.8	82.80
50	30	8	2	1318.8	110.7	88.08
50	30	8	5	1344.0	108.2	97.20
50	30	8	8	1388.4	106.3	107.64
50	60	2	2	2176.8	132.8	40.56
50	60	2	5	2196.0	131.1	45.60
50	60	2	8	2220.0	129.7	52.80
50	60	5	2	2245.2	128.3	60.00
50	60	5	5	2286.0	127.0	67.20
50	60	5	8	2294.4	125.6	73.20
50	60	8	2	2313.6	123.9	79.44
50	60	8	5	2340.0	114.5	85.20
50	60	8	8	2382.0	119.5	99.00
80	0	2	2	2988.0	154.8	31.92
80	0	2	5	3012.0	153.2	36.00
80	0	2	8	3036.0	151.8	43.20
80	0	5	2	3056.4	150.4	51.36
80	0	5	5	3108.0	150.7	61.20
80	0	5	8	3156.0	151.2	72.00
80	0	8	2	3244.8	151.5	82.80
80	0	8	5	3228.0	144.9	86.40
80	0	8	8	3193.2	140.8	90.36
80	30	2	2	3616.8	185.7	23.28
80	30	2	5	3639.6	183.5	30.00
80	30	2	8	3660.0	182.2	36.00
80	30	5	2	3685.2	181.3	42.72
80	30	5	5	3708.0	179.4	48.00
80	30	5	8	3732.0	178.0	54.00
80	30	8	2	3753.6	176.9	62.16
80	30	8	5	3672.0	175.3	73.20
80	30	8	8	3822.0	172.5	81.72
80	60	2	2	1218.0	128.3	87.00
80	60	2	5	1248.0	125.6	94.80
80	60	2	8	1272.0	124.2	103.20
80	60	5	2	1318.8	121.7	116.16
80	60	5	5	1344.0	118.7	126.00
80	60	5	8	1392.0	115.9	136.80
80	60	8	2	1422.0	115.1	145.44
80	60	8	5	1464.0	110.4	156.00
80	60	8	8	1524.0	108.5	174.72
min y_i *(X)*, i=1,…, 81				1149.6	92.4	11.3
max y_i *(X)*, i=1,…, 81				3822.0	161.5	174.7

В принимаемом решении, величину оценки по первой и третьей характеристики (критерия) желательно, получить как можно выше: $h_1(Y) \to max, h_3(Y) \to max$; второй и четвертой как можно ниже: $h_2(Y) \to min, h_4(Y) \to min$.

Параметры $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ изменяются в следующих пределах:

$y_1 \in [20.50.80.], y_2 \in [0.30.60.], y_3 \in [2.0\ 5.0\ 8.0], y_4 \in\ [2.2\ 5.5\ 8.8]$. (6.3)

Химический состав материала изделия определяется (на единицу объема, веса) процентным содержанием некоторого множества компонент материала, которые в сумме равны ста процентам:

ограничение $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 100$. (6.4)

Требуется. 1). Разработать математическую модель структуры материала в виде векторной задачи математического программирования. 2) Задачу векторной оптимизации решить с равнозначными характеристиками (критериями). 3) Выбрать из всего множества критериев приоритетный критерий. Установить численное значение приоритетного критерия. 4) Решить задачу векторной оптимизации и принять наилучшее (оптимальное) решение с заданным приоритетом критерия.

1а этап. *Построение математической модели структуры материала в условиях определенности и неопределенности в общем виде.*

Построение математической модели для принятия оптимального управленческого решения структуры материала показано в разделе 2.3. В соответствии с (2.21)-(2.27) представим математическую модель материала в условиях определенности в виде задачи векторной оптимизации:

$Opt\ H\ (Y)\ =\ \{\max H_1(Y) = \{\max h_k\ (Y), k = \overline{1, K_1^{def}}\},$ (6.5)

$\min H_2(Y) = \{\min h_k\ (Y), k = \overline{1, K_2^{def}},$ (6.6)

при ограничениях $G\ (Y) \le B, \sum_{v=1}^{V} y_v(t) = 100\%,$ (6.7)

$h_k^{min}\ \le h_k(Y) \le h_k^{max}, k = \overline{1, K}, y_j^{min} \le y_j \le\ y_j^{max}, j = \overline{1, N},$ (6.8)

где $Y = \{y_j, j = \overline{1, N}\}$ – вектор управляемых переменных (конструктивных параметров); $H\ (Y) = \{H_1(Y)\ H_2(Y)\ \}$ – векторный критерий, каждая компонента которого представляет вектор критериев (характеристик) материала, которые функционально зависят Y – значений вектора переменных;

в (6.8) $h_k^{min} \le h_k\ (Y) \le h_k^{max}, k = \overline{1, K}$ – вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование материала;

в (6.8) $y_j^{min} \le y_j \le y_j^{max}, j = \overline{1, N}$ – параметрические ограничения.

Предполагается, что функции $h_k\ (Y), k = \overline{1, K}$ дифференцируемы и выпуклы, $g_i\ (Y), i = \overline{1, M}$ непрерывны, а заданное ограничениями (6.8) множество допустимых точек $\boldsymbol{S}$ не пусто и представляет собой компакт:

$\boldsymbol{S} = \{Y \in R^n | G(Y) \le 0, Y^{min} \le Y \le Y^{max}\} \ne \emptyset.$

6.1.2. **2 этап**. ***Построение численной модели структуры материала в условиях определенности***

Построение модели структуры материала в условиях определенности определяется функциональной зависимостью каждой характеристики, ограничений от параметров материала. В нашем примере известны характеристика (6.2), ограничения (6.1). Используя данные (6.1), (6.2) построим численную модель в виде векторной задачи нелинейного программирования (6.5)- (6.8) в условиях определенности:

$max\ h_1(Y) = 323.84 - 2.249y_1 -\ 3.49y_2 + 10.7267y_3 + 13.124y_4 + 0.0968y_1y_2 - 0.062y_1y_3 - 0.169y_1y_4\ + 0.0743y_2y_3 - 0.1042y_2y_4 -\ 0.0036y_3y_4 + 0.0143y_1^2 + 0.0118y_2^2 - 0.2434y_3^2 - 0.5026y_4^2$, (6.9)

при ограничениях: $y_1 +\ y_2 +\ y_3 +\ y_4 = 100$, (6.10)

$21 \le y_1 \le 79, 5 \le y_2 \le 59, 2.1 \le y_3 \le 9.0, 2.2 \le y_4 \le 7.0$. (6.11)

Эти данные в дальнейшем используются при построении общей математической модели материала (в условиях определенности и неопределенности).

6.1.3. **3.1 этап**. ***Преобразование экспериментальных данных (условий неопределенности) в данные с функциональной зависимостью (условия определенности) и построение численной модели***

Условия неопределенности характеризуются тем, что исходные данные, характеризующие исследуемого объекта, представлены: а) случайными, б) нечеткими, или, в) не полными данными, т. е. в условиях неопределенности известны лишь конечное множество Y измеренных параметров $y = \overline{1, Y}$:

$Y_v = \{y_{iv}, v = \overline{1, V}\}, i = \overline{1, M}$, где $v = \overline{1, V}$ – число компонент (параметров), из которых может быть составлен (изготовлен) материал, $i = \overline{1, M}$ – номер и множество данных; и соответствующее множество K характеристик:

$h_k(Y_v = \{y_{iv}, v = \overline{1, V}\}, i = \overline{1, M}), k = \overline{1, K}$.

Поэтому *в условиях неопределенности* отсутствует достаточная информация о функциональной зависимости каждой характеристики и ограничений от параметров. Информационные данные опций а) и b) преобразуются в числовые данные опции c) и представляются в табличной форме. В работе рассматривается опция c) информация с неполными данными, которые, как правило, ***получены в результате эксперимента***.

С учетом измеренных параметров Y_v и соответствующего множества K характеристик: $h_k(Y_v = \{y_{iv}, v = \overline{1, V}\}, i = \overline{1, M}), k = \overline{1, K}$ представим матрицу результатов экспериментальных данных по исследуемому материалу:

$$I = \begin{vmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_M \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_1 = y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{14}\, h_2\,(Y_1), h_3\,(Y_1), h_4\,(Y_1) \\ \dots \\ Y_M = y_{M1}, y_{M2}, y_{M3}, y_{M4} h_2\,(Y_M), h_3\,(Y_M), h_4\,(Y_M) \end{vmatrix}, \quad (6.12)$$

Представим математическую модель структуры материала в условиях неопределенности в виде векторной задачи математического программирования:

$$Opt\ H\ (X)\ =\ \{\max I_1(Y) \equiv \{\max h_k\ \ (Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}, \quad (6.13)$$

$$\min I_2(Y) \equiv \{\min h_k\ \ (Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_2^{unc}}\}, \quad (6.14)$$

$$\text{at restriction } h_k^{min}\ \le\ h_k(Y) \le h_k^{max}, k = \overline{1, K}, \quad (6.15)$$

$$\textstyle\sum_{v=1}^{V} y_v(t) = 100\%, y_v^{min} \le y_v \le y_v^{max}, v =\ \overline{1, V}, \quad (6.16)$$

где $Y = \{y_v, v = \overline{1, V}\}$ – вектор управляемых переменных (параметров);

$H(Y) = \{I_1(Y)\ I_2(Y)\}$ – векторный критерий, каждая компонента которого представляет вектор критериев (выходных характеристик исследуемого объекта). Величина характеристики (функции) зависит от дискретных значений вектора переменных Y. $I_1(Y) = \overline{1, K_1^{unc}}, I_2(Y) = \overline{1, K_2^{unc}}$ (*uncertainty*) – множество критериев *max* и *min* сформированные в условиях неопределенности;

в (6.15) $h_k^{min}\ \le h(X) \le h_k^{max}, k = \overline{1, K}$ – вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование исследуемого объекта, $y_v^{min} \le y_v \le\ y_v^{max}, v = \overline{1, V}$ – параметрические ограничения исследуемого объекта.

6.1.3. **3.2 этап**. ***Построение численной модели*** структуры ***материала в условиях неопределенности***

Построение численной модели структуры материала в условиях неопределённости состоит в использовании качественных и количественных описаний материала, полученных экспериментальных данных по принципу “вход-выход” в таблице 1.

Преобразование информации (исходных данных в таблице 1):

$h_2(Y_i, i = \overline{1, M})$, $h_3(Y_i, i = \overline{1, M})$, $h_4(Y_i, i = \overline{1, M})$ в функциональный вид:

$h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)$ осуществляется путем использования математических методов (регрессионного анализа). Исходные данные таблицы 2 сформированы в системе MATLAB в виде матрицы:

$$I = |Y, H|\ = \{y_{i1}, y_{i2}, y_{i3}, y_{i4}, h_{i2}, h_{i3}, h_{i4}, i = \overline{1, M}\}. \quad (6.17)$$

Для каждого набора экспериментального данных $h_k, k = 2, 3, 4$ строится функция регрессии методом наименьших квадратов $\mathbf{min} \sum_{i=1}^{M}\ (y_i - \overline{y_i})^2$ в системе MATLAB. Для этого формируется полином A_k, определяющий взаимосвязь параметров:

$Y_i = \{y_{i1}, y_{i2}, y_{i3}, y_{i4}\}$ и функции $\overline{y_{ki}} = h(Y_i, A_k), k = 2,3,4.$

Результатом является система коэффициентов: $A_k = \{A_{0k}, A_{1k}, \dots, A_{14k}\}$, которые определяют коэффициенты квадратичного полинома:

$h_k(Y, A) = A_{0k} + A_{1k}y_1 + A_{2k}y_2 + A_{3k}y_3 + A_{4k}y_4 + A_{5k}y_1y_2 + A_{6k}y_1y_3 + A_{7k}y_1y_4 + A_{8k}y_2y_3 + A_{9k}y_2y_4 + A_{10k}y_3y_4 + A_{11k}y_1^2 + A_{12k}y_2^2 + A_{13k}y_3^2 + A_{14k}y_4^2, k = 2,3,4.$ (6.18)

Программное обеспечение полиномиальной аппроксимации с четырьмя переменными и четырнадцатью факторами представлено в [44]. В итоге экспериментальные данные таблицы 1 преобразуются систему коэффициентов трех функций вида (6.18) в виде таблицы (Программа: Z_Material_MMTT32_os13_4k):

Ao= [323.8408 954.8634 110.02 21.0051 % A_{0k} (6.19)
-2.2495 28.6719 0.9106 -0.0101 %A_{1k}
-3.4938 37.0392 0.6206 -0.8403 %A_{2k}
10.7267 -31.0303 -0.4287 -0.4314 %A_{3k}
13.1239 -54.0031 -2.5176 1.1718 %A_{4k}
0.0969 -0.9219 -0.0151 0.0166 %A_{5k}
-0.0621 0.5644 -0.0094 0.0850 %A_{6k}
-0.1696 0.8966 0.0222 -0.0001 %A_{7k}
0.0743 -0.1540 -0.0198 0.0522 %A_{8k}
-0.1042 0.3919 0.0184 0.0003 %A_{9k}
0.0036 -0.0135 -0.0006 0.0006 %A_{10k}
0.0142 0.0477 -0.0004 -0.0021 %A_{11k}
0.0117 0.0437 -0.0003 0.0035 %A_{12k}
-0.2433 3.8489 0.0390 0.0061 %A_{13k}
-0.5026 3.1748 0.1414 -0.0310]; %A_{14k}
Rj = [0.6115 0.7149 0.6551 0.9017];
RRj= [0.3740 0.5111 0.4292 0.8130];

На основе Ao (2) Ao (3) Ao (4) строятся функции $h_2(Y), h_3(Y)$ и $h_4(Y)$, которые с учетом полученных коэффициентов (6.19) являются ***численной моделью структуры материала в условиях неопределенности***:

$Opt\ H\ (Y)\ =\ \{max\ h_3(Y) \equiv 110.22 + 0.7918y_1 + 1.73y_2 - 0.3713y_3 - 2.20y_4 - 0.0132y_1y_2 - 0.008y_1y_3 + 0.0193y_1y_4 - 0.0172y_2y_3 + 0.0161y_2y_4 - 0.0006y_3y_4 - 0.0004y_1^2 - 0.0002y_2^2 + 0.0335y_3^2 + 0.124y_4^2,$ (6.20)

$min\ h_2(Y) \equiv 954.86 + 28.67y_1 + 37.03y_2 - 31.03y_3 + 54y_4 - 0.922y_1y_2 - 2y_1y_3 + 0.896y_1y_4 - 0.154y_2y_3 + 0.3919y_2y_4 - 0.0134y_3y_4 + 0.0478y_1^2 + 0.0438y_2^2 + 3.8489y_3^2 + 3.1748y_4^2,$ (6.21)

$min\ h_4(Y) \equiv 21.004 - 0.0097y_1 - 0.841y_2 - 0.4326y_3 + 1.1723y_4 + 0166y_1y_2 + 0.085y_1y_3 - 0.0001y_1y_4 + 0.0523y_2y_3 + 0.0002y_2y_4 + 0.0006y_3y_4 - 0.0022y_1^2 + 0.0035y_2^2 + 0.006y_3^2 - 0.0311y_4^2\},$ (6.22)

при ограничениях: $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 100,$ (6.23)

$21 \le y_1 \le 79, 5 \le y_2 \le 59, 2.1 \le y_3 \le 9.0, 2.2 \le y_4 \le 7.0.$ (6.24)

Минимальные и максимальные значения экспериментальных данных $y_1, \dots, y_4$ представлены в нижней части таблицы 2. Минимальные и максимальные значения функций $h_1(Y), h_3(Y), h_2(Y), h_4(Y)$ незначительно отличаются от экспериментальных данных. Индекс корреляции и коэффициенты детерминации представлены в нижних строках таблицы 2. Результаты регрессионного анализа (6.20)-(6.24) в дальнейшем используются при необходимости построения общей математической модели материала.

6.1.4. **4 этап**. *Построение агрегированной математической и численной модели структуры материала в условиях определенности*

Объединяя математические модели структуры материала в условиях определённости (6.5)- (6.8) и неопределённости (6.13)-(6.16) представим математическую модель материала в условиях определенности и неопределенности в совокупности в виде векторной задачи:

$$Opt\ H\ (Y)\ =\ \{\max H_1(Y) = \{\max h_k\ (Y), k = \overline{1, K_1^{def}}\}, \tag{6.25}$$
$$\max I_1(Y) \equiv \{\max h_k\ \ (Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}, \tag{6.26}$$
$$\min H_2(Y) = \{\min h_k\ (X), k = \overline{1, K_2^{def}}, \tag{6.27}$$
$$\min I_2(Y) \equiv \{\min h_k\ \ (Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}\}, \tag{6.28}$$

при ограничениях

$$h_k^{min}\ \le h_k(Y) \le h_k^{max}, k = \overline{1, K}, y_j^{min} \le y_j \le\ y_j^{max}, j = \overline{1, N}, \tag{6.29}$$

где $Y = \{y_j, j = \overline{1, N}\}$ – вектор управляемых переменных (конструктивных параметров);

$H_1\ (Y) = \{h_k\ (Y), k = \overline{1, K_1^{def}}\}, H_2\ (Y)\ =\ \{h_k\ (Y), k = \overline{1, K_2^{def}}\}$ – множество функций *max* и *min* соответственно;

$I_1\ (Y) = \{\{h_k\ (Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}^{\overline{1,N}}, I_2\ (Y) = \{\{h_k\ (Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_2^{unc}}\}$ – множество матриц *max* и *min* соответственно; (*definiteness*), K_1^{unc}. K_2^{unc} (*uncertainty*) множество критериев *max* и *min* сформированные в условиях определенности и неопределенности;

Объединяя численные модели структуры материала в условиях определённости (6.9)-(6.11) и неопределённости (6.20)- (6.24) представим числовую модель материала в условиях определенности и неопределенности в совокупности в виде векторной задачи:

$opt\ H\ (Y) = \{\max H_1\ (X) = \{\max h_1(Y) \equiv 323.84 - 2.25y_1 - 3.49y_2 + 10.72y_3\ + 13.124y_4 + 0.0968y_1y_2 - 0.062y_1y_3 - 0.169y_1y_4\ + 0.0743y_2y_3 - 0.1y_2y_4 -\ 0.0036y_3y_4 + 0.0143y_1^2 + 0.0118y_2^2 - 0.2434y_3^2 - 0.5026y_4^2$, (6.30)

$max\ h_3(Y) \equiv 110.22 + 0.7918y_1 + 1.73y_2 - 0.3713y_3 - 2.20y_4 - 0.0132y_1y_2 - 0.008y_1y_3 + 0.0193y_1y_4 - 0.0172y_2y_3 +\ 0.0161y_2y_4 - 0.0006y_3y_4 - 0.0004y_1^2 - 0.0002y_2^2 + 0.0335y_3^2 + 0.124y_4^2\}$, (6.31)

$\min H_2\ (Y) = \{min\ h_2(Y) \equiv 954.86 + 28.67y_1 + 37.03y_2 - 31.03y_3 + 54y_4 - 0.922y_1y_2 - 2y_1y_3 + 0.896y_1y_4 - 0.154y_2y_3 + 0.3919y_2y_4 -\ 0.0134y_3y_4 + 0.0478y_1^2 + 0.0438y_2^2 + 3.8489y_3^2 + 3.1748y_4^2$, (6.32)

$max\ h_4(Y) \equiv 21.004 - 0.0097y_1 - 0.841y_2 - 0.4326y_3 + 1.1723y_4 + 0166y_1y_2 + 0.085y_1y_3 - 0.0001y_1y_4 + 0.0523y_2y_3\ + 0.0002y_2y_4 + 0.0006y_3y_4 - 0.0022y_1^2 + 0.0035y_2^2 + 0.006y_3^2 - 0.0311y_4^2\}\}$, (6.33)

при ограничениях: $y_1 +\ y_2 +\ y_3 +\ y_4 = 100$, (6.34)

$21 \le y_1 \le 79, 5 \le y_2 \le 59, 2.1 \le y_3 \le 9.0, 2.2 \le y_4 \le 7.0.$ (6.35)

Векторная задача математического программирования (6.30)- (6.35) представляет численную модель принятия оптимального решения структуры материала в условиях определенности и неопределенности в совокупности.

6.2. Блок 2. Методология процесса принятия оптимального решения (выбора оптимальных параметров) структуры материала на базе векторной задачи (ВЗМП)

6.2.1. **5 этап.** *Решение ВЗМП – модели структуры материала при равнозначных критериях (решение прямой задачи).*

Для решения векторных задач математического программирования (6.30)- (6.35) представлены методы, основанные на аксиоматике и принципа оптимальности 1. Алгоритм представим в виде ряда шагов.

Шаг 1. Решение задачи (6.30)- (6.35) по каждому критерию отдельно, при этом используется функция *fmincon* (…) системы MATLAB, обращение к функции *fmincon* (…) рассмотрено в [44]. В результате расчета по каждому критерию получаем точки оптимума: Y_k^* и $h_k^* = h_k\ (Y_k^*), k = \overline{1, K}$, $\boldsymbol{K}$=4– величины критериев в этой точке, т. е. наилучшее решение по каждому критерию:

1: $Y_1^* = \{y_1 = 46.56, y_2 = 43.23, y_3 = 8.0, y_4 = 2.2\}, h_1^* = h_1\ (Y_1^*)\ = -387.9$;
2: $Y_2^* = \{y_1 = 55.60, y_2 = 34.19, y_3 = 8.0, y_4 = 2.2\}, h_2^* = h_2\ (Y_2^*)\ = 1361.4$;
3: $Y_3^* = \{y_1 = 31.90, y_2 = 59.00, y_3 = 2.1, y_4 = 7.0\}, h_3^* =\ h_3\ (Y_3^*)\ = -210.3$;
4: $Y_4^* = \{y_1 = 36.70, y_2 = 59.00, y_3 = 2.1, y_4 = 2.2\}, h_4^* = h_4\ (Y_4^*)\ = 30.714$.

Ограничения (6.34)- (6.35) и точки оптимума $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$ в координатах $\{x_1,\ x_2\}$ представлены на рис. 6.1.

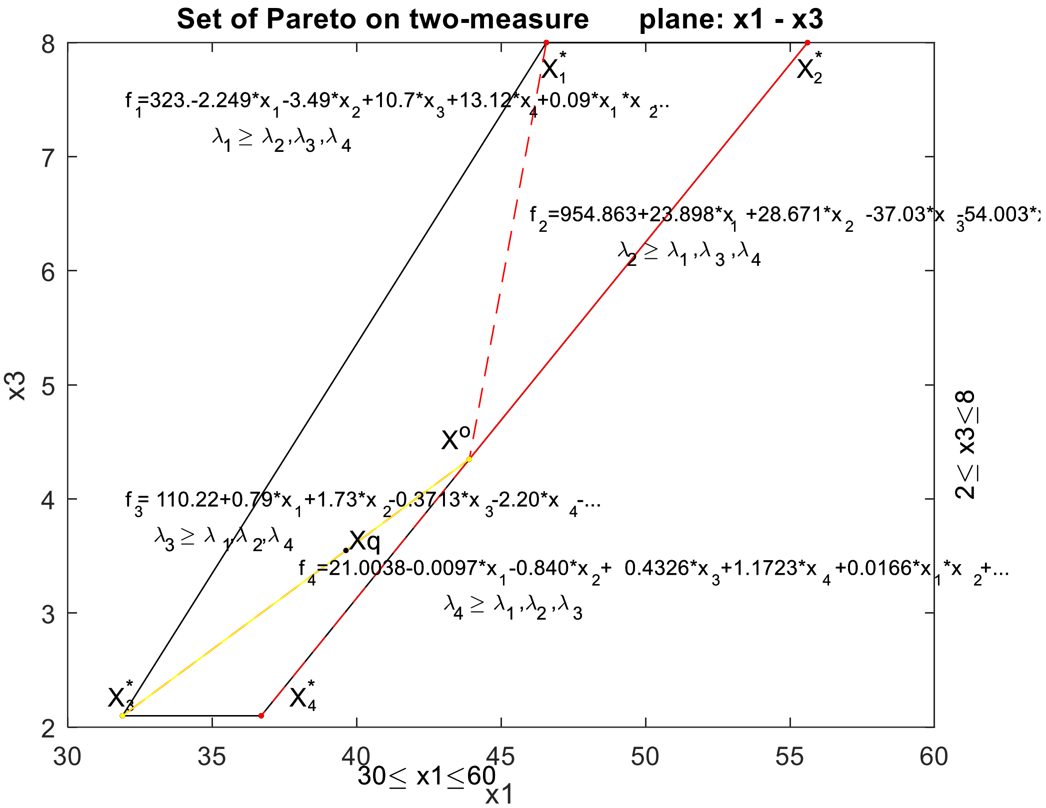

Рис. 6.1. Множество точек Парето, $\boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S}$, $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$
в двухмерные системы координат $\{x_1, x_2\}$

Шаг 2. Определяем наихудшую величину каждого критерия (антиоптимум): Y_k^0 и $h_k^0 = h_k\,(Y_k^0), k = \overline{1, K}$, $\boldsymbol{K}$=4. Для чего решается задача (6.30)- (6.35) для каждого критерия $k = \overline{1, K_1}$ на минимум, для каждого критерия $k = \overline{1, K_2}$ на максимум. В результате решения получим: $X_k^0 = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ – точка оптимума по соответствующему критерию, $k = \overline{1, K}$; $f_k^0 = f_k\,(X_k^0)$ – величина k-го критерия в точке $X_k^0, k = \overline{1, K}$, (верхний индекс ноль):

$Y_1^0 = \{y_1 = 31.9, y_2 = 59.0, y_3 = 2.1, y_4 = 7.00\}, h_1^0 = h_1\,(Y_1^0) = \ 296.6;$

$Y_2^0 = \{y_1 = 31.9, y_2 = 59.0, y_3 = 2.1, y_4 = 7.\}, h_2^0 = \ h_2\,(Y_2^0) = \ -2458.5;$

$Y_3^0 = \{y_1 = 78.16, y_2 = 9.02, y_3 = 8, y_4 = 4.81\}, h_3^0 = h_3\,(Y_3^0) = 169.26;$

$Y_4^0 = \{y_1 = 62.71, y_2 = 22.9, y_3 = 8, y_4 = 6.39\}, h_4^0 = \ h_4\,(Y_4^0) = -73.62.$

Шаг 3. Выполняется системный анализ множества точек, оптимальных по Парето. В точках оптимума $Y^* = \{Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, Y_4^*\}$ определяются величины целевых функций $H\,(Y^*) = \left\|h_q\,(Y_k^*)\right\|_{q=\overline{1,K}}^{k=\overline{1,K}}$, $D = \ (d_1\ d_2\ d_3\ d_4)^T$- вектор отклонений по каждому критерию на допустимом множестве $\boldsymbol{S}$: $d_k = h_k^* - h_k^0, k = \overline{1,4}$, и матрица относительных оценок: $\lambda\,(Y^*) = \left\|\lambda_q\,(Y_k^*)\right\|_{q=\overline{1,K}}^{k=\overline{1,K}}$, $\lambda_k\,(X) = \ (h_k^* - h_k^0)/d_k$

$$H\,(Y^*) = \begin{Vmatrix} 388.0\ 1444.2\ 183.9\ 68.5 \\ 382.0\ 1361.4\ 177.3\ 72.1 \\ 296.6\ 2458.5\ 210.4\ 30.2 \\ 330.1\ 2210.9\ 208.0\ 30.7 \end{Vmatrix}, d_k = \begin{Vmatrix} 91.4 \\ -1097 \\ 41.09 \\ -42.9 \end{Vmatrix},$$

$$\lambda\,(Y^*) = \begin{Vmatrix} 1.0000\ 0.9245\ 0.3560\ 0.1197 \\ 0.9367\ 1.0000\ 0.1968\ 0.0363 \\ 0.0\ 0.0\ 1.0000\ 1.011 \\ 0.3669\ 0.2257\ 0.9427\ 1.0000 \end{Vmatrix}. \qquad (6.36)$$

Системный анализ величин критериев в относительных оценках показывает, что в точках оптимума $Y^* = \{\,Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, Y_4^*\}$ (по диагонали) относительная оценка равна единице. Остальные критерии значительно меньше единицы. Требуется найти такую точку (параметры), при которых относительные оценки наиболее близки к единице. На решение этой проблемы формируется λ-задача, шаг 4, 5.

Шаг 4. Построение λ-задачи осуществляется в два этапа: первоначально строится максиминная задача оптимизации с нормализованными критериями:

$$\lambda^o = \boldsymbol{max_{Y \in S} min_{k \in K}} \lambda_k (Y), G(Y) \leq 0, Y \geq 0, \quad (6.36)$$

которая на втором этапе преобразуется в стандартную задачу математического программирования (λ-задача):

$$\lambda^o = max\, \lambda, \quad (6.37)$$

с ограничениями $\lambda - \frac{h_1(Y) - h_1^0}{h_1^* - h_1^0} \leq 0, \lambda - \frac{h_3(Y) - h_3^0}{h_3^* - h_3^0} \leq 0,$ (6.38)

$$\lambda - \frac{h_2(Y) - h_2^0}{h_2^* - h_2^0} \leq 0, \lambda - \frac{h_4(Y) - h_4^0}{h_4^* - h_4^0} \leq 0, \quad (6.39)$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 100, \quad (6.40)$$

$$0 \leq \lambda \leq 1, 21 \leq y_1 \leq 79, 5 \leq y_2 \leq 59, 2.1 \leq y_3 \leq 9.0, 2.2 \leq y_4 \leq 7.0. \quad (6.41)$$

где вектор неизвестных имеет размерность N+1: $\boldsymbol{Y} = \{y_1, \dots, y_N, \lambda\}$; функции $h_1(Y), h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)$ соответствуют (6.30)- (4.35). Подставив числовые значения функций $h_1(Y), h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)$, мы получим λ-задачу:

$$\lambda^o = max\, \lambda, \quad (6.42)$$

ограничения $\lambda - \frac{323.84 - 2.249y_1 - 3.49 * x2 \dots - 0.2434y_3^2 - 0.5026y_4^2 - h_1^0}{h_1^* - h_1^0} \leq 0,$ (6.43)

$$\lambda - \frac{110.22 + 0.7918y_1 + 1.73y_2 - \dots + 0.0335y_3^2 + 0.124y_4^2 - h_3^0}{f_3^* - f_3^0} \leq 0, \quad (6.44)$$

$$\lambda - \frac{954.8 + 28.67y_1 + 37y_2 - \dots + 3.8489y_3^2 + 3.1748y_4^2 - h_2^0}{h_2^* - h_2^0} \leq 0, \quad (6.45)$$

$$\lambda - \frac{21 - 0.0097y_1 - 0.841y_2 - \dots + 0.006y_3^2 - 0.0311y_4^2 - h_4^0}{h_4^* - h_4^0} \leq 0, \quad (6.46)$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 100, \quad (6.47)$$

$$0 \leq \lambda \leq 1, 21 \leq y_1 \leq 79, 5 \leq y_2 \leq 59, 2.1 \leq y_3 \leq 9.0, 2.2 \leq y_4 \leq 7.0. \quad (6.48)$$

Шаг 5. Решение λ-задачи.

Решение λ-задачи. (6.42)-(6.48) осуществляется обращением к функции *fmincon* (…), [44]:

$[Xo, Lo] = fmincon\,('Z\_TehnSist\_4Krit\_L', X0, Ao, bo, Aeq, beq, lbo, ubo,$ $'Z\_TehnSist\_LConst', options)$.

В результате решения ВЗМП (6.30)- (6.35) при равнозначных критериях и соответствующей ей λ-задачи (6.42)- (6.48) получили:

$$\boldsymbol{X^o} = \{Y^o = \{y_1 = 43.9, y_2 = 49.54, y_3 = 4.348, y_4 = 2.2, \lambda^o = 0.6087\}, \quad (6.49)$$

точку оптимума $\boldsymbol{X^o}$, которая представляет конструктивные параметры материала при равнозначных критериях (характеристиках, представлена на рис. 1;

$h_k(Y^o), k = \overline{1, K}$- величины критериев (характеристик структуры материала):

$$\{h_1(Y^o) = 364.0, h_2(Y^o) = 1790.7, h_3(Y^o) = 194.3, h_4(Y^o) = 47.5\}; \quad (6.50)$$

$\lambda_k(Y^o), k = \overline{1, K}$- величины относительных оценок

$$\{\lambda_1(Y^o) = 0.7372, \lambda_2(Y^o) = 0.6087, \lambda_3(Y^o) = 0.6087, \lambda_4(Y^o) = 0.6087\}; \quad (6.51)$$

λ^o=0.6087 – это максимальный нижний уровень среди всех относительных оценок, измеренный в относительных единицах:

$$\lambda^o = min\,(\lambda_1(Y^o), \lambda_2(Y^o), \lambda_3(Y^o), \lambda_4(Y^o)) = 0.6087,$$

λ^o – также называют гарантированным результатом в относительных единицах.

Гарантированный результат λ^o показывает, что λ^o=0.6087 и характеристики материала в относительных единицах $\lambda_k(Y^o)$ и соответственно характеристики структуры материала $h_k(Y^o)$ нельзя улучшить, не ухудшая при этом другие характеристики.

Заметим, что в соответствии с теоремой с 1, в точке $\boldsymbol{X^o}$ критерии 2, 3 и 4 противоречивы. Это противоречие определяется равенством:

$$\lambda_2(Y^o) = \lambda_3(Y^o) = \lambda_4(Y^o) = \lambda^o = 0.6087,$$

а остальные критерии неравенством $\{\lambda_2(X^o) = 0.7372\} > \lambda^o$.

Теорема 1 служит основой для определения правильности решения векторной задачи. В векторной задаче математического программирования, как правило, для двух критериев выполняется равенство: $\lambda^o = \lambda_q(Y^o) = \lambda_p(Y^o), q, p \in \boldsymbol{K}, X \in S$, (в нашем примере такие критерии 2, 3, 4), для других критериев определяется как неравенство.

6.2.2. **6 этап.** *Геометрической интерпретация результатов решения ВЗМП с 4 параметрами и 4 критериями в двухмерную систему координат (с 2 параметрами) в относительных единицах.*

Для геометрической интерпретация результатов решения ВЗМП с 4 параметрами и 4 критериями в двухмерную систему координат (с 2-мя параметрами) в относительных единицах введем изменения. В ВЗМП (6.30)-(6.35) параметры y_1 и y_3 рассматриваются как переменные, параметры y_2 и y_4 рассматриваются как постоянные. Присвоим постоянным параметрам размерность:

$y_2 = 49.5492, y_4 = 2.2$ в соответствии с результатом решения ВЗМП (6.30)- (6.35) при равнозначных критериях, представленных в (6.49).

В итоге ВЗМП (6.30)- (6.35) стала двух мерной.

В результате решения ВЗМП (6.30)-(6.35) с двумя переменными y_1 и y_3 (в обозначения результатов ввели дополнительно «о» Y1omax) получили.

1. Координаты точки по первому критерию на максимум:

Y1omax = $\{x_1$ =46.5676 x_2 =49.5492 x_3 =8.0000 x_4 =2.2000}. (6.52)

Величины четырех критериев в точке Y1omax:

FY1omax = $\{f_1(Y1omax) = 403.6$ $f_2(Y1omax) =$ 1430.3 $f_3(Y1omax)$ =190.2 $f_4(Y1omax)$ =72.7.

Величины относительны оценок критериев в точке X1omax:

LY1omax = $\{\lambda_1(Y1omax)$ =1.1708 $\lambda_2(Y1omax) = 0.9372$
$\lambda_3(Y1omax)$ =0.5098 $\lambda_4(Y1omax)$ =0.0207. (6.53)

Координаты точки по первому критерию на минимум:

Y1omin ={31.9000 49.5492 2.1000 2.2000}.

Величины шести критериев в точке Y1omin:

FY1omin ={1.0e+03 * 0.3037 2.2073 0.1957 0.0243}.

Величины относительны оценок критериев в точке Y1omin:

LY1omin = (0.0774 0.2290 0.6441 1.1503) (6.54)

2. Координаты точки, функции и относительные оценки по второму критерию на максимум и минимум:

Y2omax ={55.6075 49.5492 8.0000 2.2000}.
FY2omax ={1.0e+03 * 0.4320 1.1936 0.1909 0.0842}.
LY2omax ={1.4813 1.1530 0.5268 -0.2467}.
Y2omin ={31.9000 49.5492 2.1000 2.2000).
FY2omin ={1.0e+03 * 0.3037 2.2073 0.1957 0.0243}.
LY2omin ={0.0774 0.2290 0.6441 1.1503}. (6.55)

3. Координаты точки, функции и относительные оценки по третьему критерию на максимум и минимум:

Y3omax ={31.9000 49.5492 2.1000 2.2000 }.
FY3omax ={1.0e+03 * 0.3037 2.2073 0.1957 0.0243}.
LY3omax ={0.0774 0.2290 0.6441 1.1503}.
Y3omin ={78.1673 49.5492 8.0000 2.2000}.
FY3omin ={512.9622 636.7052 192.3963 111.3139}.
LY3omin ={2.3673 1.6606 0.5629 -0.8782}. (6.56)

4. Координаты точки, функции и относительные оценки по четвертому критерию на максимум и минимум:

Y4omax ={36.7000 49.5492 2.1000 2.2000}. (6.57)
FY4omax ={1.0e+03 * 0.3182 2.1306 0.1964 0.0283}.

LY4omax ={0.2363 0.2989 0.6603 1.0562}.
Y4omin ={62.7123 49.5492 8.0000 2.2000}. (6.58)
FY4omin ={1.0e+03 * 0.4559 1.0129 0.1914 0.0930}.
LY4omin ={1.7432 1.3176 0.5391 -0.4511}. (6.59)

Представим в целом результаты решения ВЗМП с двумя переменными параметрами x_1 и x_3 (двухмерная ВЗМП):

Y = [Yopt (1,:)={46.5676 43.2324 8.0000 2.2000}, $\lambda_1(\mathrm{Y1}omax)$ =0.5;
Yopt (2,:)= {55.6075 34.1925 8.0000 2.2000}, $\lambda_2(\mathrm{Y2}omax)$ =0.6087;
Yopt (3,:)= {31.9000 59.0000 2.1000 7.0000}, $\lambda_3(\mathrm{Y3}omax) = 0.6087$;
Yopt (4,:)= {36.7000 59.0000 2.1000 2.2000},$\lambda_4(\mathrm{Y4}omax) = 0.7372$;
Yo (1:4)= {43.9022 49.5492 4.3486 2.200}, $\lambda(\mathrm{Yo}) = \lambda^o = 0.5196$. (6.60)

В допустимом множестве точек $\boldsymbol{S}$, образованных ограничениями (6.47)-(6.48), точки оптимума Y_1^*, Y_2^*, Y, Y_4^*, объединенных в контур, представляют множество точек, оптимальных по Парето, $\boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$, представлены на рис 4.1. Координаты этих точек, а также характеристики материала в относительных единицах $\lambda_1\ (Y), \lambda_2\ (Y), \lambda_3\ (Y), \lambda_4\ (Y)$ показаны на рис. 4.2 в трех мерном пространстве $x_1\ x_2$ и λ, где третья ось λ – относительная оценка.

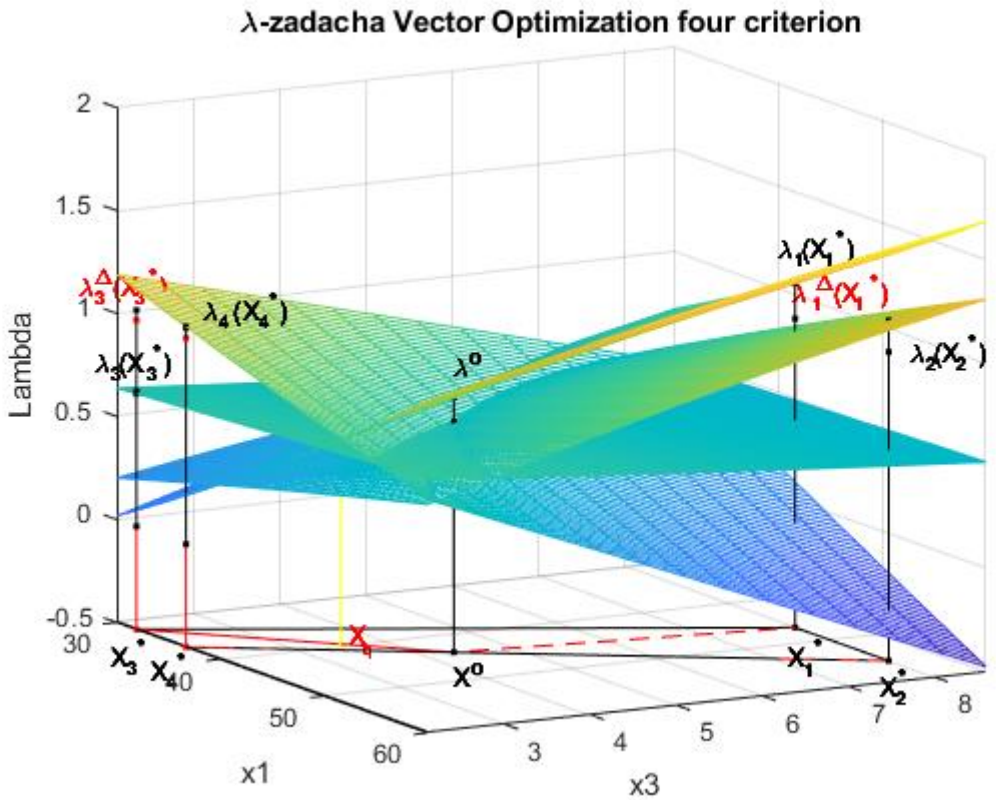

Рис. 6.2. Решение λ-задачи в трехмерной системе координат $x_1\ x_3\ (= y_1\ y_3)$, λ

Discussion. Сравним результаты решения ВЗМП (6.30)-(6.35) с переменными координатами $\{y_1 y_2\ y_3\ y_4\}$ (четырех мерная ВЗМП), представленные в (6.49), (6.50), (6.51), с результатами решения ВЗМП (6.30)-(6.35) с переменными координатами $\{y_1\ y_3\}$ (двух мерная ВЗМП), представленные в (6.60). (На рисунках 6.2, …, 6.7 вектор $\boldsymbol{Y} = \{y_1, \dots, y_N, \lambda\}$ и функции $h_1(Y), h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)$ заменены на $\boldsymbol{X} = \{x_1, \dots, x_N, \lambda\}$; функции $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$).

Мы видим, что координаты шести точек оптимума в $\{y_1\ y_3\}$ и λ^o совпадают. Оптимальные величины критериев $h_k\ (Y_k^*), k \in \boldsymbol{K}$ и соответствующие относительные оценки $\lambda_k\ (Y_k^*), k \in \boldsymbol{K}$ не совпадают.

Рассмотрим, например, оптимальную точку X_3^*. Функция $\lambda_3\ (X)$ сформирована из функции $h_3\ (X)$ с переменными координатами $\{y_1\ y_3\}$ и с постоянными координатами $\{y_2$=49.54, y_4=2.2$\}$, взятые из оптимальной точки Y^o (6.49). В точке Y_3^* относительная оценка

$\lambda_3\ (Y_3^*) = 0.6441$– показана на рис. 4.2 черной точкой. Но мы знаем, что относительная оценка $\lambda_3\ (Y_3^*)$ полученная из функции $h_3\ (Y_3^*)$ на третьем шаге равна единице, обозначим ее как $\lambda_3^{\Delta}\ (Y_3^*) = 1$ – показана на рис. 4.2 красной точкой.

Разность между $\lambda_3^{\Delta}\ (Y_3^*) = 1$ и $\lambda_3\ (Y_3^*) = 0.6441$ является ошибкой Δ=0.3559 перехода от четырехмерной (а в общем случае *N*-мерной) к двухмерной области. Аналогично показана точка X_1^* и соответствующие относительные оценки $\lambda_1\ (Y_1^*)$ и $\lambda_1^{\Delta}\ (Y_1^*)$. Обобщая и объединяя проблемы дискуссии, можем сформулировать методологию.

Методология геометрической интерпретации перехода от N-мерного к двухмерному измерению функции в векторной задаче математического программирования.

1 шаг. Построение и решение λ-задачи с *N*-мерными параметрами.

2 шаг. Построение и решение λ-задачи с *2*-мерными параметрами, остальные (*N-2)* параметры постоянные взятые из результатов решения λ-задачи с *N*-мерными параметрами (из шага 1).

3 шаг. Геометрическое построение функций из λ-задачи с *2*-мерными параметрами стандартными методами и соответствующими надписями

Таким образом, впервые в отечественной и зарубежной практике показан переход и его геометрическая иллюстрация от *N*-мерного к двухмерному измерению функции в векторных задачах математического программирования с соответствующими ошибками аппроксимации.

6.2.3. **7 этап.** *Решение ВЗМП – модели структуры материала при заданном приоритете критерия (решение обратной задачи).*

Лицом, принимающим решения, как правило, является конструктор системы. В разделе переменная *Y* заменена на переменную *X*.

Шаг 1. Решение векторной задачи при равнозначных критериях. Алгоритм решения векторной задачи представлен на стадии 3. Численные результаты решения векторной задачи представлены выше.

Множество точек, оптимальных по Парето $\boldsymbol{S^o}\subset\boldsymbol{S}$ находится между оптимальными точками $X_1^*\ X^o\ X_3^*\ X^o\ X_4^*\ X^o\ X_2^*\ X^o\ X_1^*$ (на рисунках вместо *Y* используется *X*). Мы проведем анализ множества точек Парето $\boldsymbol{S^o}\subset\boldsymbol{S}$.

Для этой цели мы соединим вспомогательные точки: $X_1^*\ X_3^*\ X_4^*\ X_2^*\ X_1^*$ с точкой X^o, которая условно представляет центр множества Парето. В результате получили четыре подмножеств точек $X\in\boldsymbol{S_q^o}\subset\boldsymbol{S^o}\subset\boldsymbol{S}, q=\overline{1,4}$. Подмножество $\boldsymbol{S_1^o}\subset\boldsymbol{S^o}\subset\boldsymbol{S}$ характеризуется тем, что относительная оценка $\lambda_1 \geq \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, λ_4, то есть в поле первого критерия $\boldsymbol{S_1^o}$ имеет приоритет над остальными. Подобно $\boldsymbol{S_2^o}, \boldsymbol{S_3^o}, \boldsymbol{S_4^o}$- подмножества точек, где второй, третий и четвертый критерий имеет приоритет над другими соответственно. Множество точек, оптимальных по Парето, будем обозначать:

$\boldsymbol{S^o} = \boldsymbol{S_1^o}\cup\boldsymbol{S_2^o}\cup\boldsymbol{S_3^o}\cup\boldsymbol{S_4^o}$.

Координаты всех полученных точек и относительные оценки представлены в двумерном пространстве $\{x_1\ x_3\}$ на рис. 6.1. Эти координаты показаны в трех измеренных пространствах $\{x_1\ x_3\ \lambda\}$ на рис. 6.2, где третья ось λ- относительная оценка. Ограничения набора точек, оптимальных по Парето, на рис. 2 он снижен до -0,5. Эта информация также является основой для дальнейшего исследования структуры множества Парето. Лицо, принимающее решения, как правило, является разработчиком системы (структуры материала). Если результаты решения векторной задачи с равнозначными критериями не удовлетворяют лицо, принимающее решение, то выбор оптимального решения осуществляется из какого-либо подмножества точек $\boldsymbol{S_1^o}, \boldsymbol{S_2^o}, \boldsymbol{S_3^o}, \boldsymbol{S_4^o}$. Эти подмножества точек Парето показаны на рис. 4.1 в виде функций $f_1(X), \dots, f_4(X)$.

Шаг 2. Выбор приоритетного критерия $q \in \boldsymbol{K}$.

В соответствии с теоремой 1 известно, что в оптимальной точке X^o всегда имеется два наиболее противоречивых критерия, $q \in \boldsymbol{K}$ и $p \in \boldsymbol{K}$, для которых в относительных единицах выполняется точное равенство:

$\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_p(X^o), q, p \in \boldsymbol{K}, X \in \boldsymbol{S},$

а для остальных выполняется неравенства: $\lambda^o \le \lambda_k(X^o), \forall k \in \boldsymbol{K}, q \ne p \ne k.$

В модели материала (6.30)- (6.35) и соответствующей λ-задачи (6.42)-(6.48) такими критериями являются второй и третий: $\lambda^o = \lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o)$= 0.6087, т.е. выполняется числовая симметрия.

Эту симметрию покажем на рис. 4.3, где представлены функции $\lambda_1(X)$ и $\lambda_3(X)$ отдельно со стороны оптимальной точки $\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\}$.

Для сравнения аналогично представим функции наиболее противоречивые критерии $\lambda_2(X)$ и $\lambda_3(X)$ отдельно со стороны оптимальной точки $\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\}$. На рис. 4.3 и 4.4 показаны все точки и данные, о которых говорилось на рис. 4.2.

Как правило, из этой пары $\lambda^o = \lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o)$= 0.6087 противоречивых критериев выбирается критерий, который ЛПР хотел бы улучшить. Такой критерий называется «приоритетным критерием», обозначим его $q = 3 \in \boldsymbol{K}$. Этот критерий исследуется во взаимодействии с первым критерием $q = 1 \in \boldsymbol{K}$. Мы исследуем эти два критерия из всего множества критериев $\boldsymbol{K} = 4$, показанных на рис. 4.3. На дисплей выдается сообщение:

q=input ('Введите приоритетный критерий (номер) *q*= ') – Ввели критерий *q*=3.

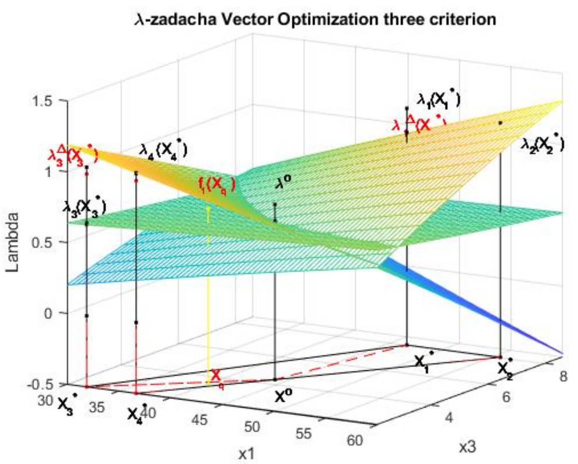

Рис. 6.3. Решение λ-задачи: $\lambda_2(X)$, ($\lambda_3(X)$ и $\lambda_4(X)$ в трехмерной системе координат x_1 x_2 и λ, $\lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o) = \lambda_4(X^o)$= 0.6087

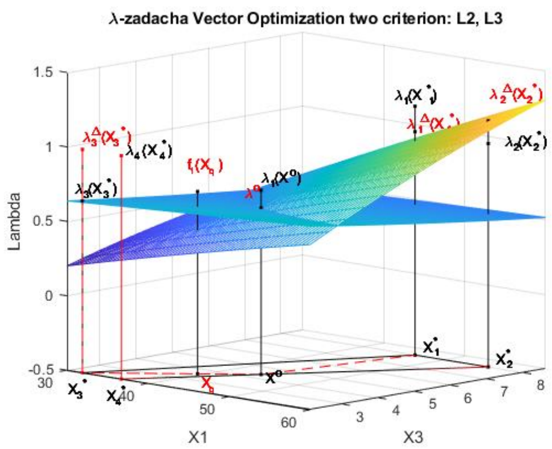

Рис. 6.4. Решение λ-задачи ($\lambda_2(X)$ и $\lambda_3(X)$) в трехмерной системе координат x_1 x_2 λ, $\lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o)$= 0.6087.

***Шаг** 3*. Определяются числовые пределы изменения величины приоритета критерия $q = 3 \in \boldsymbol{K}$. Для приоритетного критерия $q = 3 \in \boldsymbol{K}$ определяются изменения числовых пределов в натуральных единицах при переходе из точки оптимума X^o (6.49) в точку X_q^*, полученную на первом шаге. Данные о критерии *q*=3 выдаются на экран:

$f_q(X^o) = 194.27 \le f_q(X) \le 210.35 = f_q(X_q^*), q \in \boldsymbol{K}.$ (6.61)

В относительных единицах критерий *q=3* изменяется в следующих пределах:

$\lambda_q(X^o) = 0.6087 \le \lambda_q(X) \le 1 = \lambda_q(X_q^*), q = 3 \in \boldsymbol{K}.$ (6.62)

Эти данные анализируется.

Шаг** 4*. Выбор величины приоритетного критерия *q*∈K***. (Decision-making).

На сообщение: «Введите величину приоритетного критерия *fq*=» – вводим, например, f_q=200.

***Шаг** 5. Вычисляется относительная оценка.*

Для выбранной величины приоритетного критерия $f_q = 200$ вычисляется относительная оценка: $\lambda_q = \frac{f_q - f_q^0}{f_q^* - f_q^0} = \frac{200-194.27}{210.35-194.27} = 0.7479,$

которая при переходе от точки X^o к точке X_q^* лежит в пределах (6.61):

$0.6087 = \lambda_3(X^o) \le \lambda_3 = 0.7489 \le \lambda_3(X_3^*) = 1, q \in \boldsymbol{K}$,

Шаг 6. Вычислим коэффициент линейной аппроксимации

Предполагая линейный характер изменения критерия $f_q(X)$ в (6.61) и соответственно относительной оценки λ_q в (6.62), используя стандартные приемы линейной аппроксимации, вычислим коэффициент пропорциональности между $\lambda_q(X^o)$, λ_q, который назовем ρ:

$$\rho = \frac{\lambda_q - \lambda_q(X^o)}{\lambda_q(X_q^*) - \lambda_q(X^o)} = \frac{0.7489 - 0.6087}{1 - 0.6087} = 0.3558, q = 3 \in \boldsymbol{K}. \quad (6.63)$$

Шаг *7*. Вычислим координаты точки приоритета критериев с размерностью f_q. Предполагая линейный характер изменения вектора $X^q = \{x_1\ x_2\ x_3\ x_4\}, q = 3$, определим координаты для точки с $f_q = 200$ с относительной оценкой (6.53):

$$x_{\lambda=0.74}^{q=3} = \{x_1 = X^o(1) + \rho\,(X_q^*(1) - X^o(1)),$$

$$x_2 = X^o(2) + \rho\left(X_q^*(2) - X^o(2)\right),$$

$$x_3 = X^o(3) + \rho\left(X_q^*(3) - X^o(3)\right),$$

$$x_4 = X^o(4) + \rho\left(X_q^*(4) - X^o(4)\right)\}, \quad (6.64)$$

где $X^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2\}$,

$X_3^* = \{x_1 = 31.9, x_2 = 59.00, x_3 = 2.1, x_4 = 7.0\}$.

Как результат решения (6.64) мы получим точку с координатами:

$X^q = \{x_1 = 39.63, x_2 = 52.91, x_3 = 3.54, x_4 = 3.907\}$.

Шаг *8*. Вычисление главных показателей точки X^q.

Для полученной точки X^q, вычислим:

все критерии в натуральных единицах $f_k(X^q) = \{f_k(X^q), k = \overline{1,K}\}$,

$f(X^q) = \{f_1(X^q) = 344.3, f_2(X^q) = 2000, f_3(X^q) = 199, f_4(X^q) = 41.7\}$;

все относительные оценки критериев:

$\lambda^q = \{\lambda_k^q, k = \overline{1,K}\}, \lambda_k(X^q) = \frac{f_k(X^q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1,K}$:

$\lambda_k(X^q) = \{\lambda_1(X^q) = 0.5224, \lambda_2(X^q) = 0.418, \lambda_3(X^q) = 0.7244, \lambda_4(X^q) = 0.7446\}$;

минимальная относительная оценка: $\min\lambda(X^q) = \min\limits_{k \in K}(\lambda_k(X^q)) = 0.418$.

$P^q = [p_1^3 = 1.3868, p_2^3 = 1.7333, p_3^3 = 1.0, p_4^3 = 0.973]$;

вектор приоритетов $P^q(X) = \{p_k^q = \frac{\lambda_q(X^q)}{\lambda_k(X^q)}, k = \overline{1,K}\}$:

$$\lambda_k(X^q) * P^q = \{p_1^3 * \lambda_1(X^q) = 0.7244, p_2^3 * \lambda_2(X^q) = 0.7244,$$
$$p_3^3 * \lambda_3(X^q) = 0.7244, p_4^3 * \lambda_4(X^q) = 0.7244\}$$

минимальная относительная оценка:

$$\lambda^{oo} = \min(p_1^3\lambda_1(X^q), p_2^3\lambda_2(X^q), p_3^3\lambda_3(X^q), p_4^3\lambda_4(X^q)) = 0.7244$$

Аналогично другие точки Парето $\boldsymbol{X_t^o} = \{\lambda_t^o, X_t^o\} \in \boldsymbol{S}^o$ могут быть получены.

Анализ полученных результатов. Рассчитанная величина $f_q(X_t^o) = 199, q = 3 \in \boldsymbol{K}, q \in \boldsymbol{K}$ обычно не равна заданной $f_q = 200$. Ошибка выбора $\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q| = |199 - 200| = 1.0$ определяется ошибкой линейной аппроксимации: $\Delta f_{q\%} = 0.5\%$. Если ошибка $\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q| = |199 - 200| = 1.0$, измеренная в натуральных единицах или в процентах $\Delta f_{q\%} = \frac{\Delta f_q}{f_q} * 100 = 0.5\%$, больше заданной $\Delta f, \Delta f_q > \Delta f$, то переходим к шагу 2, если $\Delta f_q \le \Delta f$, то вычисления завершаются. ***Конец.***

В процессе моделирования могут быть изменены параметрические ограничения (6.48) и функции, т. е. получено некоторое множество оптимальных решений. Из этого множества оптимальных решений выбираем окончательный вариант (процесс принятия решений).

В нашем примере окончательный вариант включает параметры: $X^o = \{X^o, \lambda^o\} = \{X^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2\}, \lambda^o = 0.6087\}$;

параметры технической системы при заданном приоритете критерия:

q=3: $X^q = \{x_1 = 39.63, x_2 = 52.91, x_3 = 3.54, x_4 = 3.907\}$.

6.3. Блок 3. Исследование, проектирование, геометрическая интерпретация N-мерного пространства в 2-х мерное и выбор оптимальных параметров сложной структуры материала в многомерной математике.

Блок 3 включает 2 этапа: 8 этап исследования в относительных единицах: 9 этап исследования в физических единицах.

6.3.1. **8 этап.** *Геометрическая интерпретация результатов решение в относительных единицах при проектировании структуры материала перехода от N-мерного к двухмерному пространству.*

Геометрическая интерпретацию результатов решения в относительных единицах представим, во-первых, на примере функций $\lambda_2\ (X), \lambda_3\ (X)$, во-вторых, отдельно на примере функций $\lambda_2\ (X)$ и $\lambda_3\ (X)$.

1. Исследование функций $\boldsymbol{\lambda_2\ (X), \lambda_3\ (X)}$ на максимум.

При исследовании параметров структуры материала на множестве точек $\boldsymbol{S}$, образованных ограничениями (6.30)- (6.35), точки оптимума $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$, показанные на рис 6.1, объединены в контур и представляют множество точек, оптимальных по Парето, $\boldsymbol{S^o} \subset \boldsymbol{S}$.

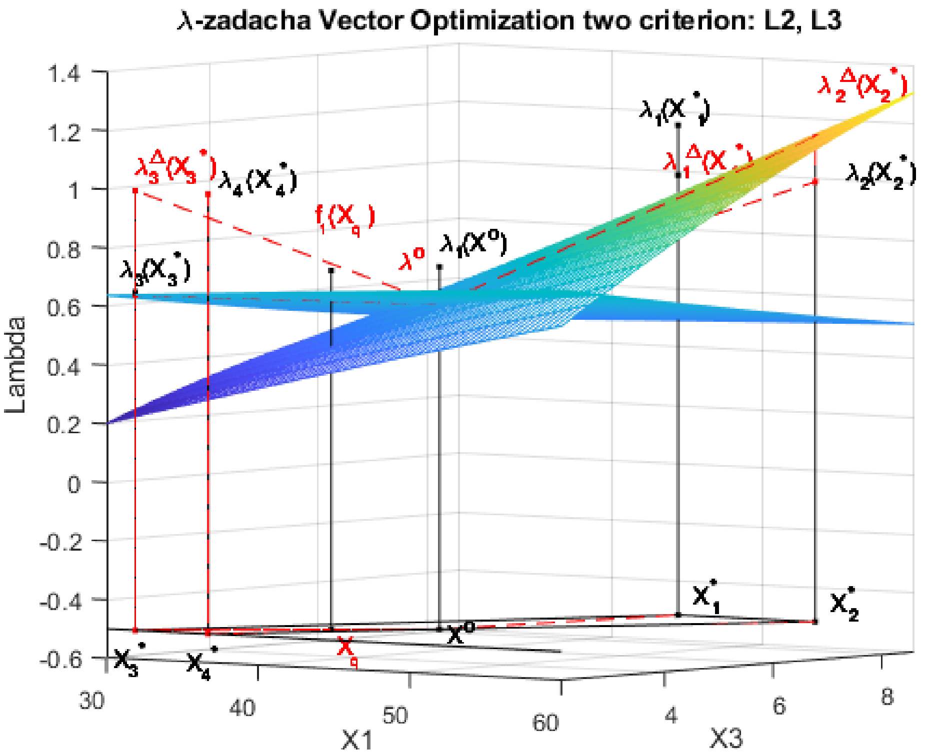

Рис. 6.5. Функции $\lambda_2\ (X), \lambda_3\ (X)$ и λ^o в λ-задаче
в двухмерной системе координат $x_1\ x_3$ и λ и геометрическая интерпретация $\lambda_2\ (X), \lambda_3\ (X)$
в четырех мерной системе координат $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

Координаты этих точек, а также характеристики структуры материала в относительных единицах $\lambda_1\ (X), \lambda_2\ (X), \lambda_3\ (X), \lambda_4\ (X)$ показаны на рис. 4.2 в двухмерном пространстве $x_1\ x_2$ и λ, где третья ось λ – относительная оценка.

Глядя на рисунок 6.2, мы можем представить изменения всех функций $\lambda_1(X), \dots, \lambda_4\ (X)$ в четырехмерном пространстве $x_1, \dots, x_4$. Для наглядности выберем две наиболее противоречивые функции $\lambda_2\ (X), \lambda_3\ (X)$, показанные на рис. 6.3, и представим эти функции $\lambda_2\ (X), \lambda_3\ (X)$ на рис. 6.5.

Рассмотрим на Рис. 6.5 оптимальную точку X_3^*. Функция $\lambda_3\ (X)$ – в относительных единицах сформирована из функции $f_3\ (X)$ – в физических единицах с переменными координатами $\{x_1\ x_3\}$ и с постоянными координатами $\{x_2 = 1790.7, x_4 = 47.5\}$, взятые из оптимальной точки X^o (6.50). В точке X_3^* относительная оценка $\lambda_3\ (X_3^*) = 0.6441$ – показана на рис. 2 черной точкой.

Но мы знаем, что относительная оценка $\lambda_3\ (X_3^*)$ полученная из функции $f_3\ (X_3^*)$ на третьем шаге равна единице, обозначим ее как $\lambda_3^\Delta\ (X_3^*) = 1$ – показана на рис. 6.5 красной точкой. Разность между $\lambda_3^\Delta\ (X_3^*) = 1$ и $\lambda_3\ (X_3^*) = 0.6441$ является ошибкой Δ=0.3559 перехода от четырехмерной (а в общем случае N-мерной) к двухмерной области. Соединим линейной функцией относительные оценки λ^o и $\lambda_3^\Delta\ (X_3^*)$, лежащей между точками X^o и X_3^*.

Аналогично X_3^* представим точку X_2^* с соответствующими относительными оценками $\lambda_2\ (X_2^*)$= 1.1530 в координатах $\{x_2\ x_3\}$ и $\lambda_2^\Delta(X_1^*) = 1$, полученную в координатах $\{x_1\ x_2\ x_3\ x_4\}$. Линейная функция, соединяющая точки λ^o и $\lambda_2^\Delta\ (X_2^*)$ в относительных единицах характеризует функцию $f_2\ (X)$ в относительных единицах в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

А в целом отрезки $\lambda_2^\Delta\ (X_2^*)$ -λ^o- $\lambda_3^\Delta\ (X_3^*)$ представляют геометрическую интерполяцию функций $f_2\ (X)$ и $f_3\ (X)$ в относительных единицах в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

2. Исследование функций $\boldsymbol{\lambda_2\ (X), \lambda_3\ (X)}$ отдельно на максимум и минимум четырехмерной системе.

Проведем исследование функций $f_2\ (X)$, представленную в относительных единицах: $\lambda_2\ (X)$, которая показана на рис. 6.6.

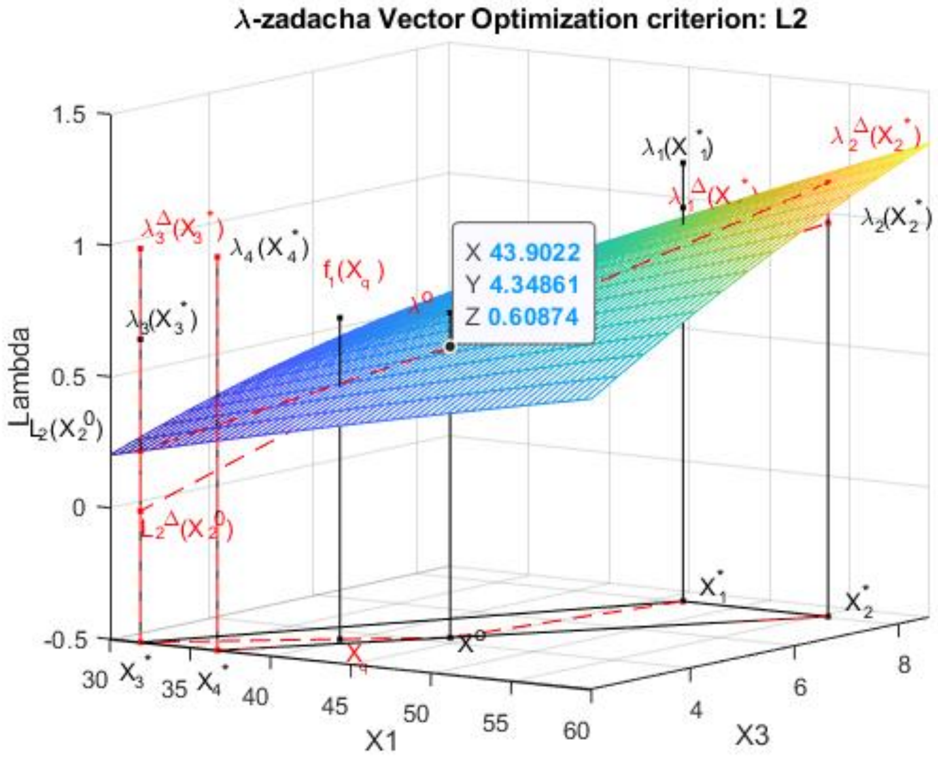

Рис. 6.6. Функции $\lambda_2\ (X)$ и λ^o в λ-задаче в двухмерной системе координат $x_1\ x_3$ и λ и геометрическая интерпретация $\lambda_2\ (X)$ в четырехмерной системе координат $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$, (выделено красным цветом).

Для оценки максимального $\lambda_2^\Delta\ (X_2^*) = 1$ значения второго критерия в относительных единицах в четырехмерной системе координат $\{x_1\ x_2\ x_3\ x_4\}$, (выделено красным цветом) используются, полученные на третьем шаге, данные (6.36) матрицы $\lambda\ (X^*)$. Для оценки минимального $\lambda_2^\Delta\ (X_2^0) = 0$ значения второго критерия в относительных единицах в четырехмерной системе координат $\{x_1\ x_2\ x_3\ x_4\}$, (выделено красным цветом) используются, полученные на третьем шаге, данные (6.36) матрицы $\lambda\ (X^0)$.

Разность по максимуму между $\lambda_2^\Delta\ (X_2^*) = 1$ (четырехмерная система) и $\lambda_2\ (X_1^*) = 1.1530$ (двухмерная система) является ошибкой Δ=0.1530 перехода от четырехмерной (а в общем случае N-мерной) к двухмерной области.

Разность по минимуму между λ_2^{Δ} $(X_2^0) = 0$ (четырехмерная система) и λ_2 $(X_2^0) = 0.2290$ (двухмерная система) является ошибкой Δ= 0.2290 перехода от четырехмерной (а в общем случае N-мерной) к двухмерной области.

Мы соединим линейной функцией относительные оценки: λ_2^{Δ} (X_2^*) λ^o и λ_2^{Δ} (X_2^0), которые лежат между точками: X_2^* X^o и X_2^0. В целом линейные отрезки: λ_2^{Δ} (X_2^*) -λ^o- λ_2^{Δ} (X_2^0) представляют геометрическую интерполяцию функции f_2 (X) в относительных единицах λ_2 (X) в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Проведем исследование функции f_3 (X), представленную в относительных единицах: λ_3 (X), показанную на рис. 6.7.

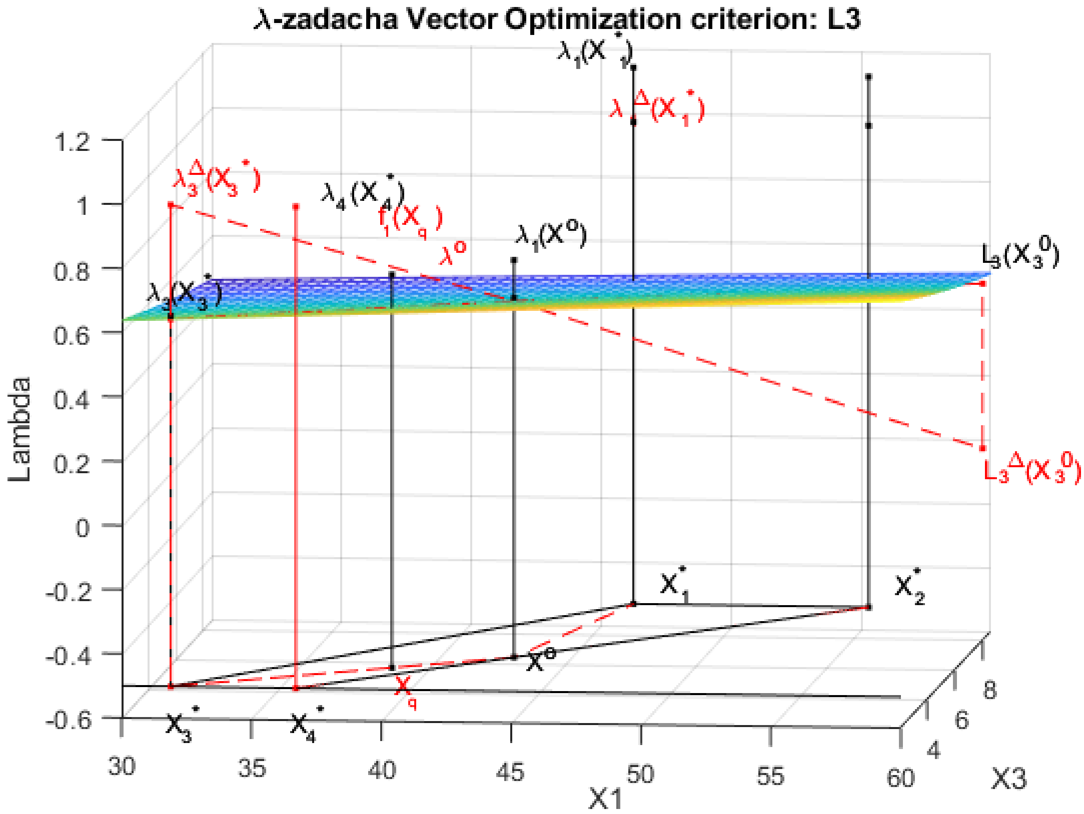

Рис. 6.7. Функции λ_3 (X) и λ^o в λ-задаче в двухмерной системе координат x_1 x_3 и λ и геометрическая интерпретация λ_3 (X) в четырех мерной системе координат x_1 x_2 x_3 x_4, (выделено красным цветом).

Для оценки максимального λ_3^{Δ} $(X_3^*) = 1$ значения третьего критерия в относительных единицах в четырехмерной системе координат $\{x_1$ x_2 x_3 $x_4\}$, (выделено красным цветом) используются, полученные на третьем шаге, данные (6.36) матрицы λ (X^*). Для оценки минимального λ_3^{Δ} $(X_0^0) = 0$ значения первого критерия в относительных единицах в четырехмерной системе координат $\{x_1$ x_2 x_3 $x_4\}$, (выделено красным цветом) используются, полученные на третьем шаге, данные (6.36) матрицы λ (X^0).

Разность по максимуму между λ_3^{Δ} $(X_3^*) = 1$ (четырехмерная система) и λ_3 $(X_3^*) = 0.6441$ (двухмерная система) является ошибкой Δ=0.3559 перехода от четырехмерной (а в общем случае N-мерной) к двухмерной области.

Разность по минимуму между λ_3^{Δ} $(X_3^0) = 0$ (четырехмерная система) и λ_3 $(X_3^0) = 0.5629$ (двухмерная система) является ошибкой Δ=0.4371 перехода от четырехмерной (а в общем случае N-мерной) к двухмерной области.

Соединим линейной функцией относительные оценки λ_3^{Δ} (X_3^*) λ^o и λ_3^{Δ} (X_3^0), лежащей между точками X_3^* X^o и X_3^0. А в целом отрезки λ_3^{Δ} (X_3^*) -λ^o- λ_3^{Δ} (X_3^0) представляют геометрическую интерполяцию функций f_3 (X) в относительных единицах λ_3 (X) в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Таким образом, впервые в отечественной и зарубежной практике показан переход и его геометрическая интерпретация от $\boldsymbol{N}$-мерного к двухмерному измерению функции в векторных задачах математического программирования с соответствующими ошибками аппроксимации.

6.3.2. ***9 этап****. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – модели структуры материала при проектировании в трехмерной системе координат* ***в физических единицах****.*

На пятом шаге алгоритма мы рассчитали параметры точки оптимума при равнозначных критериях: $\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\} = \{Y^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2\}, \lambda^o = 0.6087\}$, в двухмерной системе координат x_1, x_2 Рис. 6.1 и в трехмерной системе координат x_1, x_2 и λ в относительных единицах на рис. 6.2, 6.3, 6.4 при проектировании.

На Рис. 6.5 показаны: точки оптимума X_1^*, X_3^*, с соответствующими относительными оценками $\lambda_1\ (X_1^*)$ $\lambda_1^\Delta\ (X_1^*)$, $\lambda_3\ (X_3^*)$ $\lambda_3^\Delta\ (X_3^*)$ и линейные функции $\lambda^o\lambda_1^\Delta\ (X_1^*)$, $\lambda^o\lambda_3^\Delta\ (X_3^*)$ в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_1\ (X), f_3\ (X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Исследуем и представим эти параметры для каждой характеристики структуры материала (критерия): $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$ в ***физических единицах****.*

9.1 этап*. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП –* ***первой*** *характеристики структуры материала при проектировании в физических единицах.*

Первая характеристика структуры материала $f_1(X)$ сформирована в 6.1.4: $\max h_1(X) \equiv 323.84 - 2.25y_1 - 3.49y_2 + 10.72y_3\ + 13.124y_4 + 0.0968y_1y_2 - 0.062y_1y_3 - 0.169y_1y_4\ + 0.0743y_2y_3 - 0.1y_2y_4 -\ 0.0036y_3y_4 + 0.0143y_1^2 + 0.0118y_2^2 - 0.2434y_3^2 - 0.5026y_4^2$, (6.30)

Представим геометрическую интерпретацию функции $h_1(Y)$ в физических единицах с переменными координатами $\{y_1\ y_3\}$ и с постоянными координатами $\{y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки Y^o (6.49) на рис 6.8.

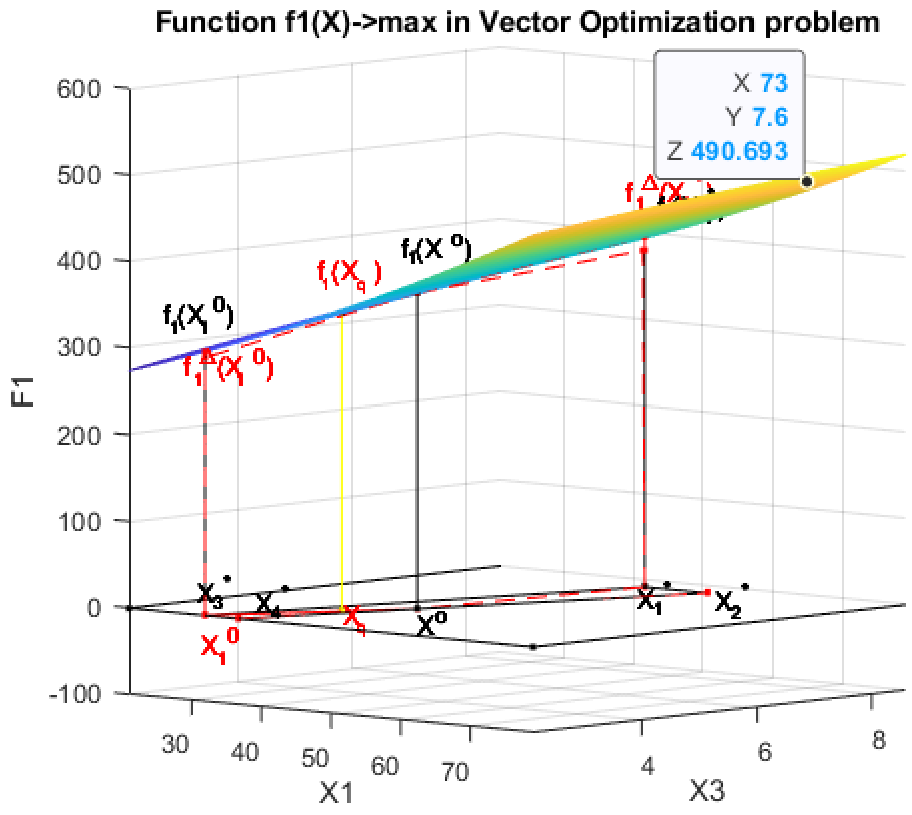

Рис. 6.8. Функция $f_1(X)$ в двухмерной системе координат $x_1\ x_3$
и геометрическая интерпретация функции $f_1(X)$ в системе координат $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

Координаты точки **максимума** $Y_1^* = \{y_1 = 46.7636, y_3 = 8.0\}$ (на рис. 6.8 обозначена как X1omax). Величина целевой функции h_1^*=FX1omax = 387.9.

Координаты точки **минимума** $X_1^0 = \{x_1 = 31.9, x_3 = 2.1\}$ (на рис. 6.8 обозначена как X1omin). Величина целевой функции F_1^0=FX1omin = 296.6.

Координаты точки $X^o = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$ (на рис. 6.8 обозначена как X1o0). Величина целевой функции $f_1(X^o)$ =FX1o0 = 364.0.

Точки оптимума: X_1^* с четырьмя параметрами рассчитаны на шаге 1 и величиной критерия $f_1^* = f_1\,(X_1^*) = -387.9$; точка X_1^0 с величиной критерия

$f_1^0 = f_1(X_1^0) = 296.6$ – на рисунке обозначены ($f_1^\Delta\,(X_1^*)$, $f_1^\Delta\,(X_1^0)$.

Линейная функция, соединяющая точки $f_1\,(X^o)$ и $f_1^\Delta\,(X_1^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_1\,(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

А в целом отрезки $f_1^\Delta\,(X_1^*)$ -$f_1\,(X^o)$- $f_1^\Delta\,(X_1^0)$ представляют геометрическую интерполяцию функции $f_1\,(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

9.2 этап. *Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП –* ***второй*** *характеристики структуры материала при проектировании в физических единицах*.

Вторая характеристика структуры материала $f_2(X)$ представлена в 6.1.4: $min\, f_2(X) \equiv 795.72 +23.89x_1 +30.866x_2 -25.8586x_3 -45.0026x_4 -0.7683x_1x_2 +0.4703x_1x_3 +0.7472x_1x_4 -0.1283x_2x_3 +0.3266x_2x_4 -0.0112x_3x_4 +0.0398x_1^2 +0.0365x_2^2 +3.2x_3^2 +2.6457x_4^2$, (6.32)

Представим геометрическую интерпретацию функцию $f_2(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1\ x_3\}$ и с постоянными координатами $\{y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки Y^o (6.49) на рис 6.9.

Координаты точки **максимума** $X_2^* = \{x_1 = 55.6, x_3 = 8.0\}$ (на рис. 6.9 обозначена как X2omax). Величина целевой функции F_2^*=FX2omax = 1361.4.

Координаты точки **минимума** $X_2^0 = \{x_1 = 31.9, x_3 = 2.1\}$ (на рис. 6.9 обозначена как X2omin). Величина целевой функции F_2^0=FX2omin = 2458.5.

Координаты точки $X^o = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$ (на рис. 6.9 обозначена как X2o0). Величина целевой функции $f_2\,(X^o)$ =FX2o0 = 1790.7.

Точки оптимума: X_2^* с четырьмя параметрами рассчитаны на шаге 1 и величиной критерия $f_2^* = f_2\,(X_2^*) = 1361.4$; точка X_2^0 с величиной критерия

$f_2^0 = f_2(X_2^0) = -2458.5$– на рисунке обозначены ($f_2^\Delta\,(X_2^*)$, $f_2^\Delta\,(X_2^0)$.

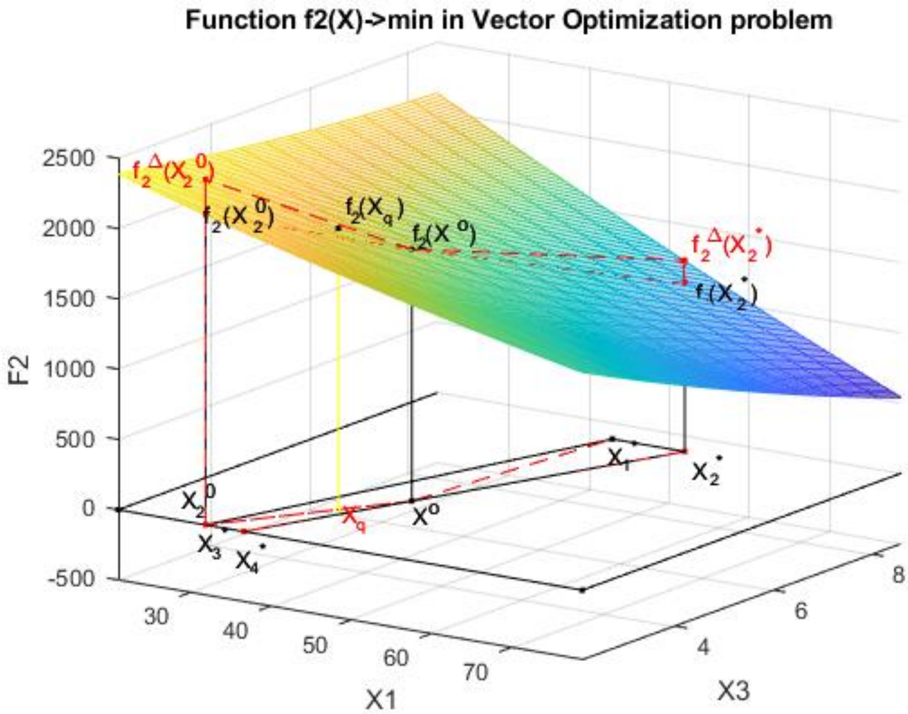

Рис. 6.9. Функция $f_2(X)$ в двухмерной системе координат $x_1\ x_3$
и геометрическая интерпретация функции $f_2(X)$ в системе координат $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

Линейная функция, соединяющая точки $f_2\ (X^o)$ и $f_2^{\Delta}\ (X_2^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_2\ (X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \ldots, x_4$. А в целом отрезки $f_2^{\Delta}\ (X_2^*)$ -$f_2\ (X^o)$- $f_2^{\Delta}\ (X_2^0)$ представляют геометрическую интерполяцию функции $f_2\ (X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \ldots, x_4$.

9.3 этап*. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП –* ***третьей*** *характеристики структуры материала при проектировании в физических единицах.*

Третья характеристика структуры материала $f_3(X)$ сформирована в 6.1.4:

$max\ h_3(Y)$≡$110.22 + 0.7918y_1 + 1.73y_2 - 0.3713y_3 - 2.20y_4 - 0.0132y_1y_2 - 0.008y_1y_3 + 0.0193y_1y_4 - 0.0172y_2y_3 + 0.0161y_2y_4 - 0.0006y_3y_4 - 0.0004y_1^2 - 0.0002y_2^2 + 0.0335y_3^2 + 0.124y_4^2\}$, (6.31)

Представим геометрическую интерпретацию функции $f_3(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1\ x_3\}$ и с постоянными координатами $y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки Y^o (6.49) на рис 6.10.

Координаты точки **максимума** $X_3^* = \{x_1 = 31.9, x_3 = 2.1\}$ (на рис. 6.10 обозначена как X3omax). Величина целевой функции F_3^*=FX3omax = 210.3.

Координаты точки **минимума** $X_3^0 = \{x_1 = 78.16, x_3 = 8.0\}$ (на рис. 6.10 обозначена как X3omin). Величина целевой функции f_3^0=FX3omin = 169.26.

Координаты точки $X^o = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$ (на рис. 6.10 обозначена как X3o0). Величина целевой функции $f_3\ (X^o)$ =FX3o0 = 194.3.

Точки оптимума: X_3^* с четырьмя параметрами рассчитаны на шаге 1 и величиной критерия $f_3^* = f_3\ (X_3^*)\ = -210.3$; точка X_3^0 с величиной критерия

$f_3^0 = f_3(X_3^0) =\ 169.26$ – на рисунке обозначены ($f_3^{\Delta}\ (X_3^*)$, $f_3^{\Delta}\ (X_3^0)$).

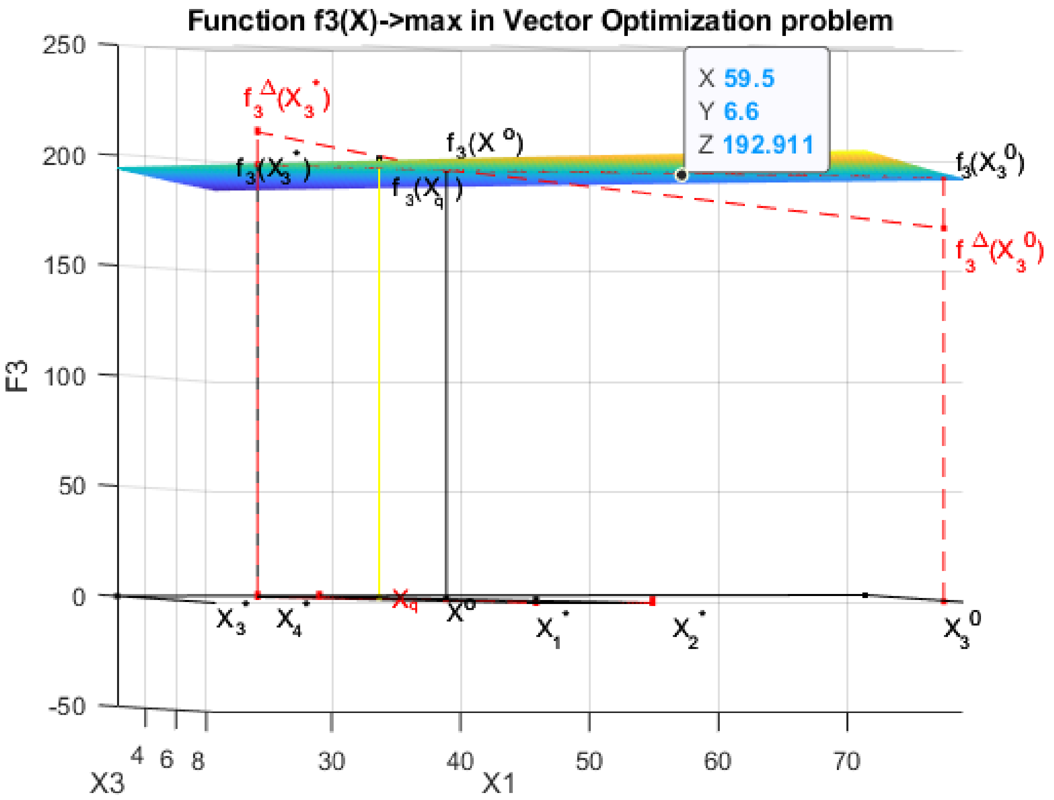

Рис. 6.10. Функция $f_3(X)$ в двухмерной системе координат $x_1\ x_3$ и геометрическая интерпретация функции $f_3(X)$ в системе координат $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

Линейная функция, соединяющая точки $f_3\ (X^o)$ и $f_3^{\Delta}\ (X_3^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_3\ (X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \ldots, x_4$.

А в целом отрезки $f_3^{\Delta}\ (X_1^*)$ -$f_3\ (X^o)$- $f_3^{\Delta}\ (X_3^0)$ представляют геометрическую интерполяцию функции $f_3\ (X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \ldots, x_4$.

***9.4 этап**. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – **четвертой** характеристики структуры материала при проектировании в физических единицах.*

Четвертая характеристика структуры материала $f_4(X)$ представлена в 6.1.4:

$max\ h_4(Y)$≡$21.004 - 0.0097y_1 - 0.841y_2 - 0.4326y_3 + 1.1723y_4 + 0166y_1y_2 + 0.085y_1y_3 - 0.0001y_1y_4 + 0.0523y_2y_3\ + 0.0002y_2y_4 + 0.0006y_3y_4 - 0.0022y_1^2 + 0.0035y_2^2 + 0.006y_3^2 - 0.0311y_4^2\}\}$, (6.33)

Представим геометрическую интерпретацию функции $f_4(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1\ x_3\}$ и с постоянными координатами $y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки Y^o (6.49) на рис. 6.11.

Координаты точки **максимума** $X_4^* = \{x_1 = 36.70, x_3 = 2.1\}$ (на рис. 6.11 обозначена как X4omax). Величина целевой функции F_4^*=FX4omax = 30.714.

Координаты точки **минимума** $X_4^0 = \{x_1 = 62.71, x_3 = 8\}$ (на рис. 6.11 обозначена как X4omin). Величина целевой функции F_4^*=FX4omin = -73.62.

Координаты точки $X^o = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$ (на рис. 6.11 обозначена как X4o0). Величина целевой функции $f_4\ (X^o)$ – FX4o0 = 47.5.

Точки оптимума: X_4^* с четырьмя параметрами рассчитаны на шаге 1 и величиной критерия $f_4^* = f_4\ (X_4^*)\ = 30.714$; точка X_4^0 с величиной критерия

$f_4^0 = f_4(X_4^0) = -73.62$– на рисунке обозначены ($f_4^\Delta\ (X_4^*)$, $f_4^\Delta\ (X_4^0)$).

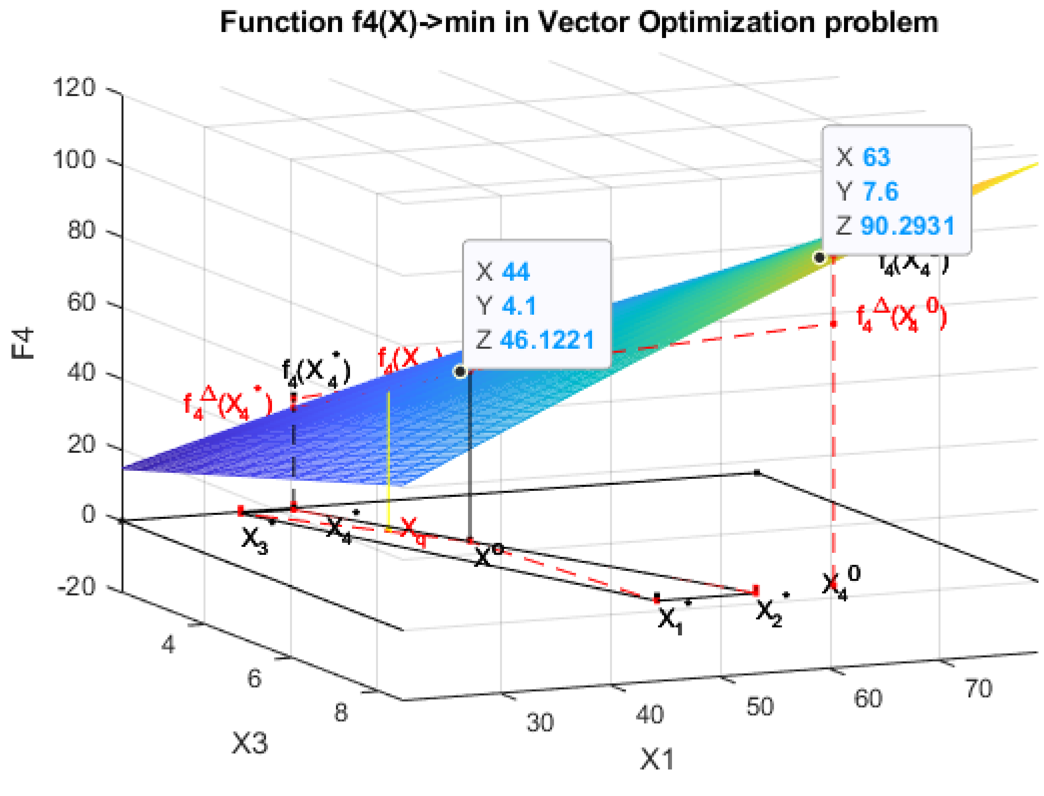

Рис. 6.11. Функция $f_4(X)$ в двухмерной системе координат $x_1\ x_3$ и геометрическая интерпретация функции $f_4(X)$ в системе координат $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

Линейная функция, соединяющая точки $f_4\ (X^o)$ и $f_4^\Delta\ (X_4^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_4\ (X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$. А в целом отрезки $f_4^\Delta\ (X_4^*)$ -$f_4\ (X^o)$- $f_4^\Delta\ (X_4^0)$ представляют геометрическую интерполяцию функции $f_4\ (X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

В совокупности, представлена версия программного обеспечения выдает следующие результаты: точка оптимума – X^o;

характеристики (критерии) – $F(X^o) = \{f_1(X^o), f_2(X^o), f_3(X^o), f_4(X^o)\}$;

относительные оценки – $\lambda(X^o) = \{\lambda_1(X^o), \lambda_2(X^o), \lambda_3(X^o), \lambda_4(X^o)\}$;

максимальную относительную оценку – λ^o, такую что $\lambda^o \leq \lambda_k\ (X^o)\ \forall k \in \boldsymbol{K}$.

точку оптимума с приоритетом *q*–го критерия – X^q;
характеристики (критерии) – $F(X^q) = \{f_1(X^q), f_2(X^q), f_3(X^q), f_4(X^q)\}$;
относительные оценки – $\lambda(X^o) = \{\lambda_1(X^q), \lambda_2(X^q), \lambda_3(X^q), \lambda_4(X^q)\}$;
максимальную относительную оценку λ^{oo}, такую что $\lambda^{oo} \leq p_k^q\, \lambda_k\, (X^q), k = \overline{1, K}$.

Заключение по разделу. Проблема разработки математических методов векторной оптимизации и принятия оптимального решения на их основе в сложной структуре материала по некоторому набору экспериментальных данных и функциональных характеристик является одной из важнейших задач системного анализа и проектирования. В работе разработана методология автоматизации проектирования путем: построения математической модели материала в условиях определенности и неопределенности; разработки методов решения векторной задачи и выбора оптимальных параметров материала по множеству характеристик.

7. Выбор оптимальных параметров технологического процесса в условиях определенности и неопределенности на базе многомерной математики. Компьютерная реализация.

7.1. ***Математическая модель для принятия оптимального управленческого решения в технологическом процессе***.

7.1.1. Построение математической модели технологического процесса в условиях определенности

В качестве объекта исследования инженерных систем мы используем «технологический процесс». Постановка проблемы принятия решений в технологии при производстве изделий выполнена в соответствии с [24].

Рассматривается технологический процесс (например, Гибридная лазерная дуговая сварка (HLAW) (Hybrid Laser Arc Welding (HLAW), [24], в которой сплав ZE41-T5 был выбран как материал, который нужно сварить с сплавом AZ61 как материал заполнителя). Деятельность технологического процесса зависит от определенного множества условий – конструктивных параметров:

$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}^T$, or $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$,

(например: мощности лазера, (laser power); скорости перемещения (travel speed); скорости подачи проволоки, (wire feed rate); тока, (current); частоты (frequency)). Обозначим $\boldsymbol{N}$ – множество конструктивных параметров. Каждый параметр технологического процесса лежит в заданных пределах: $x_j^{min} \leq x_j \leq\ x_j^{max}, j = \overline{1, N}$, или $X^{min} \leq X \leq X^{max}$,

где x_j^{min}, x_j^{max}, $\forall j \in \boldsymbol{N}$ – нижний и верхний пределы изменения вектора параметров технологического процесса, $\boldsymbol{N}$ – множество параметров.

Результат функционирования определяется набором критериев (технологических характеристик):

$F\ (X)\ = \{f_k\ (X), k = \overline{1, K}\}^T$, которые функционально зависят от конструктивных параметров технологического процесса $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$, (например: глубина сварного шва (weld depth); недозагрузка (underfill); процентный дефект (percentage defect); накопленная длина пор (total accumulated pore length)). В совокупности все технологические характеристики представляют вектор-функцию:

$F\ (X) = \{f_1\ (X), f_2\ (X), \ldots, f_K\ (X)\}^T$ или

$F\ (X) = \{f_k\ (X), k = \overline{1, K}\}^T$,

где $\boldsymbol{K}$, (K) – множество (число) технологических характеристик.

Множество технологических характеристик $\boldsymbol{K}$ подразделяется на подмножества $\boldsymbol{K_1}, \boldsymbol{K_2}$: $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K_1} \cup \boldsymbol{K_2}, \boldsymbol{K_1} \subset \boldsymbol{K}, \boldsymbol{K_2} \subset \boldsymbol{K}$.

$\boldsymbol{K_1}$ представляет подмножество технологических характеристик, числовые величины которых желательно получить, как можно выше:

$f_k\ (X) \to max, k = \overline{1, K_1}$.

$\boldsymbol{K_2}$ представляет подмножества технологических характеристик, числовые величины которых желательно получить, как можно ниже:

$f_k\ (X) \to min, k = \overline{1, K_2}$.

Математическая модель должна, во-первых, отражать цели технологического процесса, которые представлены характеристиками $F\,(X)$, во-вторых, учитывать ограничения $X^{min} \leq X \leq X^{max}$. Математическая модель технологического процесса, в целом решающего проблему выбора оптимальных параметров технологического процесса, представить в виде векторной задачи оптимизации.

$Opt\ F\ (X)\ =\ \{max\, F_1(X) = \{max\, f_k\ (X), k = \overline{1, K_1}\},$ (7.1)

$min\, F_2(X) = \{min\, f_k\ (X), k = \overline{1, K_2}\}\},$ (7.2)

при ограничениях:

$f_k^{min}\ \leq\ f_k(X) \leq f_k^{max}, k = \overline{1, K},$ (7.3)

$G(X) \leq 0, x_j^{min} \leq x_j \leq\ x_j^{max}, j = \overline{1, N},$ (7.4)

где $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ – вектор управляемых переменных (конструктивных параметров) технологического процесса;

$F(X) = \{f_k\ (X), k = \overline{1, K}\}$ –векторный критерий, каждая компонента которого представляет характеристику технологического процесса (7.1)- (7.2), функционально зависящую от вектора переменных X;

в (7.3) $G\ (X)\ = \{g_i\ (X), k = \overline{1, M}\}^T$ – вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование технологического процесса, $\boldsymbol{M}$ – множество ограничений. Ограничения определяются протекающими в них технологическими, физическими и тому подобными процессами и могут быть представлены функциональными ограничениями, например, $f_k^{min}\ \leq\ f_k(X) \leq f_k^{max}, k = \overline{1, K}$.

Предполагается, что функции $f_k(X), k = \overline{1, K}$ дифференцируемы и выпуклы, $g_i\ (X), i = \overline{1, M}$ непрерывны, а

$\boldsymbol{S} = \{X \in R^n | G(X) \leq 0, X^{min} \leq X \leq X^{max}\} \neq \emptyset.$

Соотношения (7.1)-(7.4) образуют математическую модель технологического процесса.

Требуется определить такой вектор параметров $X^o \in \boldsymbol{S}$, при котором каждая компонента вектор – функции:

$F_1(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K_1}\}$ принимает максимально возможное значение, а вектор – функция: $F_2(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K_2}\}$ принимает минимальное значение.

7.1.2. Математическая модель технологического процесса в условиях определенности и неопределенности в совокупности

Математическая модель технологического процесса (7.1)-(7.4) выполнена в условиях определенности. В реальной жизни условия определенности и неопределенности совмещаются. Модель технологического процесса так же должна отражать эти условия. Используя обозначения математической модели (7.1)-(7.2), преобразуем моделью (7.1)- (7.4) с учетом условий неопределенности, в итоге получим:

«Модель технологического процесса в условиях определенности и неопределенности»:

$Opt\ F\ (X)\ =\ \{max\, F_1(X) = \{max\, f_k\ (X), k = \overline{1, K_1^{def}}\},$ (7.5)

$max\, I_1(X) \equiv \{max\, y_k\ \ (X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\},$ (7.6)

$min\, F_2(X) = \{min\, f_k\ (X), k = \overline{1, K_2^{def}},$ (7.7)

$min\, I_2(X) \equiv \{min\, y_k\ \ (X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}\},$ (7.8)

ограничения $f_k^{min}\ \leq\ f_k(X) \leq f_k^{max}, k = \overline{1, K},$ (7.9)

$G(X) \leq 0, x_j^{min} \leq x_j \leq\ x_j^{max}, j = \overline{1, N},$ (7.10)

где $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ – вектор управляемых переменных (параметров) технологического процесса;

$F(X) = \{F_1(X)\ F_2(X)\ I_1(X)\ I_2(X)\}$ представляет векторный критерий, каждая компонента которого является вектором характеристик (критериев) технологического процесса (3.5*b*)- (3.8*b*), которые функционально зависят от дискретных значений вектора переменных X, где в (7.5) и (7.7) K_1^{def}, K_2^{def} (*definiteness*), а в (7.6) и (7.8) K_1^{unc}, K_2^{unc} (*uncertainty*) множество критериев max и min сформированные в условиях определенности и определенности.

7.2. Введение и методология моделирования, симуляция, принятие оптимальных решения по множеству критериев технологического процесса

7.2.1. Введение в моделирование, симуляцию и принятие оптимальных решения по множеству критериев в технологическом процессе.

В качестве объекта исследования нами рассматриваются «Инженерные системы», к которым относятся «технологические процессы», [18, 20-26]. Технологический процесс рассматривается с двумя параметрами и четырьмя характеристиками. Экспериментальные данные технологического процесса представим в виде задачи принятия решений:

$$F = \begin{vmatrix} x_{1,1}\ x_{2,1}\ f_1^1, \dots, f_1^K \\ \dots \\ x_{1,M}\ \ x_{2,M}\ f_M^1, \dots, f_M^K \end{vmatrix} \text{ – problem of 2-type, } K = 4.$$

Исследование инженерной системы (технологического процесса) выполнено:

во-первых, в условиях определенности, когда известны данные о функциональных характеристиках инженерной системы;

во-вторых, в условиях неопределенности, когда известны дискретные значения отдельных характеристик; также известны данные об ограничениях, которые накладываются на функционирование системы.

Используя регрессионный анализ экспериментальные данные F преобразуются в векторную задачу математического программирования:

$$max\ f_k(X, A) = a_{0k} + a_{1k}x_1 + a_{2k}x_1^2 + a_{3k}x_2 + a_{4k}x_2^2 + a_{5k}x_1x_2, k = \overline{1, K_1}.$$
$$min\ f_k(X, A) = a_{0k} + a_{1k}x_1 + a_{2k}x_1^2 + a_{3k}x_2 + a_{4k}x_2^2 + a_{5k}x_1x_2, k = \overline{1, K_2}.$$

При ограничениях $x_1^0 \le x_1 \le x_1^*, x_2^0 \le x_2 \le x_2^*$.

Математический аппарат моделирования инженерной системы базируется на теории и методах векторной оптимизации, которые представлены в предыдущих главах.

В организационном плане процесс моделирования и симулирования инженерной системы представлен в виде методологии: «Методология выбора оптимальных параметров инженерных систем в условиях определенности и неопределенности».

7.2.2. Методология выбора оптимальных параметров инженерных систем в условиях определенности и неопределенности

Методология включает ряд этапов.

1. Формирование технического задания (исходных данных) на численное моделирование и выбора оптимальных параметров системы. Исходные данные формирует конструктор, который проектирует техническую систему**.**

2. Построение математической и численной модели технической системы в условиях определенности и неопределенности.

3. Решение векторной задачи математического программирования (ВЗМП) – модели инженерной системы при равнозначных критериях.

4. Построение геометрической интерпретации результатов решения в трехмерной системе координат в относительных единицах.

5. Решение векторной задачи математического программирования – модели инженерной системы при заданном приоритете критерия.

6. Геометрическая интерпретация результатов решения в трехмерной системе координат в физических единицах.

Техническое задание, анализ результатов решения и выбора приоритетного критерия, его величины выполняется конструктором материала.

Остальные этапы выполняются математиком – программистом.

7.3. 1 этап. Техническое задание: Формирование математической и, на ее основе, численной модели технологического процесса.

Дано. Рассматривается технологический процесс, производственная деятельность которого определяется двумя параметрами $X = \{x_1, x_2\}$ – вектор (управляемых) переменных. Технологический процесс характеризуется четырьмя характеристиками (критериями):

$$F(X) = \{f_1\ (X), f_2\ (X), f_3\ (X), f_4\ (X)\}^T \quad (7.11)$$

величина оценки которых зависит от вектора параметров X.

Условия определенности. Эти условия характеризуются тем, что известна функциональная зависимость четвертой характеристики $f_4\,(X)$ от параметров технологического процесса $X = \{x_1, x_2\}$:

$$f_4\,(X) = -0.245\ -\ 0.747x_1\ +\ 0.3832x_1^2 + 0.0442x_2\ +\ 0.0012x_2^2\ -\ 0.0346x_1x_2 \quad (7.12)$$

Условия неопределенности. Эти условия характеризуются тем, что для первой, второй и третьей характеристики технологического процесса известны результаты экспериментальных данных: величины параметров и соответствующих характеристик. Значения числовых параметров X и характеристик $y_1\,(X), y_2\,(X), y_3\,(X)$, представлены в табл. 7.1.

Таблица 7.1.

Экспериментальные параметры ввода и вывода.

Laser Power, p (Analog V) Мощности лазера	**Travel Speed, v (mm/sec)** Скорости перемещения	**Wire Feed Rate, r (m/min)** Скорости подачи проволоки	**Depth, D (mm)** Глубина, Д (мм)	**Total Accumulated Pore Length, Po (mm/mm)** Общая накопленная длина пор
x_1	x_2	$y_1\,(X)\to max$	$y_2\,(X)\to min$	$y_3\,(X)\to max$
2.400	25.20	4.21970	55.39510	-0.0365
2.760	18.720	3.27140	31.24970	0.0286
2.760	19.080	3.27700	32.38860	0.0271
2.760	31.680	4.26130	86.85260	0.0760
2.760	31.920	4.29490	88.16560	0.0787
3.300	14.400	3.09590	21.13310	0.3467
3.300	25.200	3.01010	56.19130	0.2171
3.300	25.800	3.03830	58.75060	0.2138
3.300	26.760	3.09080	62.97940	0.2096
3.300	27.600	3.14410	66.81470	0.2068
3.300	28.800	3.23200	72.51260	0.2041
3.300	30.000	3.33380	78.46820	0.2032
3.300	31.200	3.44950	84.68120	0.2039
3.300	32.400	3.57920	91.15180	0.2063
3.300	36.000	4.05170	112.10860	0.2236
3.840	18.720	3.09830	35.30820	0.6402
3.840	23.520	2.96710	51.64580	0.5450
3.840	31.680	3.25540	88.87580	0.4451
3.840	32.880	3.35200	95.35510	0.4369
4.200	25.200	3.23700	60.46330	0.7810
Min: 2.400	14.40	2.96710	21.13310	-0.0365
Max: 4.200	36.00	4.29490	112.10860	0.7810

В решении принимаемом ЛПР, величину оценки по первой и третьей характеристики (критерия) желательно, получить как можно выше, второй и четвертой как можно ниже:

$y_1\,(X)$→**max**, $y_2\,(X)$→**min,** $y_3\,(X)$→**max**, $y_4\,(X)$→**min**.

Параметры X=$\{x_1, x_2\}$ изменяются в следующих пределах:

$2.0 \le x_1 \le 3.5$, $12.0 \le x_2 \le 30.0$. (7.13)

Требуется. Построить математическую модель технологического процесса в виде векторной задачи. Решить векторную задачу с равнозначными критериями. Выбрать приоритетный критерий. Установить численное значение приоритетного критерия. Принять наилучшее (оптимальное) решение.

Примечание. Автором разработано программное обеспечение для четырех параметров: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ и шести характеристик

$F(X) = \{f_1(X), f_2(X), \dots, f_6(X)\}^T$. На каждую задачу программа настраивается индивидуально. При желании автор может увеличить количество параметров до пяти: X=$\{x_1, \dots, x_2\}$. В модели критерии с условиями неопределенности могут изменяться от нуля до шести.

7.4. 2 этап. Формирование математической и численной модели технологического процесса

7.4.0. Формирование математической модели технологического процесса.

Разработка математической *«Модели технологического процесса в условиях определенности и неопределенности»* в виде векторной задачи оптимизации (7.5)-(7.10) представлена в разделе 7.1.2.

7.4.1. Построение модели технологического процесса в условиях определенности с числовыми данными.

Построение модели технологического процесса с функциональной зависимостью определяется тем, что известны характеристики и ограничения от параметров $X = \{x_1, x_2\}$. В тестовом примере известны характеристика (7.12) и ограничения (7.13). Используя данные (7.12), (7.13) построим однокритериальную задачу нелинейного программирования в условиях определенности, [25, 26]:

$$f_4(X) = -0.245 - 0.7470x_1 + 0.3832x_1^2 + 0.0442x_2 + 0.0012x_2^2 - 0.0346x_1x_2. \quad (7.14)$$

$$2.0 \le x_1 \le 3.5,\ 12.0 \le x_2 \le 30.0. \quad (7.15)$$

В дальнейшем информационные данные (7.14), (7.15) используются при построении агрегированной математической технологического процесса.

7.4.2. Преобразование условий неопределенности (экспериментальных данных) в условия определенности и построение численной модели

Построение модели с условиями неопределенности состоит в использовании качественных и количественных описаний технологического процесса, которые получены как “вход-выход” и представлены в таблице 7.1.

Исходные данные таблицы 2: $f_1(x_i, i = \overline{1, M}), f_2(x_i, i = \overline{1, M}), f_3(x_i, i = \overline{1, M})$ преобразуются путем использования математических методов (регрессионного анализа) в функциональный вид: $f_1(X), f_2(X), f_3(X)$.

В системе MATLAB исходные данные таблицы 2 сформированы в виде матрицы I:

$$I = |X, Y| = \begin{vmatrix} X_1 = x_{11}, x_{12}, f_1(X_1), f_2(X_1), f_3(X_1) \\ \dots \\ X_M = x_{M1}, x_{M2}, f_1(X_M), f_2(X_M), f_3(X_M) \end{vmatrix}. \quad (7.16)$$

Для экспериментальных данных $y_k, k = \overline{1,3}$ строится функция регрессии методом наименьших квадратов $\min \sum_{i=1}^{M} (y_i - \overline{y_i})^2$ в системе MATLAB. Формируется полином A_k, определяющий взаимосвязь параметров $X_i = \{x_{1i}, x_{2i}\}$ и функции:

$$\overline{y_{ki}} = f(X_{ki}, A_k), X_{ki} = \{x_{ki}, x_{ki}\}, k = \overline{1,3}. \quad (7.17)$$

Результатом вычислений является система коэффициентов

A_k=$\{A_{0k}, A_{1k}, \dots, A_{5k}\}$,

которые характеризуют коэффициенты полинома (функции):

$$f_k(X, A) = a_{0k} + a_{1k}x_1 + a_{2k}x_1^2 + a_{3k}x_2 + a_{4k}x_2^2 + a_{5k}x_1x_2, k = \overline{1,3}. \quad (7.18)$$

Для определения коэффициентов полинома (7.19) функций, таблицы 7.1, разработано программное обеспечение полиномиальной аппроксимации с двумя переменными и пятью факторами. В результате работы программы получены коэффициенты:

Ao= [11.4751 8.8173 -0.1222
-4.8994 -7.6807 -0.3735
0.8868 2.1456 0.1916
-0.0030 0.1851 0.0221
0.0048 0.0894 0.0006
-0.0595 -0.1454 -0.0173]. (7.19)

С учетом полученных коэффициентов Ao (1) (7.19) экспериментальные данные $\{x_{1i}, x_{2i}, y_{1i}, i = \overline{1, M}\}$ матрицы $I = |X, Y|$ (7.16) преобразуются в функцию $f_1(X)$ в форме (7.19).

С учетом полученных коэффициентов Ao (1) (7.19) экспериментальные данные$\{x_{1i}, x_{2i}, y_{2i}, i = \overline{1,M}\}$ матрицы $I = |X, Y|$ (7.16) преобразуются в функцию $f_2(X)$ в форме (7.19).

С учетом полученных коэффициентов Ao (1) (7.19) – экспериментальные данные $\{x_{1i}, x_{2i}, y_{3i}, i = \overline{1,M}\}$ матрицы $I = |X, Y|$ (7.16) преобразуются в функцию $f_3(X)$.

В итоге экспериментальные данные матрицы $I = |X, Y|$ (7.16) сформированы с учетом целенаправленности в векторную задачу математического программирования:

$$f_1(X) = 11.474 - 4.899x_1 + 0.88680x_1^2 - 0.003x_2 + 0.00480x_2^2 - 0.05950x_1x_2. \quad (7.20)$$

$$f_2(X) = 8.8176 - 7.6809x_1 + 2.1456x_1^2 + 0.1851x_2 + 0.0894x_2^2 - 0.1454x_1x_2. \quad (7.21)$$

$$f_3(X) = -0.1225 - 0.3735x_1 + 0.1916x_1^2 + 0.0221x_2 + 0.0006x_2^2 - 0.0173x_1x_2.$$

$$2.0 \leq x_1 \leq 3.5,\ 12.0 \leq x_2 \leq 30.0. \quad (7.22)$$

7.4.3. Компьютерная (числовая) модель технологического процесса с агрегированными данными эксперимента в условиях определенности

Построение общей модели, включающей условия определенности и неопределенности.

Для построения общей числовой (компьютерной) модели технологического процесса используем: функции, которые получены условиях определенности (7.14) и неопределенности (7.20), (7.21), (7.22); параметрические ограничения (7.5).

Эти функции (7.20), (7.21), (7.22) рассматриваем как критерии, характеризующие целенаправленность функционирования технологического процесса. Из подмножества два критерия $K_1 = 2$ направлены на максимизацию $\{f_1(X), f_3(X)\} \rightarrow \max$, а подмножество критериев $K_2 = 2$ направлены на минимизацию: $\{f_2(X), f_4(X)\} \rightarrow \min$, $K = K_1 \cup K_2$.

Критерии $K = K_1 \cup K_2$ дополняются ограничениями и формируется математическую численная модель функционирования технологического процесса, представленной векторной задачей математического программирования

$$Opt\ F(X) = \{max\ F_1(X) = \{max\ f_1\ (X) \equiv 11.474 - 4.899x_1 + 0.8868x_1^2 - 0.0030x_2 + 0.0048x_2^2 - 0.0595x_1x_2, \quad (7.23)$$

$$max\ f_3\ (X) \equiv -0.1225 - 0.3735x_1 + 0.1916x_1^2 + 0.0221x_2 + 0.0006x_2^2 - 0.0173x_1x_2, \quad (7.24)$$

$$min\ F_2(X) = \{min\ f_2\ (X) \equiv 8.8176 - 7.6809x_1 + 2.1456x_1^2 + 0.1851x_2 + 0.0894x_2^2 - 0.1454x_1x_2, \quad (7.25)$$

$$min\ f_4(X) \equiv -0.2450 - 0.7470x_1 + 0.3832x_1^2 + 0.0442x_2 + 0.0012x_2^2 - 0.0346x_1x_2\}\}, \quad (7.26)$$

ограничения $2.0 \leq x_1 \leq 3.5$, $12.0 \leq x_2 \leq 30.0$, (7.27)

Векторная задача (7.23)- (7.27) представляет численную модель для принятия оптимального решения в условиях определенности и неопределенности в совокупности.

7.4.4. Программное обеспечение решения векторной задачи нелинейного программирования при равнозначных критериях и заданном приоритете критерия

Для решения векторной задачи нелинейного программирования (ВЗНП) (2.1)- (2.4) при равнозначных критериях разработана программа в системе MATLAB, которая, по существу, представляет программу – шаблон для написания и решения других векторных задач нелинейного программирования (2.1)- (2.4) – математических моделей инженерных систем, [30, 44].

7.5. 3 этап. Принятие оптимального решения в двухпараметрической четырехмерной модели технологического процесса (the process of simulation of a engineering system)

7.5.1. Компьютерное моделирование технологического процесса при равнозначных критериях

Решается векторная задача математического программирования (7.23)-(7.27) по каждому критерию отдельно. Для решения векторной задачи оптимизации (7.23)-(7.27) при равнозначных критериях используем метод решения, основанный на нормализации критериев и принципе гарантированного результата, представленный в разделе 4. Решение задачи (7.23)-(7.27) с равнозначными критериями представим как последовательность шагов.

Шаг 1. Для решения векторной задачи (7.23)-(7.27) по каждому критерию отдельно, при этом используется функция *fmincon* (…) системы MATLAB.

В результате расчета по каждому критерию получаем точки оптимума: X_k^* и $f_k^* = f_k\,(X_k^*)$, $k = \overline{1,K}$ $\boldsymbol{K}$=4 – величины критериев в этой точке, (наилучшее решение по каждому критерию):

$X_1^* = \{x_1 = 2., x_2 = 30.\}, f_1^* = f_1\,(X_1^*) \;=\; -5.8833;$
$X_2^* = \{x_1 = 3.5, x_2 = 30.\}, f_2^* = f_2(X_2^*) = \;-78.9641;$
$X_3^* = \{x_1 = 3.5, x_2 = 12.\}, f_3^* = \; f_3\,(X_3^*) \;=\; -0.5423;$
$X_4^* = \{x_1 = 2.9, x_2 = 12.\}, f_4^* = f_4(X_4^*) = \;-0.3334.$ (7.28)

Точки оптимума $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$ (7.29) в ограничениях (7.27) в координатах $\{x_1,\ x_2\}$ представлены на рис 7.1.

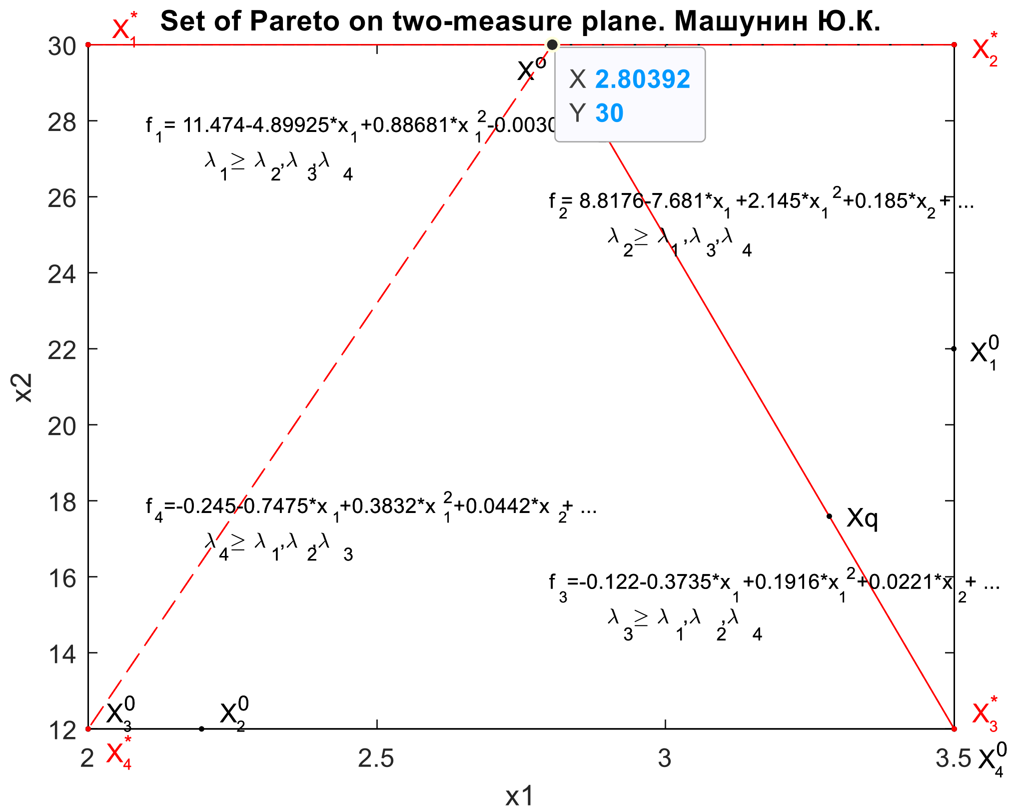

Рис. 7.1. Множество Парето, $S^o \subset S$, точки оптимума $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$, и оптимальная точка X^o в двухмерной системе координат $\{x_1,\ x_2\}$.

Допустимое множество точек $\boldsymbol{S}$ не пусто и представляет собой компакт:

$\boldsymbol{S}=\{X\in\boldsymbol{R}^N \mid 2.0 \le x_1 \le 3.5,\ 12 \le x_2 \le 30\} \ne \emptyset.$

Множество точек $\boldsymbol{S^o}$ представляет область множества точек, которые лежат меду точками оптимума $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$. В данной задаче множество допустимых точек $\boldsymbol{S}$ и множество точек, оптимальных по Парето, $\boldsymbol{S^o}$, равны между собой: $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S^o}$.

Ш а г 2. Решается векторная задача математического программирования (7.23)-(7.27) для вычисления наихудшей величины каждого критерия: Y_k^0 и $h_k^0 = h_k\,(Y_k^0), k = \overline{1,K}, \boldsymbol{K}$=4, которые представляют антиоптимум решения первого шага. (Верхний индекс ноль). При этом решается ВЗМП (7.23)- (7.27) для каждого критерия $k = \overline{1,K_1}$ на минимум, и для критериев $k = \overline{1,K_2}$ на максимум. Как результ решения получим: точку оптимума $X_k^0 = \{x_j, j = \overline{1,N}\}$ по соответствующему критерию $k = \overline{1,K}$; $f_k^0 = f_k\,(X_k^0)$ – величину k-го критерия в точке, $X_k^0, k = \overline{1,K}$:

$$X_1^0 = \{x_1 = 3.5, x_2 = 2.005\}, f_1^0 = f_1\,(X_1^0) \;=\; 2.8663;$$
$$X_2^0 = \{x_1 = 2.195, x_2 = 12.0\}, f_2^0 = \; f_2\,(X_2^0) \;=\; 13.56$$
$$X_3^0 = \{x_1 = 2., x_2 = 12.\}, f_3^0 = (X_3^0) = -0.1667;$$

$X_4^0 = \{x_1 = 3.5, x_2 = 12.\}, f_4^0 = f_4\ (X_4^0) = -1.0847.$ (7.29)

Ш а г 3. Системный анализ множества точек, оптимальных по Парето выполняется. Для этого в точках оптимума $X^* = \{X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*\}$ определяются величины целевых функций $F\ (X^*) = \|f_q\ (X_k^*)\|_{q=\overline{1,K}}^{k=\overline{1,K}}$,; вычисляется вектор $D = (d_1\ d_2\ d_3\ d_4)^T$ отклонений по каждому критерию на допустимом множестве $\boldsymbol{S}$: $d_k = f_k^* - f_k^0, k = \overline{1,4}$,

$$F\ (X^*) = \left\|\begin{matrix} 5.88 - 79.32 - 0.062\ 0.123 \\ -3.17 - 78.96\ 0.32\ 0.607 \\ -3.34 - 17.20 - 0.54\ 1.08 \\ -4.45 - 13.6\ 0.166 - 0.33 \end{matrix}\right\|, d_k = \left\|\begin{matrix} 3.017 \\ 65.4 \\ 0.70 \\ 1.418 \end{matrix}\right\| \qquad (7.30)$$

и матрица относительных оценок:

$\lambda\ (X^*) = \|\lambda_q\ (X_k^*)\|_{q=\overline{1,K}}^{k=\overline{1,K}}$, где $\lambda_k\ (X) = (f_k^* - f_k^0)/d_k$.

$$\lambda\ (X^*) = \left\|\begin{matrix} 1.000\ 1.0056\ 0.3234\ 0.6776 \\ 0.1017\ 1.000\ 0.6636\ 0.3364 \\ 0.1593\ 0.0557\ 1.000\ 0.0 \\ 0.5251\ 0.0013\ 0.0\ 1.000 \end{matrix}\right\|. \qquad (7.31)$$

Проведенный анализ величин критериев (7.30) в относительных оценок (7.31) показывает, что в точках оптимума $X^* = \{X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*\}$ (по диагонали) относительная оценка равна единице. Остальные критерии в $X^* = \{X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*\}$ значительно меньше единицы. Требуется найти такую точку (параметры), при которых относительные оценки наиболее близки к единице. На решение этой проблемы направлено решение λ-задачи.

Ш а г 4. Формирование λ-задачи осуществляется в два этапа: первоначально строится максиминная задача оптимизации с нормализованными критериями:

$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{X\in S}\boldsymbol{min}_{k\in K}\lambda_k\ (X).$ (7.32)

На втором этапе максиминная задача (7.32) преобразуется в стандартную (однокритериальную) задачу математического программирования, названной λ-задача:

$\lambda^o = max\ \lambda$, (7.33)

Ограничения $\lambda - (11.4745 - 4.8992x_1 + 0.8868x_1^2 - 0.0030x_2 + 0.0048x_2^2 - 0.0595x_1x_2 - f_1^0)/\ d_1 \le 0$, (7.34)

$\lambda - (-0.1225 - 0.3735x_1 + 0.1916x_1^2 + 0.0221x_2 + 0.0006x_2^2 - 0.0173x_1x_2 - f_2^0)/\ d_2 \le 0$, (7.35)

$\lambda - (8.8176 - 7.6809x_1 + 2.1456x_1^2 + 0.1851x_2 + 0.0894x_2^2 - 0.1454x_1x_2 - f_3^0)/\ d_3 \le 0$, (7.36)

$\lambda - (-0.2450 - 0.7470x_1 + 0.3832x_1^2 + 0.0442x_2 + 0.0012x_2^2 - 0.0346x_1x_2 - f_4^0)/\ d_4 \le 0$, (7.37)

$2.0 \le x_1 \le 3.5,\ 12.0 \le x_2 \le 30.0.$ (7.38)

Вектор неизвестных в задаче (7.33)- (7.38) имеет размерность N+1: $\boldsymbol{X}=\{x_1, x_2, \lambda\}$, N=2.

Шаг 5. Решение λ-задачи. Для решения λ-задачи используем функцию fmincon (…):

[Xo,Lo]=fmincon ('Z_TS_2Krit_L',X0,Ao,bo,Aeq,beq,lbo,ubo,'Z_TS_LConst',options). Как результат решения задача математического программирования (7.23)- (7.27) при равнозначных критериях и соответствующей ей λ-задачи (7.33)- (7.38) получили:

$\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\} = \{X^o = \{x_1 = 2.8, x_2 = 30, \lambda^o = 0.354\}\}$ (7.39)

точку оптимума, которая определяет конструктивные параметры технологического процесса. Оптимальная точка $\boldsymbol{X^o}$ представлена на рисунке 7.1;

$f_k\ (X^o), k = \overline{1,K}$ представляют величины критериев – характеристик технологического процесса:

$f_1(X^o) = 3.934, f_2(X^o) = 77.93, f_3(X^o) = 0.084, f_4(X^o) = 0.168;$ (7.40)

$\lambda_k(X^o), k = \overline{1,K}$ – это величины относительных оценок

$\lambda_1(X^o)$=0.3541, $\lambda_2(X^o)$=0.9842, $\lambda_3(X^o)$=0.3541, $\lambda_4(X^o)$=0.6459); (7.41)

λ^o = 0.3541 – максимальный нижний уровень среди всех относительных оценок, измеренный в относительных единицах: λ^o=min{$\lambda_1(X^o)$, $\lambda_2(X^o)$, $\lambda_3(X^o)$, $\lambda_4(X^o)$},

λ^o – также называют гарантированным результатом в относительных единицах, т. е. $\lambda_k(X^o)$ и соответственно характеристики технологического процесса $\lambda_k(X^o)$ нельзя улучшить, не ухудшая при этом другие характеристики.

В соответствии с теоремой 1, в точке $\boldsymbol{X^o}$ (7.39) критерии 1, 3 противоречивы. Противоречие определяется равенством:

$\lambda_1(X^o)= \lambda_3(X^o)= \lambda^o = 0.3541$,

а остальные критерии неравенством $\{\lambda_2(X^o)= 0.9842,\ \lambda_4(X^o)= 0.6459\}>\lambda^o$.

В задаче с двумя критериями выполняется равенство:

$\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_p(X^o), q, p \in \boldsymbol{K}, X \in S$,

а для других критериев определяется как неравенство:

7.6. 4 этап. Геометрическая интерпретация результатов решения в трехмерной системе координат и в относительных единицах

Допустимое множество точек S, образованных ограничениями (7.27), и точки оптимума $X^* = \{X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*\}$, показаны на рисунке 7.1, объединенные в контур. Точки представляют множество точек, оптимальных по Парето, $S^o \subset S$. Координаты этих точек, а также характеристики технологического процесса в относительных единицах $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3(X), \lambda_4(X)$, показаны на рис. 7.2 в трех мерном пространстве x_1, x_2 и λ, где третья ось λ – относительная оценка.

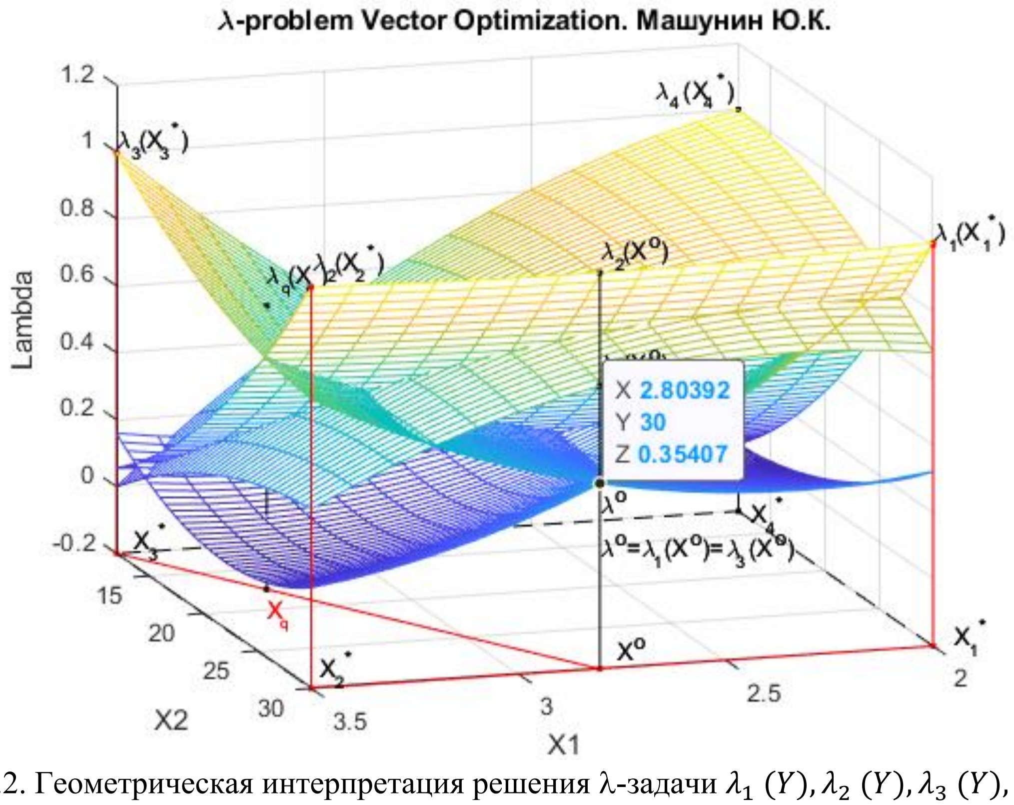

Рис. 7.2. Геометрическая интерпретация решения λ-задачи $\lambda_1(Y), \lambda_2(Y), \lambda_3(Y), \lambda_4(Y)$ в трехмерной системе координат x_1, x_2 и λ

7.7. 5 этап. Решение ВЗМП, представляющей компьютерную модель технологического процесса, с приоритетом критерия (обратная задача).

Решение векторных задач (7.23)-(7.27) основано на аксиоматике нормализации критериев и принципе гарантированного результата, а также аксиоматике приоритета критерия, вытекающие из аксиомы 2, 3 и принципа оптимальности 2, которые представлены в разделе 3.

Лицом, принимающим решения является конструктор технологического процесса**.**

Шаг 1. Решается векторная задача (7.23)-(7.27) при равнозначных критериях, алгоритм решения которой рассмотрен в главе 3. Численные результаты решения векторной задачи (7.23)- (7.27) представлены выше.

Множество точек Парето $S°\subset S$ лежит между точками оптимума $\{X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*\}$. Информация, полученная в результате решения при равнозначных критериях, является основой для дальнейшего исследования структуры множества Парето.

Если результаты решения векторной задачи с равнозначными критериями не удовлетворяют лицо, принимающее решение, то выбор оптимального решения осуществляется из какого-либо подмножества точек $S_1^o, S_2^o, S_3^o, S_4^o$.

***Шаг** 2. Выбираем приоритетный критерий $q \in \boldsymbol{K}$.*

Из теоремы 2 вытекает, что в оптимальной точке X^o всегда имеется два наиболее противоречивых критерия, $q \in \boldsymbol{K}$ и $v \in \boldsymbol{K}$, для которых в относительных единицах выполняется точное равенство:

$\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_v(X^o), q, v \in \boldsymbol{K}, X \in \boldsymbol{S},$

а для остальных выполняется неравенства:

$\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), \forall k \in \boldsymbol{K}, q \neq v \neq k.$

Для решения этой проблемы на экран выдаются характеристики (показатели) технологического процесса (7.40), полученные при равнозначных критериях в точке X^o:

$F\,(X^o) = \{\, f_1(X^o) = \ 3.9345, f_2(X^o) = \ 77.9319, f_3(X^o) = 0.0844, f_4(X^o) = 0.1687\}$ – в натуральных показателях;

$\lambda\,(X^o) = \{\,\lambda_1(X^o) = \ 0.3541,\ \lambda_2(X^o) = \ 0.9842,\ \lambda_3(X^o) = \ 0.3541,\ \lambda_4(X^o) = \ 0.6459\}$ – в относительных оценках.

Анализируя $\lambda\,(X^o)$ видим, что наиболее противоречивыми критериями являются первый и третий:

$\lambda^o = \lambda_1(X^o) = 0.3541, \lambda_3(X^o) = 0.3541,$ (7.42)

Из анализа рис. 7.2 выберем наиболее противоречивые критерии: первый $\lambda_1(X)$, третий $\lambda_3(X)$ и представим на рис. 7.3. Покажем на рис. 7.3 относительные оценки (7.42) $\lambda_1(X^o)$, $\lambda_3(X^o)$.

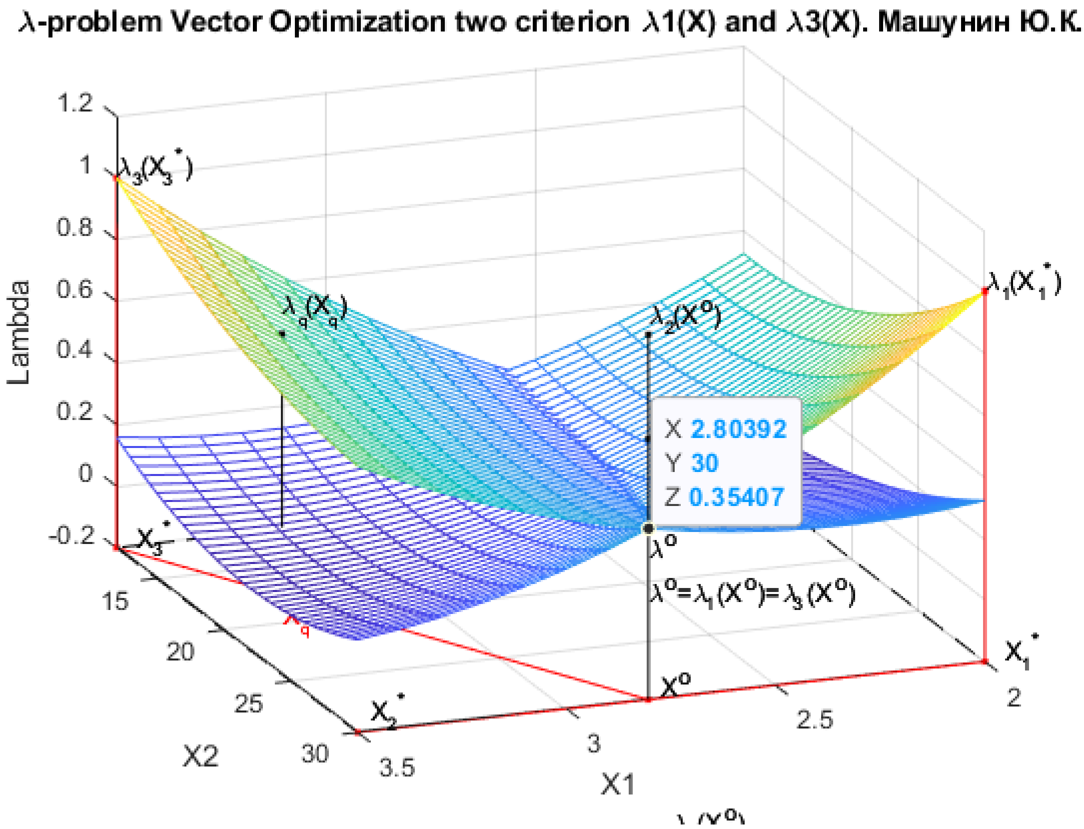

Рис. 7.3. Геометрическая интерпретация решения λ-задачи (7.23)- (7.27) с критериями: $\lambda_1\,(Y), \lambda_3\,(Y)$ в координатах x_1, x_2 λ. В точке оптимума X^o $\lambda_1(X^o) = \lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o)$=0. 3542

Из этой пары противоречивых критериев $\lambda_1(X^o)$, $\lambda_3(X^o)$ выбирается критерий, который ЛПР хотел бы улучшить. Выбранный критерий называется «приоритетным критерием», обозначим его $q=3\in\boldsymbol{K}$. Выбранный критерий исследуется во взаимодействии с первым критерием $k=1\in\boldsymbol{K}$.

На дисплей выдается сообщение: q=input ('Введите приоритетный критерий (номер) q= ') – Ввели: q=3.

Шаг 3. *Формируются числовые пределы изменения величины приоритета критерия $q=3\in\boldsymbol{K}$.*

Для критерия $q=3\in\boldsymbol{K}$ определяются изменения числовых пределов в натуральных единицах при переходе из точки оптимума X^o в точку X_q^*, полученную на первом шаге.

Данные о критерии q=3 выдаются на экран:

$$f_q(X^o) = -0.084354 \leq f_q\ (X) \leq -0.54235\ =\ f_q\ (X_q^*), q\ =\ 3\in\boldsymbol{K}. \quad (7.43)$$

Критерий $q=3$ в относительных единицах изменяется в следующих пределах:

$$\lambda_q(X^o) = 0.35407 \leq \lambda_q(X) \leq 1 = \lambda_q\left(X_q^*\right), q\ =\ 3\in\boldsymbol{K}. \quad (7.44)$$

Выражения (7.43) и (7.44) выдаются на дисплей для анализа.

Шаг 4. *Лицом принимающем решения* выбирается величина приоритетного критерия $q\in\boldsymbol{K}$. (Decision-making).

На сообщение: «Введите величину приоритетного критерия fq=» – вводим, например, f_q=0.3.

Шаг 5. *Вычисляется относительная оценка для f_q*=0.3.

Для величины приоритетного критерия f_q=0.3 вычисляется относительная оценка:

$$\lambda_q = \frac{f_q - f_q^0}{f_q^* - f_q^0} = \frac{0.3 - (-0.1667)}{0.5435 - (-0.1667)} = 0.6582. \quad (7.45)$$

λ_q при переходе от точки X^o к X_q^* лежит в пределах:

$$\lambda_q(X^o) = 0.35407 \leq \lambda_q(X) = 0.65821 \leq 1 = \lambda_q\left(X_q^*\right), q\ =\ 3\in\boldsymbol{K}.$$

Шаг 6. Вычисляем коэффициент линейной аппроксимации ρ.

Предполагаем линейный характер изменения критерия $f_q\ (X)$ в (7.43) и соответственно относительной оценки $\lambda_q(X)$, используя стандартные приемы линейной аппроксимации, вычислим коэффициент пропорциональности между $\lambda_q(X^\circ), \lambda_q$, который назовем ρ:

$$\rho\ =\ \frac{\lambda_q - \lambda_q\ (X^o)}{\lambda_q^* - \lambda_q^0} = \frac{0.6582 - 0.3507}{1 - 0.3507} = 0.4708, q\ =\ 3\ \in\ \boldsymbol{K}.$$

Шаг 7. Вычисляем координаты приоритета критериев с размерностью f_q.

Определим координаты точки, предполагая линейный характер изменения вектора $X_q = \{x_1, x_2\}$, q=3 с размерностью fq =0.3 с относительной оценкой λ_q:

$$X_q = \{x_1^q = x_1^o + \rho\ (x_q^*\ (1) - x_1^o), \dots,$$

$$x_N^q = x_N^o + \rho\ (x_q^*\ (N) - x_N^o)\}, \quad (7.46)$$

где $X^o = \{x_1^o, \dots, x_N^o\}$, $X_q^* = \{x_q^*\ (1), \dots, x_q^*\ (N)\}$.

$X^o = \{x_1^o$= 2.8039, x_2^o= 30.0$\}$, $X_q^* = \{x_q^*\ (1)$=3.5, $x_q^*\ (2)$=12.0$\}$.

В результате решения (7.46) получим точку с координатами:

$X_q = \{x_1$= 3.1317, x_2=21.5248$\}$. (7.47)

Шаг 8. Вычисление главных показателей точки X_q.

Для рассчитанной точки X_q (7.47), вычислим:

1) все критерии в натуральных единицах $F^q = \{f_k\left(X_q\right), k\ =\ \overline{1, K}\}$,

$F^q = \{f_1\left(X_q\right) =\ 2.977, f_2\left(X_q\right) =\ 41.41, f_3\left(X_q\right) =\ 0.174, f_4\left(X_q\right) =\ 0.3489\}$;

2) все критерии в относительных единицах с приоритетом критерия:

$\lambda^q = \{\lambda_k^q, k = \overline{1, K}\}, \lambda_k\ (X_q) = \frac{f_k\ (X_q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}$, $\lambda_k\left(X_q\right) = \{\lambda_1\ (X_q) = 0.0369, \lambda_2\ (X_q) =\ 0.4258, \lambda_3\ (X_q) =\ 0.4811, \lambda_4\ (X_q) =\ 0.52\}$;

3) минимальную относительную оценку: min ($\lambda_k\ (X^q)$) = 0.0847;

4) вектор приоритетов $P^q = \{p_k^q = \frac{\lambda_q\,(X_q)}{\lambda_k\,(X_q)}, k = \overline{1,K}\}$,

$P^q = \{p_1^3 = 6.2789,\ p_2^3 = 17.94,\ p_3^3 = 1.0,\ p_4^3 = 0.91]$.

По аналогии можно вычислить любую точку множества Парето:

$\boldsymbol{X_t^o} = \{\boldsymbol{\lambda_t^o}, \boldsymbol{X_t^o}\} \in \boldsymbol{S^o}$.

Step 9. Analysis of the results of the solution of the process model represented by the vector problem from the current of symmetry

In the considered vector problem of nonlinear programming with four heterogeneous criteria – the model of the technological system and the corresponding numerical variant (7.23)- (7.27) and built on its basis λ-problems (7.33)- (7.38) we obtained the optimum point X^o and the maximum relative estimate λ^o:

$\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\} = \{X^o = \{x_1 = 2.8039, x_2 = 30.0, \lambda^o = 0.3541\}\}$;

At the optimum point X^o the criteria in natural units are:

$F(X^o) = \{f_1(X^o) = 3.9345, f_2(X^o) = 77.9319, f_3(X^o) = 0.0844, f_4(X^o) = 0.1687\}$,

and relative units:

$\lambda(X^o) = \{\lambda_1(X^o) = 0.3541, \lambda_2(X^o) = 0.9842, \lambda_3(X^o) = 0.3541, \lambda_4(X^o) = 0.6459\}$;.

This result confirms the proofs of theorem 1 about the most contradictory criteria in the vector optimization problem, i.e.

$\lambda^o = \lambda_1(X^o) = \lambda_3(X^o) = 0.3541, \{1, 3\} \in \boldsymbol{K}, X^o \in \boldsymbol{S}.$

The rest of the criteria in relative units lie within:

$\{\lambda_2(X^o) = 0.9842, \lambda_4(X^o) = 0.6459\} > \lambda^o$.

Theoretically, the point $X^o$is the center of symmetry. Indeed, the X^o point lies between the points of the optimum X_1^* and X_3^* obtained for each criterion (step 1), in which $\lambda_1(X_1^*)$=1, $\lambda_3(X_3^*) = 1$. Let's show geometrically symmetry in Figure 7.4.

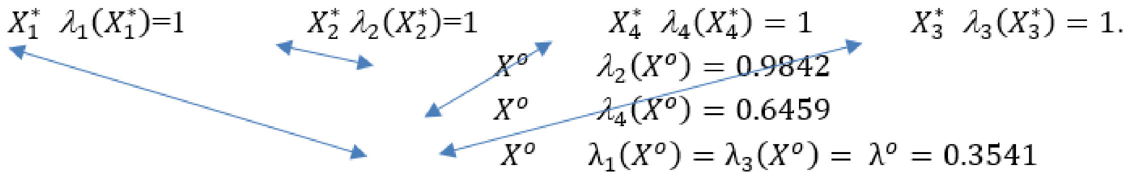

Figure 7.4. Geometric interpretation of symmetry in modeling of technical system with normalized criteria: $\lambda_1(X), \dots, \lambda_4(X)$.

For the two criteria of the first $\lambda_1(X)$ and the third $\lambda_3(X)$, this example considers an even numerical symmetry.

Анализ результатов решения. Рассчитанная величина критерия $f_q\,(X_t^o), q \in \boldsymbol{K}$**,** как правило, не равна заданной величине f_q. Ошибка выбора:

$$\Delta f_q = \left|f_q(X_t^o) - f_q\right| = |0.1744 - 0.3| = 0.125$$

определяется ошибкой линейной аппроксимации $\Delta f_{q\%} = 40.2\%$.

При моделировании могут быть изменены параметрические ограничения (7.27), т. е. получен некоторый набор оптимальных решений. Выбираем окончательный вариант, который в нашем примере входит в этот набор оптимальных решений: параметры технологического процесса $X^o = \{x_1^o = 2.8039,\ x_2^o = 30.0\}$;

параметры технической системы при заданном приоритетном критерии *q*=3:

$X_q = \{x_1 = 3.1317,\ x_2 = 21.5248\}$.

7.8. 6 этап. Геометрическая интерпретация результатов моделирования технологического процесса в физических единицах

Сформированные параметры технологического процесса мы представили их в двумерной x_1, x_2 и трехмерной системе координат $\{x_1,\ x_2$ and $\lambda\}$ на рис. 7.1, 7.2, 7.3. Представим эти параметры на рис. 7.5, 7.6, 7.7, 7.8 в физических единицах для каждой функции $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$. Первую характеристику $f_1(X)$ в физических единицах покажем на фиг. 7.5.

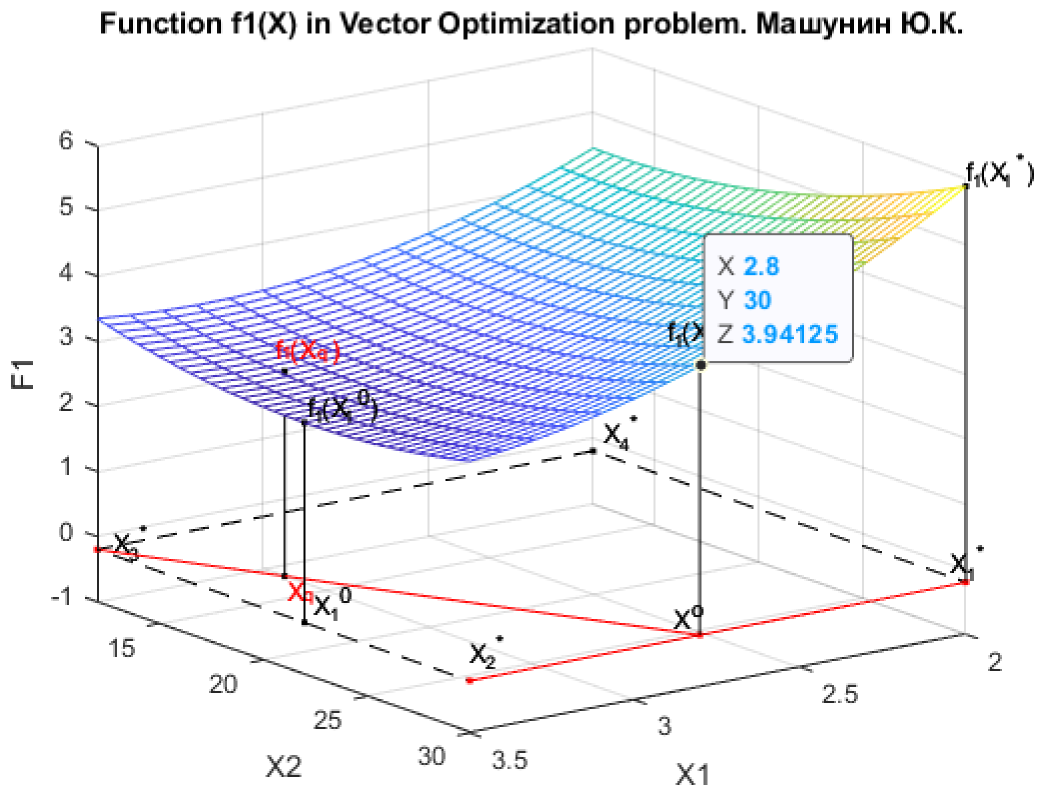

Рис. 7.5. Геометрическая интерпретация $f_1(X)$ технологического процесса в физических показателях.

Вторая характеристика технологического процесса в физических единицах $f_2(X)$ в точках X^o, X_q примет вид, представленный на рис. 7.6.

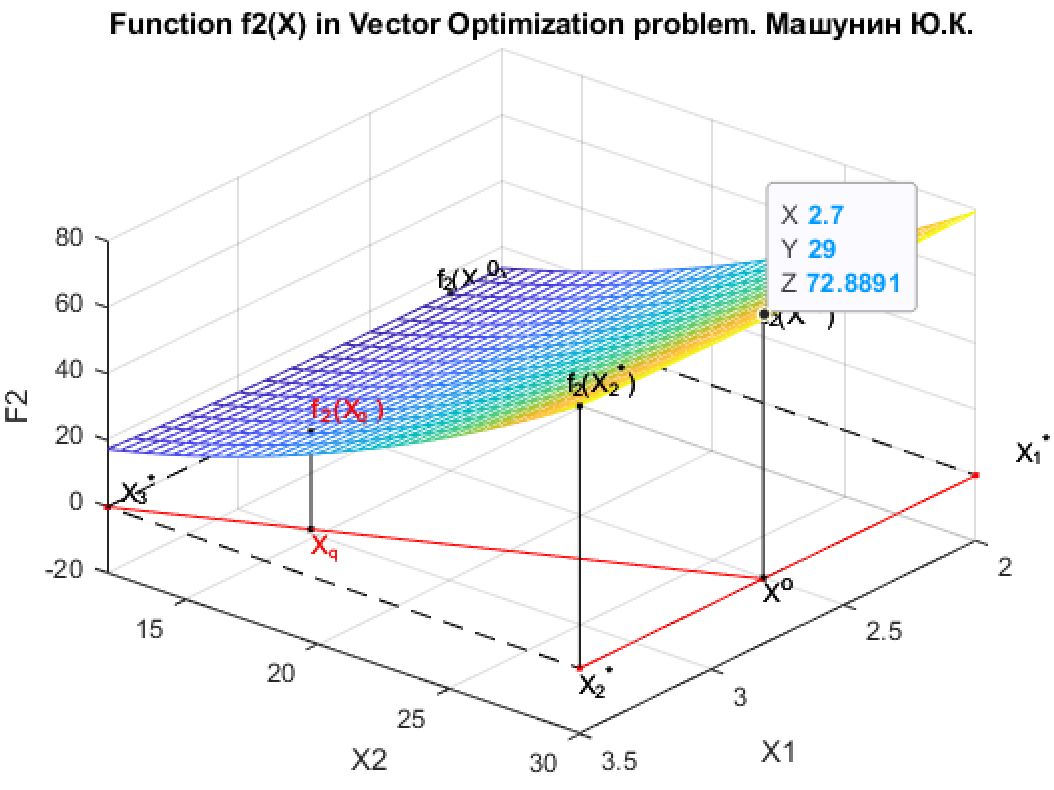

Рис. 7.6. Геометрическая интерпретация второй характеристики $f_2(X)$ технологического процесса в физических показателях

Третья характеристика $f_3(X)$ в точках X^o, X_q представлена на рис. 7.7.

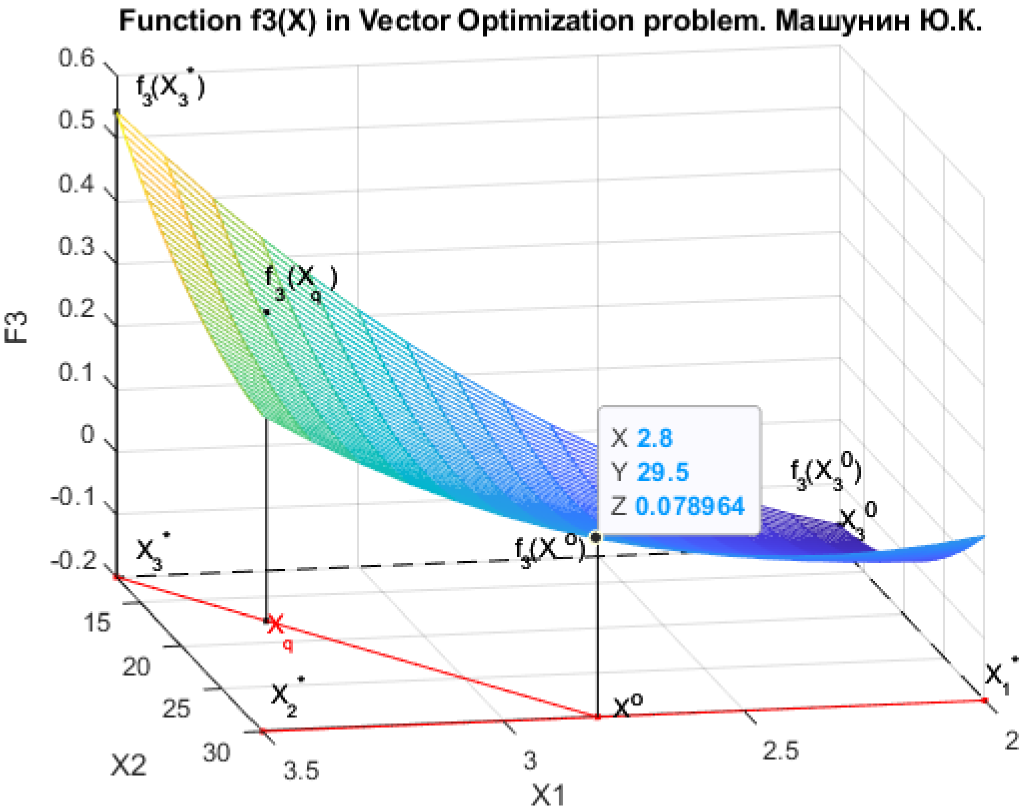

Рис. 7.7. Геометрическая интерпретация третьей характеристики $f_3(X)$ технологического процесса в натуральных показателях

Характеристика $f_4(X)$ технологического процесса в натуральных показателях представлена на рис. 7.8.

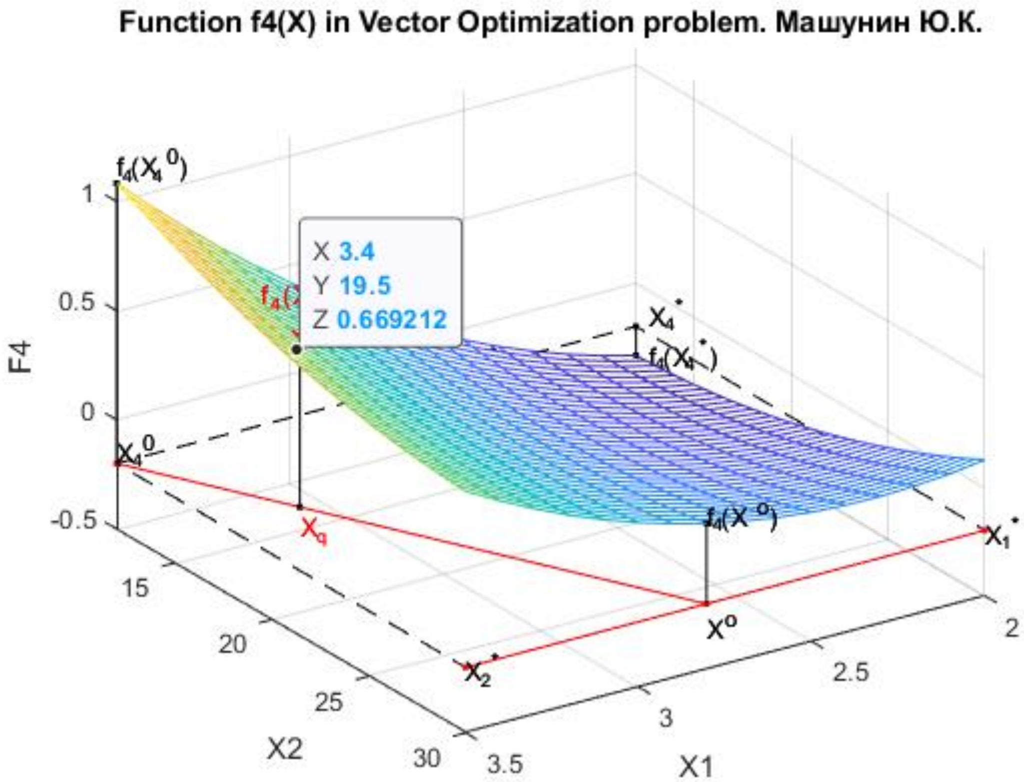

Рис. 7.8. Геометрическая интерпретация $f_4(X)$ технологического процесса в физических показателях.

В итоге получены следующие результаты.

Представлен первый вариант с равнозначными критериями:

точка $X^o = \{x_1, x_2\}$; функциональные характеристики $f_1(X^o), f_2(X^o), f_3(X^o), f_4(X^o)$;

относительные оценки $\lambda_1(X^o), \lambda_2(X^o), \lambda_3(X^o), \lambda_4(X^o)$;

максимальная оценка λ^o – относительный уровень такой, что $\lambda^o \leq \lambda_k\ (X^o)\ \forall k \in \boldsymbol{K}$ – есть оптимальное решение при равнозначных критериях (характеристиках), а процедура получения является *принятием оптимального решения в технологическом процессе* при равнозначных критериях (характеристиках).

Второй вариант с приоритетом критерия: точка – $X_q = \{x_1^q, x_1^q\}$; функциональные характеристики: $f_1(X_q), f_2(X_q), f_3(X_q), f_4(X_q)$;

относительные оценки $\lambda_1(X^o), \lambda_2(X_q), \lambda_3(X_q), \lambda_4(X_q)$;

λ^o – относительный уровень, такой, что $\lambda^o \leq p_k\ \lambda_k\ (X^q)\ \forall k \in \boldsymbol{K}$

– есть оптимальное решение с приоритетом третьего критерия (характеристики) относительно других критериев.

Методология получения точки X_q является процедурой *принятия оптимального решения* в проблеме с множеством критериев при заданном приоритете одного критерия.

Теория векторной оптимизации, методы решения векторных задач с равнозначными критериями и заданном приоритете критерия позволяют выбрать любую точку из множества точек, оптимальных по Парето, и показать оптимальность этой точки.

8. Сравнение прикладных методов многомерной математики с методами искусственного интеллекта.

Оценим прикладные методы многомерной математики – {аксиоматика Машунина Ю.К., принципы оптимальности и методы решения векторных задач математического (выпуклого) программирования}, представленные в третьем и четвертом разделе данной работы, и сравним их с методами искусственного интеллекта. Используя теорию векторной оптимизации, мы получили для инженерной системы (в частности, технической системы, структуры материала):

точки оптимума – $X^o = \ (x_j^o, j = \overline{1, N}\}$;

характеристики (критерии) – $F(X^o) = \{f_k\ (X^o), k = \overline{1, K}\}$;

относительные оценки – $\lambda(X^o) = \{\lambda_k\ (X^o), k = \overline{1, K}\}$, которые лежат в пределах $\{0 \leq \lambda_k(X^o) \leq 1\ (100\%), k = \overline{1, K}\}$, и легко переводится в натуральные (физические) данные.

Может ли эти результаты получить искусственный интеллект, функционирующий, как правило, по принципу перебора. Ответим: «Нет». Искусственный интеллект может получить только приблизительный результат, который задал человек, но чем этот результат лучше других результатов также должен оценить человек на основе интуиции.

Таким образом, разработанная теория векторной оптимизации может являться математическим аппаратом вычислительного интеллекта искусственного интеллекта.

Заключение

Проблема разработки математических методов многомерной математики в приложении к векторной задаче оптимизации и принятия оптимального решения на их основе в сложной технической системе по некоторому набору функциональных характеристик и экспериментальных данных является одной из важнейших задач системного анализа и проектирования технической системы. В работе разработана методология автоматизации проектирования путем: построения математической модели инженерной системы в условиях определенности и неопределенности; разработки методов решения векторной задачи. Представлено построение математической и численной модели выбора оптимальных параметров сложной технической системы и материала сложной структуры и их реализация по множеству характеристик Первый этап, а также этап анализа результата решения и выбора приоритетного критерия и его величины выполняется ***конструктором материала***.

Список литературы:

1. Mathematical encyclopedia / Gl.red. I.V.Vinogradov. –M.: Sovetskaya Entsiklopediya. T.1 A-G. 1977. 1152 p.
2. Mathematical encyclopedia / Gl.red. I.V.Vinogradov. –M.: Sovetskaya Entsiklopediya. T.3 Koo-Od. 1984. 1184 p.
3. Pareto V. Cours d'Economie Politique. Lausanne: Rouge, 1896.
4. Carlin S. Mathematical methods in a game theory, programming and economy. – M.: World, 1964, p. 837..
5. Germeier Yu. B. Non-Antogonistic Games. Moscow, Nauka, 1976; Springer, Netherlands, 1986.
6. Zak Yu. A. Multistage decision-making processes in the problem of vector optimization // A.iT. 1976. No. 6, pp. 41-45.
7. Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G., Gamkrelidze V.V., Mishchenko E.F. Mathematical Theory of Optimal Processes. Moscow, Nauka Publ., 1983. – 393 p. (in Russian)..
8. Krasovskiy N.N., Krasovskiy A.N., Tretyakov V.E. Upravlenie dinamicheskoy sistema [Management of dynamic system]. – Sverdlovsk: UC AN SSSR, 1985. 195 p. (in Russian).
9. Pryadkin L.L., Goncharov A.L., Boychuk V.G. Automation of Technological Process Control in Rolling Production on the Basis of Microprocessor Technology. Moscow, TsNIITEI priborostroeniya Publ., 1986. 136 p. (in Russian).
10. Yu.N. Kiselev, S.N. Avvakumov, M.V. Orlov. Optimal control. Linear Theory and Applications. Moscow: Publishing Department of the Faculty of Computer Science and Computer Science of Lomonosov Moscow State University, 2007. – 270 p. ISBN 5-89407-288-3.
11. Dobrynina I.S., Karpov I.I., Chernousko F.L. Method of decomposition in the problems of control of the system of solid bodies. WOUNDS. Theory and control systems. 1995.№ 2.
12. Krasnoshchekov P.S., Morozov V.V., Fedorov V.V. Sequential aggregation in the tasks of internal design of technical systems. Academy of Sciences of the USSR. Techn. cybernetics. 1979. N5.
13. Mikhailevich V. S., Volkovich V. L. Computational methods of research and design of complex systems. M.: Science, 1979, p. 319.
14. Podinovsky V.V., Nogin V.D. Pareto-optimal solutions of multi-criteria problems. Moscow: Nauka. 1982. 256 p.
15. Yu. K. Mashunin, Methods and Models of Vector Optimization (Nauka, Moscow, 1986) [in Russian].
16. Yu. K. Mashunin and V. L. Levitskii, Methods of Vector Optimization in Analysis and Synthesis of Engineering Systems. Monograph (DVGAEU, Vladivostok, 1996) [in Russian].
17. Машунин Ю.К. Решение композиционных и декомпозиционных задач синтеза сложных технических систем методами векторной оптимизации//Изв. РАН. ТиСУ. 1999. №3. С. 88-93. Yu. K. Mashunin, "Solving composition and decomposition problems of synthesis of complex engineering systems by vector optimization methods," Comput. Syst. Sci. Int. 38, 421 (1999). (Scopus).
18. Машунин Ю.К., Машунин К.Ю. Моделирование технических систем в условиях неопределенности и принятие оптимального решения //Изв. РАН. ТиСУ. 2013. №4. С. 19-35.
Mashunin K. Yu., and Mashunin Yu. K. Simulation Engineering Systems under Uncertainty and Optimal Decision Making. Journal of Comput. Syst. Sci. Int. Vol. 52. No. 4. 2013. 519-534. (Scopus)
19. Mashunin Yu. K. Control Theory. The mathematical apparatus of management of the economy. Logos. Moscow. 2013, 448 p. (in Russian).
20. Mashunin Yu.K. Mashunin K.Yu. Modeling of technical systems on the basis of vector optimization (1. At equivalent criteria) / International Journal of Engineering Sciences & Research Technology. 3 (9): September, 2014. P. 84-96.
21. Mashunin Yu.K. Mashunin K.Yu. Modeling of technical systems on the basis of vector optimization (2. with a Criterion Priority) / International Journal of Engineering Sciences & Research Technology. 3 (10): October, 2014. P. 224-240.

22. Yu. K. Mashunin, K. Yu. Mashunin. Simulation and Optimal Decision Making the Design of Technical Systems // American Journal of Modeling and Optimization. 2015. Vol. 3. No 3, 56-67.

23. Yu. K. Mashunin, K. Yu. Mashunin. Simulation and Optimal Decision Making the Design of Technical Systems (2. The Decision with a Criterion Priority) // American Journal of Modeling and Optimization. 2016. Vol. 4. No 2, 51-66.

24. Yu. K. Mashunin, "Methodology of the Choice of Optimum Parameters of Technological Process on Experimental to Data. «American Journal of Modeling and Optimization, vol. 7, no. 1 (2019): 20-28. Doi: 10.12691/ajmo-7-1-4.

25. Yu. K. Mashunin. Vector optimization in the system optimal Decision Making the Design in economic and technical systems // International Journal of Emerging Trends & Technology in Computer Science. 2017. Vol. 7. No 1, 42-57.

26. Mashunin, Yu. K, Optimal designing in the interrelation technical system – Materials (Theory) // Mathematical methods in engineering and technology: proceedings of international. Science. Conf.: 12 tons 4 /under General Ed. A. A. Bolshakova. –SPb.: Publishing house of Polytechnical Institute. Un-t, 2018. P. 40-46.

27. Yu. K. Mashunin. Concept of Technical Systems Optimum Designing (Mathematical and Organizational Statement)// International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2017 Proceedings 8076394. Saint Petersburg. Russia/ WOS: 000414282400287 ISBN:978-1-5090-5648-4. (Web of science)

28. Yu. K. Mashunin. Optimum Designing of the Technical Systems Concept (Numerical Realization) // International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2017 Proceedings 8076395. Saint Petersburg. Russia/ WOS: 000414282400288 ISBN:978-1-5090-5648-4. (Web of science)

29. Mashunin K. Yu., and Mashunin Yu. K. Vector Optimization with Equivalent and Priority Criteria. Journal of Comput. Syst. Sci. Int., 2017, Vol. 56. No. 6. pp. 975-996. https://rdcu.be/bhZ8i (Scopus).

30. Mathematical Apparatus of Optimal Decision-Making Based on Vector Optimization," Appl. Syst. Innov. 2019, 2, 32. https://doi.org/10.3390/asi2040032 (Scopus)

31. Mashunin Yu.K. Theory and Methods Vector Optimization (Volume One), Cambridge Scholars Publishing. 2020, 183 p. ISBN (10): 1-5275-4831-7

32. Yu. Torgashov, V. P. Krivosheev, Yu. K. Mashunin, and Ch. D. Holland, "Calculation and multiobjective optimization of static modes of mass_exchange processes by the example of absorption in gas separation," Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Neft' Gaz, No. 3, 82–86 (2001).

33. Mashunin Yu.K. Theory, Applied Mathematics and Software for Optimal Decision Making on a set of Criteria in Engineering Systems, monograph: monograph / Yu.K. Mashunin. Moscow: RuScience, 2024. – 260 c. ISBN 978-5-466-05940-3.

34. R. L. Keeney and H. Raiffa, Decisions with Multiple Objectives–Preferences and Value Tradeoffs (Wiley, New York, 1976; Radio i svyaz', Moscow, 1981).

35. J. Johannes. Vector Optimization: Theory, Applications, and Extensions. New York, Berlin, Heidelberg. Springer-Verlag. 2010. 460 p.

36. Qamrul Hasan Ansari, Jen-Chih Yao. Recent Developments in Vector Optimization. Springer Heidelberg Dordrecht. New York. London. 2010. 550 p.

37. Nakayama Hirotaka, Yun Yeboon, Yoon Min. Sequential Approximate Multiobjective Optimization Using Computational Intelligence. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. 2009. 197 p.

38. Shankar R. Decision Making in the Manufacturing Environment: Using Graft Theory and fuzzy Multiple Attribute Decision Making Methods. Springer; 2007. 373 p.

39. Cooke T., Lingard H., Blismas N. The development end evaluation of a decision support tool for health and safety in construction design // Engineering, Construction and Architectural Management. 2008. V. 15. №4. P. 336-351.

40. Levitsky V. L. Mathematical Modeling and Optimization of Magnetoelectric Linear DC Inductor Motors. Thesis: Cand. Techn. Sci., Novosibirsk. NETI. 1990. 163 p. (In Russian).

41. Mathematical encyclopedia / Gl.red. I.V.Vinogradov. –M.: Sovetskaya Entsiklopediya. T.4 Ok-Slo. 1984. 1216 p.

42. Mashunin Yu.K. Theory and Methods Vector Optimization (Volume Two), Cambridge Scholars Publishing. 2021, 270 p. ISBN (10): 1-5275-7413-X ISBN (13): 978-1-5275-7413-7

43. Yury Mashunin. Digital Transformation of Optimal Decision making in Economic and Engineering Systems Based and Methods of Vector Optimization, Modern Intelligent Times. 2024, 1-57 p. ISSN 2957-7942 (Online) DOI: 10.53964/mit.2023007

44. Mashunin Yu.K. Modeling, simulation, making optimal decision in engineering and production systems based on vector optimization: monograph / Yu.K. Mashunin. Moscow: RuScience, 2024. – 368 c. ISBN 978-5-466-08001-8.