DOI 10.58351/2949-2041.2025.24.7.012

Машунин Юрий Константинович
Доктор экономических наук, к.т.н., профессор
Дальневосточный федеральный университет
Mashunin Yu. K., Doctor of Economics,
Ph.D., Professor
Far Eastern Federal University
ORCID id: 0000-0001-7071-8729

МНОГОМЕРНАЯ МАТЕМАТИКА В СТРАТЕГИЧЕСКОМ РАЗВИТИИ И МНОГОУРОВНЕВОЙ ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ГОСУДАРСТВА, РЕГИОНА В ЦИФРОВОЙ ЭКОНОМИКЕ
MULTIDIMENSIONAL MATHEMATICS IN STRATEGIC DEVELOPMENT MULTI-LEVEL FINANCIAL AND ECONOMIC SYSTEM OF THE STATE, THE REGION IN THE DIGITAL ECONOMY

Аннотация.. Моделирование прогнозирования и стратегического планирования в цифровой экономике является перспективным направлением социально-экономического развития государства, в том числе его составных частей: регионов, муниципалитетов и предприятий, составляющих основу экономики Российской Федерации. Целью исследования является разработка теоретических и методологических положений стратегического и инновационного развития финансово-экономической системы государства, включающей основные уровни управления, на базе многомерной математики. Создание математического и программного обеспечения для прогнозирования и стратегического планирования развития экономики государства на всех уровнях на основе статистической информации Российской Федерации в условиях цифровой экономики. Для реализации этих целей в работе представлено три части.

Часть 1. Многоуровневая финансово-экономическая система стратегического развития государства, региона в условиях цифровой экономики.

Часть 2. Многомерная математика. Математическое обеспечение моделирования развития производственных и финансовых систем. Часть 3. Программное обеспечение и методология моделирования развития производственных и финансовых систем.

Аннотация и введение для каждой част представлено отдельно.

Abstract. Modeling forecasting and strategic planning in the digital economy is a promising area of socio-economic development of the state, including its components: regions, municipalities and enterprises that form the basis of the economy of the Russian Federation. The purpose of the study is to develop theoretical and methodological provisions for the strategic and innovative development of the financial and economic system of the state, including the main levels of management, based on multidimensional mathematics. Creation of mathematical and software for forecasting and strategic planning of the development of the state economy at all levels based on statistical information of the Russian Federation in the digital economy.

To achieve these goals, the work presents three parts.

Part 1. Multi-level financial and economic system of strategic development of the state, region in the digital economy.

Part 2. Multidimensional mathematics. Mathematical support for modeling the development of production and financial systems. Part 3. Software and methodology for modeling the development of production and financial systems.

The abstract and introduction for each part are presented separately.

Ключевые слова: Государство, стратегическое развитие финансово-экономической системы, многомерная математика, моделирование социально-экономических систем.

Keywords: State, strategic development of the financial and economic system, multidimensional mathematics, modeling of socio-economic systems.

ЧАСТЬ 1. **МНОГОУРОВНЕВАЯ ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА СТРАТЕГИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ ГОСУДАРСТВА, РЕГИОНА В УСЛОВИЯХ ЦИФРОВОЙ ЭКОНОМИКИ**

Аннотация. Моделирование прогнозирования и стратегического планирования в цифровой экономике является перспективным направлением социально-экономического развития государства, в том числе его составных частей: регионов, муниципалитетов и предприятий, составляющих основу экономики Российской Федерации (РФ). Это направление исследований направлено на создание методологической базы для формирования и реализации перспективных управленческих решений в области социально-экономического развития государства.

Целью исследования является разработка теоретических и методологических положений стратегического и инновационного развития социально-экономической системы государства, включая основные уровни управления, на основе векторной оптимизации. Создание математического и программного обеспечения для прогнозирования и стратегического планирования развития экономики государства на всех уровнях в условиях цифровой экономики на основе статистической информации Российской Федерации.

Для достижения этих целей изначально была изучена целевая направленность основных блоков многоуровневой системы экономики государства. На основе статистических данных и межотраслевого баланса была построена математическая модель инновационного развития экономики государства в виде векторной задачи линейного программирования (ВЗЛП). Модель предназначена для решения задач прогнозирования и стратегического планирования развития государства в условиях цифровой экономики.

Для практической реализации математической модели инновационного развития экономики представлено математическое и программное обеспечение для решения задачи векторной оптимизации. В качестве математического обеспечения используются теория и методы векторной оптимизации. Программное обеспечение реализовано в системе MATLAB. В четвёртой части работы представлена методология процесса моделирования развития социально-экономических систем, основанная на векторной оптимизации принятия решений. Методология процесса принятия оптимальных решений включает в себя три последовательных этапа.

Ключевые слова: государство, стратегическое развитие экономики, многомерная математика, моделирование социально-экономических систем

Введение

Перспективным направлением социального и экономического развития государства и его составных частей: мезо-регионов, регионов, муниципальных образований, предприятий (фирм) является моделирование, прогнозирование и сформированное на их основе стратегическое планирование и инновационное развитие.

Это направление исследований является целью создания методологической базы для формирования и прогнозирования управленческих решений социально экономического развития государства.

Цель исследования состоит в анализе, разработки теоретико-методологических положений

стратегического и инновационного развития многоуровневых социально-экономических систем государства в условиях цифровой экономики на базе векторной (многокритериальной) оптимизации. Практической

реализации результатов исследования: моделирования, прогнозирования и стратегического планирования развития социально-экономической системы государства на базе инновационного развития в условиях цифровой экономики.

Для реализации поставленной цели в работе проведено исследование, анализ работ социально-экономического развития государства [1-10]. Проведен анализ основных аспектов социально-экономического и финансового развития государства [11-20]. Кратко представлено математическое и программное обеспечение моделирования и социально-экономического развития государства [21-50]. Исследование направлено на решение проблемы обеспечения надежности прогнозирования, стратегического планирования в краткосрочной, среднесрочной, долгосрочной перспективе развития много уровневой экономики и финансовой системы государства. А также стратегического социально-экономического развития всех уровней развития государства: мега регионов, регионов, муниципалитетов и финансового бизнеса малых, средних и крупных фирм (предприятий). Методология построена: во-первых, на информационном обеспечении, которое представляется государственными статистическими органами, и цифровой экономики; во-вторых, на математическом моделировании экономических систем (математическое обеспечение); в-третьих, на инвестиционных процессах, которые определяют тенденции развития экономики государства; в-четвертых, на программном обеспечении решения указанных проблем.

1. Главные факторы, влияющие на развитие многоуровневой социально-экономической системы государства

1.1. Исследование, анализ работ социально-экономического развития государства

Исследования направлены на формирование методологической основы разработки, реализации управленческих решений, на приоритетные направления социального и экономического развития государства. Это отражено в Конституции Российской Федерации [1], Бюджетном [2] и Налоговом кодексе РФ [3].

Распоряжением Правительства РФ была принята Стратегия пространственного развития России до 2025 года [4], в дополнении к которой сформирован Указ Президента Российской Федерации № 204 от 07.05.2018 г. «О национальных целях и стратегических задачах развития РФ на период до 2024 года» [5], а также указ «Об утверждении Основ государственной политики регионального развития РФ на период до 2025 года» [6]. В этом направлении также связаны решения Коллегии Евразийской экономической комиссии “Об утверждении перечня статистических показателей …», [9] и учебная литература о прогнозировании, планирование социально-экономических систем [10].

1.2. Исследование, анализ основных аспектов социально-экономического развития государства

РФ занимает значительную территориальную площадь и характеризуется многообразием структурных элементов, поэтому исследование иерархической многоуровневой социально-экономической системе государства представляется закономерным. Социально-экономическое развитие государства характеризуется четырьмя аспектами.

Во-первых, это аспект, связанный с теоретические исследования иерархических структур и с попыткой их моделирования. Это направление исследований представлены в работах М. Месаровича, Д., [11], продолжены: в области экономической теории, целей общества [12]; институциональной структуры производства [13]; в области теории принятия решений в экономической теории и науке о поведении [14]; исследований мезо уровневого влияния информационно-коммуникационных ресурсов на экономическое развитие российских регионов [15]; исследований в области пространственной организации экономики региона [16], а также пространственный анализ структурных сдвигов динамики экономического развития макрорегионов России [17]; исследований связи производства, обмена и потребления [18]; в области регионального развития и системы образования в условиях цифровой трансформации [19]; в области теории прогнозирования развития многоуровневой иерархической системы экономики государства [20].

Во-вторых, это аспект, связанный с исследованием иерархических систем (ИС), в которых экономика государства представлена множеством отраслей, взаимно увязанных друг с другом. Структурно-межотраслевые модели в первые были разработаны американским экономистом В.В. Леонтьевым [21], названные им модель «Затраты-выпуск». В России эта модель получила название межотраслевого баланса. В Новосибирске в ИНП РАН на базе межотраслевого баланса разработана система моделей, которые подробно представлены в работах [22, 23].

В-третьих, это аспект, связанный исследованиями иерархических структур экономики, в частности модели Леонтьева В.В. "Затраты – выпуск", в которых отсутствует показатель «инвестиции». Экономический показатель «инвестиции» определяет динамику развития экономики муниципального образования, региона и государства в целом, [24]. Инвестиционный процесс представляет инвестиционную деятельность фирм, региона, государства в течение длительного периода времени [25] и характеризуется воспроизводством продукции по всем видам экономической деятельности, [26].

В-четвертых, это аспект, связанный исследованиями иерархических структур экономики, определяется тем, что каждый экономический объект от фирмы до … государства характеризуется некоторым множеством (системой) социально-экономических показателей, [9]. Отсюда при моделировании возникает необходимость решения задач, в которых экономический объект представлен множеством экономических показателей (критериев), т.е. решение многокритериальных (векторных) задач оптимизации. Решение проблемы векторной оптимизации обусловлено рядом трудностей, причем концептуального характера, и главная из них понять: «что значит решить задачу векторной оптимизации», т.е. сформировать аксиоматику и принцип оптимальности, показывающий, почему одно решение лучше другого, и, которое определяет правило выбора наилучшего решения.

Социально-экономические процессы развития государства являются достаточно сложными и требует системного [15, 17, 26], сбалансированного по регионам подхода к управлению [16]. Отсюда государственное регулирование стратегического и инновационного развития социальных и экономических систем является важной и актуальной проблемой, [27].

На исследование и решение этих проблем в совокупности направлена данная работа.

Цель исследования состоит в анализе, разработки теоретико-методологических положений стратегического и инновационного развития многоуровневых социально-экономических систем государства в условиях цифровой экономики на базе векторной (многокритериальной) оптимизации. Практической реализации результатов исследования: моделирования, прогнозирования и стратегического планирования развития социально-экономической системы государства на базе инновационного развития в условиях цифровой экономики.

Для реализации этой цели в работе представлены четыре части.

В первой части работы целевая направленность основных блоков иерархической многоуровневой системы экономики [28] исследована: от простых [29, 30, 31] и сложных предприятий (фирм) [32, 33, 34], муниципальных образований [28, 35], регионов (субъектов РФ) [26, 28], мезо регионального – пространственного уровня [25, 36, 37] до государства [38, 39], мировой экономики [39, 40]. *Во второй части* с учетом с целевой направленности экономических блоков иерархической системы и ограничений построена социально-экономическая модель стратегического планирования, управления соответствующих уровней государства в виде векторной задачи линейного программирования, [28].

Представлено математическое и программное обеспечение решения векторных задач линейного программирования. В рамках математического обеспечения использована теория и методы векторной оптимизации, [41]. Признание теории и методов векторной оптимизации пришло тридцать лет спустя в https://rdcu.be/bhZ8i, [42], в Англии – монография в двух томах, [43, 44], в России – монография в трех томах, [45, 46, 47] и [49].

В четвертой части исследована и разработана методология процесса моделирования развития социально-экономических систем [50].

2. Теоретические и экономические основы построения математической модели развития социально-экономической системы государства

2.1. Исследование, анализ и разработка целей многоуровневой социально-экономической системы государства.

Функционирование органов государственной власти, связанное с управлением экономического и социального развития государства, включает отношения между центральными управляющими органами государства, мезо уровневыми регионами, субъектами РФ (регионами), муниципальными образованиями, которые является составной частью национальной политики государства, отраженной в Конституции РФ, [1], Бюджетном кодексе РФ, [2], Налоговый кодекс РФ, [3], Федеральном законе РФ "О стратегическом планировании в РФ", [4]. Процитируем, в этом аспекте, определение В. И. Ленина «Политика – это концентрированное выражение экономики» [7]. Отсюда вытекает концентрированная деятельность руководящих органов государства, в условиях глобального окружения конкурирующих государств, рис.1.

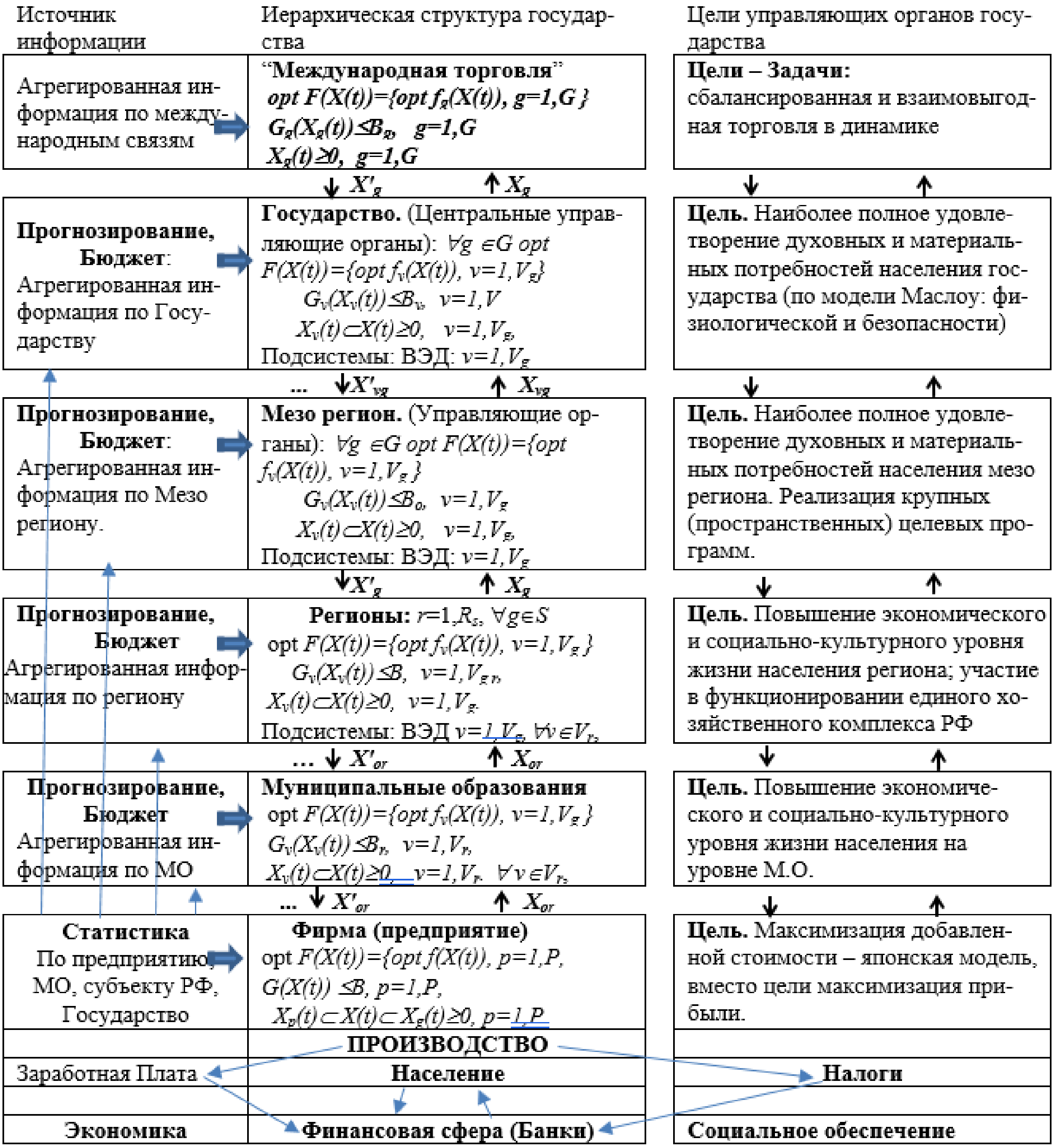

Рис. 1. Цели, задачи управления в многоуровневой ИС государства
в условиях цифровой экономики

На верхнем уровне иерархической системы представлена высшая управляющая подсистема, формирующая информацию для принятия решений, которая связана с международными организациями, и координирующая развитие внешнеторговых операций различных стран. Координация внешнеторговых операций выполняется при решении задач сбалансированной и взаимовыгодной торговли в динамике. В результате решения определяются объемы прибыли (дохода): $X_g, g = \overline{1, G}$, которые будет иметь $g \in \boldsymbol{G}$ государство при продаже соответствующих товаров в другие страны.

На высшем уровне управления иерархической системы государства рассматриваются управляющие подсистемы, связанные с управлением экономикой своих стран. Целевая направленность уровня определяется наиболее полным удовлетворением материальных, духовных потребностей населения государства, ростом жизненного уровня, т.е. по модели Маслоу: реализация первой и второй потребности – физиологической и безопасности.

Таблица 1

Сравнение целей развития государства

Конституция Российской Федерации. с учетом поправок 2020. constitution.kremlin.ru	Конституция Союза Советских Социалистических Республик. – М.: Юрид. Лит., 1989. – 48 с.
Статья 7 1. Российская Федерация – социальное государство, политика которого направлена на создание благоприятных условий, обеспечивающих достойную жизнь и свободное развитие человека. **Заметим**. Что такое «благоприятные условия»? – не понятно. С одной стороны, «Абрамовичи», вывозящие миллиардами русский капитал в Англию, Израиль. С другой стороны, бомжи, о которых в 90 годы никто и понятия не имел. За двадцать лет действия данной конституции валовой объем производства увеличился на 1,5%, при этом исчезло ряд ведущих отраслей: станко – инструментальная отрасль, гражданской авиации, микроэлектроники и пр. (В Китае рост на 5-6% ежегодно). При этом в России появилось свыше ста двадцати миллиардеров, (в Китае 50). Упорно разваливается наука, образование, которое в Советском Союзе было лучшее в мире.	Статья 15 Высшая цель общественного производства при социализме – наиболее полное удовлетворение растущих материальных и духовных потребностей людей. Опираясь на творческую активность трудящихся, социалистическое соревнования, достижения научно-технического прогресса, совершенствуя формы и методы руководства экономикой, государство обеспечивает рост производительности труда, повышения эффективности производства и качество работы, динамичное, планомерное и пропорциональное развитие народного хозяйства. **Заметим**. В период Сталина И.В. рост экономики составлял 5-6% ежегодно (соизмеримо с Китайским ростом). В период Брежнева Л.И. ежегодный рост 3-3,5% и этот период считался периодом «Застоя». А как назвать нынешний рост экономики в 1-1,5%, с ежегодным вывозом до 50 млрд. $?

Цель развития государства должна быть отражена в Конституции. В конституции РФ слово «цель» отсутствует. Нечто похожее на цель представлено в седьмой статье, таблица 1. Для сравнения представим выписку статьи 15 из Конституции СССР.

Государственное управление базируется на законодательстве своих странах и статистических данных об экономическом потенциале своих отраслей видов экономической деятельности (ВЭД), [39]. Подсистема государственного управления формирует вектор агрегированных по видам экономической деятельности (отраслям) объемов продукции: $v = \overline{1, V_g}$, включая экспорт, который мог бы освоить данное государство: $X_{vg}, v = \overline{1, V_g}, g \in G$, [20].

2.2. Исследование, анализ и модель мезо регионального – пространственного (второго) уровня управления государства

2.2.1. Исследование, анализ мезо регионального – пространственного (второго) уровня управления государства

На мезо региональном – пространственном уровне управления государства механизм формирования прогноза, планирования и управления направлен, во-первых, на повышения социального и экономического уровня жизни населения территории, во-вторых, на участие в общероссийском реализации крупных территориальных целевых программ. Под мезо регионом понимается Географический район – исторически сложившаяся территория, которая отличается своими природными условиями. Страна поделена на две больших части: европейская и азиатская. К европейской части относятся: Центральная Россия, Урал, Поволжье, Европейский Север, Северный Кавказ и Северо-Запад, к азиатской части относят: Западная и Восточная Сибирь и Дальний Восток России. Другое разделение территории – экономическое, где на территории наблюдается однозначность показателей, есть общие проблемы и задачи, [12, 13, 16].

В 2022 году региональная структура Российской Федерации изменилась, поэтому уделим этому вопросу особое внимание.

• В соответствии с Федеральным конституционным законом от 17.12.2001 N 6-ФКЗ (ред. от 31.10.2005) "О порядке принятия в Российскую Федерацию и образования в ее составе нового субъекта Российской Федерации" приняты федеральные конституционные законы о вхождении в состав России Донецкой и Луганской народных республик (ДНР и ЛНР), а также Херсонской и Запорожской областей. Документы опубликованы на официальном портале правовой информации. (Например. Федеральный конституционный закон от 04.10.2022 № 7-ФКЗ

О принятии в Российскую Федерацию Запорожской области

Источник: https://www.law.ru/npd/doc/docid/500308/modid/97)

В монографии [45, 46, 47], (за два года до обращения Путина В.В. и начала Специальной Военной Операции), в предисловии я указывал, что «Первый дед был родом и Санкт Петербурга, а второй дед родом с Полтавы (Украина). Россия и Украина была, есть и будет моей Родиной. Монография посвящается воссоединению, совместного развития и процветания двух братских, славянских народов».

Но если в 2021 году это было только моим личным пожелание, то в настоящее время в связи желанием американского президента Трампа подключить к США также Канаду, Гренландию, Панамский канал, т. е создание крупной империи по объему территории равной РФ, объединение РФ и Украины должно стать целью развития РФ.

И принятие конституционного закона о вхождении в состав России Донецкой и Луганской народных республик (ДНР и ЛНР), а также Херсонской и Запорожской областей лишь первый шаг к воссоединению (замечу, что мой первый дед родом из Санкт Петербурга, а второй из Полтавы – Украина). Предполагая полное объединение России и Украины, необходимо решить, как будет выглядеть такое объединение, т.е. ответить на вопросы: Цели социально-экономического развития объединения и государства в целом; Какова будет организационная структура объединения; Принадлежность основных средств производства; Целенаправленность финансовой системы.

1. ***Цели социально-экономического развития*** объединения и государства в целом, также, как на рис. 1, направлены на: «Наиболее полное удовлетворение духовных, материальных потребностей населения мезо региона. Реализация крупных (государственных – пространственных) целевых программ».

2. ***Организационная структура объединения***. Предполагаю, что при объединении могут возникнуть два мезо региона с условными названиями: Новороссия и Украина, с правами и обязанностями аналогичными, как и для восьми вышеперечисленных мезо регионов России. При таких названиях сохранится историческая преемственность с прошлыми периодами этого региона. Предполагаю, что в состав Новороссии войдут Черниговская, Сумская, Полтавская, Харьковская, Луганская, Днепропетровская, Донецкая, Одесская, Николаевская, Херсонская, Запорожская и Донецкая области на правах и обязанностях субъектов Российской Федерации. Остальные области входят в состав мезо региона Украина. Как производственник предполагаю, что в перспективе мезо регион Новороссия, наряду с

сельскохозяйственной отраслью, что определяется природными условиями, должен быть направлен на возрождение станкоинструментальной, металлургической отраслью, крупным самолетостроением (которые были уничтожены в девяностые годы). В перспективе этот мезо регион должен заменить Канаду, Германию, Японию и Китай вметало поставках станкоинструментальной отрасли.

3. ***Оценка принадлежность основных средств*** производства.

Автор после окончания института был принят на работу электриком-наладчиком третьего разряда, т.е. начинал свою производственную деятельность с рабочего. Достаточно быстро стал квалифицированным инженером – наладчиком и участвовал отладке и запуске многих крупных предприятий гражданского и военного профиля. Одно из таких предприятий «Третий горно-обогатительный комбинат» (Третий ГОК) в поселке Мирный, где я участвовал в отладке и запуске в 1967, 8 году. Недавно по телевизору корреспондент сообщал, какие крупные алмазы и соответственно прибыли получает комбинат.

В связи с этим у меня возникают вопросы.

Где остались геологи, которые более 10 лет в 40-50 градусные морозы Якутии искали и нашли залежи алмазов?

Где остались ученые, которые разработали технологии переработки алмазной руды (кимберлита)?

Где остались конструкторы, технологи, разработавшие проектную документацию?

Где остались инженерно-технический персонал, конструкторы, монтажники, рабочие, построившие горнообогатительный комбинат?

Работали только русский инженерно-технический персонал и рабочие – евреев и прочих национальностей и близко не было. И, наконец, где остались мы наладчики, запустившие предприятие, которое прекрасно работает до сих пор.

Ответ: нас всех обворовали, ограбили за несколько коробок из-под ксерокса, забитого бумагой с нарисованными долларами.

Повторное обращение в Конституционный суд Российской Федерации «О правомочности приватизации средств производства в 1990 годах прошлого столетия» (в том числе для новых субъектов РФ), а также всех залоговых аукционах и других средств по ограблению русского народа, которое должно представлять государство.

4. ***Целенаправленность финансовой системы***. Для оценки целенаправленности финансовой системы государства и центрального банка, в частности, дадим определение денежных средств.

Деньги – это информационное отображение того, что сделано человечеством. Рубль – это информационное отображение того, что сделано русским народом в Советском Союзе с соответствующим продолжением в Российской Федерации. Поэтому рубль должен быть направлен на повышение жизненного уровня русского народа, представленного государством, а не только защитой и обеспечением устойчивости рубля, что отражено в 75 статье Конституции РФ. Рубль должен быть независим от других валют, в частности от доллара, а Центральный банк должен быть независим от Федеральной Резервной Системы Америки, а зависим от Русского народа, который представлен государством и цель его повышение жизненного уровня всего Русского Народа, а не Абрамовичей различных мастей.

2.2.2. Математическая модель мезо регионального – пространственного (второго) уровня управления государства

В соответствии с представленными целями и задачами сформулируем математическую модель мезо регионального – пространственного (второго) уровня управления государства в виде векторной задачи линейного программирования (ВЗЛП) с независимыми критериями. В исследуемой ВЗЛП общее количество критериев подразделяется на два подмножества критериев: Q и K_1. Q – это подмножество независимых критериев, которые характеризуют отдельный регион. Каждый регион выпускает свою, не зависимую от других регионов продукцию. $X_q = \{x_j\,(t), j = \overline{1, N_q}\}, q = \overline{1, Q}$, где Q множество регионов. K_1 – это подмножество зависимых между собой критериев, $Q \cup K_1 = K$ – множество критериев ВЗЛП:

$$Opt\ F(X(t)) = \{maxF_q(X(t)) = \{max f_{kq}(X(t)) \equiv \sum_{j=1}^{N_q} c_j^k x_j(t), k = \overline{1, K_q}\}, q = \overline{1, Q}\}, \quad (1.1)$$

$$\{max\ F_1(X(t)) = \{max f_k(X(t)) \equiv \sum_{j=1}^{N} c_j^k x_j(t), k = \overline{1, K_1}\}\}, \quad (1.2)$$

Ограничения $G_i\ (X(t))\ \equiv \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\ (t) x_j\ (t) \leq b_i(t), i = \overline{1, M}$, (1.3)

$$G_i\ (X_q(t)) \equiv \sum_{j=1}^{N_q} a_{ij}^q x_j(t) \leq b_i^q(t),\ i = \overline{1, M_q}, q = \overline{1, Q}, \quad (1.4)$$

$$\sum_{j=1}^{N} c_j^k x_j\ (t) \geq b_k(t), k \in K, \quad (1.5)$$

$$0 \leq x_j(t) \leq u_j(t), j = \overline{1, N_q}, q = \overline{1, Q},$$

где $X = \{x_j\ (t), j = \overline{1, N_q}, q = \overline{1, Q}\}$ – вектор переменных N-мерного евклидова пространства $X \in \boldsymbol{R^n}$, включающий в себя подмножество неизвестных $N_q \subset N$ q-го критерия $q \in Q$, $\boldsymbol{Q}$ – множество независимых критериев.

В целом задача (1.1)- (1.5) относится к классу выпуклых векторных задач математического программирования. (1.5) представляют ограничения, которые накладываются на все переменные $X = \{x_j\ (t), j = \overline{1, N_q}, q = \overline{1, Q}\}$; (1.4) – ограничения накладываемые только на переменные независимых критериев: $X_q = \{x_j\ (t), j = \overline{1, N_q}\}, q = \overline{1, Q}$. (1.3)- (1.5) – стандартные ограничения.

$S = \{X \in R^n | G(X) \leq 0, X^{min} \leq X \leq X^{max}\} \neq \emptyset$ – это допустимое множество точек (или более кратко – допустимое множество), задающиеся стандартными ограничениями (3)- (1.5) и тривиальными ограничениями $0 \leq x_j\ (t) \leq u_j\ (t), j = \overline{1, N}$. Предполагаем, что допустимое множество точек не пусто и представляет собой компакт, [44, 47].

2.3. Исследование, анализ регионального (третьего) уровня управления

2.3.1. Исследование, анализ регионального – пространственного (третьего) уровня управления государства

На региональном (третьем) уровне управления государства механизм формирования прогноза, планирования и управления направлен, во-первых, на повышения социального и экономического уровня жизни населения региона, во-вторых, на участие в общероссийском разделении труда, как функционирования единого хозяйственного комплекса РФ с взаимовыгодной пользой. Развитие региона за счет интенсификации развития промышленности, производства продукции сельского хозяйства должно осуществляться с учетом рационального природопользования, разработки ресурсосберегающих технологий, [25, 26]. Региональное текущее, стратегическое планирование и управление должно базироваться на производственной и хозяйственной деятельности отдельных фирм (предприятий) и их объединений, являющихся основным производителем продукции региона, [27, 28]. Рост благосостояния населения вплотную связан с ростом производительности труда и увеличением объема продукции, выпускаемой в регионе, повышением ее качества, конкурентоспособности. Математическая модель развития экономики региона в виде векторной задачи линейного программирования представлена в работах [28, 36].

2.3.2. Математическая модель регионального – пространственного (третьего) уровня управления государства

В соответствии с представленными целями и задачами сформулируем математическую модель регионального уровня управления государства в виде векторной задачи линейного программирования (ВЗЛП) с независимыми критериями. В исследуемой ВЗЛП общее количество критериев подразделяется на два подмножества критериев: Q и K_1. Q – это подмножество независимых критериев, которые характеризуют отдельную отрасль региона. Каждая отрасль региона выпускает свою, не зависимую от других отраслей продукцию. $X_q = \{x_j\ (t), j = \overline{1, N_q}\}, q = \overline{1, Q}$, где Q множество отраслей региона. K_1 – это подмножество зависимых между собой отраслей, которые при построении математической модели рассматриваются как критерии, $Q \cup K_1 = K$ – множество критериев ВЗЛП:

$$Opt\ F(X(t)) = \{maxF_q(X(t)) = \left\{max f_{kq}(X(t)) \equiv \sum_{j=1}^{N_q} c_j^k x_j(t), k = \overline{1, K_q}\right\}, q = \overline{1, Q}\}, \quad (1.6)$$

$$\{ max\ F_1(X(t)) = \{max f_k(X(t)) \equiv \sum_{j=1}^{N} c_j^k x_j(t), k = \overline{1, K_1}\}\}, \quad (1.7)$$

Ограничения $G_i\ (X(t))\ \equiv \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\ (t) x_j\ (t) \leq b_i(t), i = \overline{1, M}$, (1.8)

$$G_i\ (X_q(t)) \equiv \sum_{j=1}^{N_q} a_{ij}^q x_j(t) \leq b_i^q(t),\ i = \overline{1, M_q}, q = \overline{1, Q}, \quad (1.9)$$

$$\sum_{j=1}^{N} c_j^k x_j\ (t) \geq b_k(t), k \in K, \quad (1.10)$$

$$0 \leq x_j(t) \leq u_j(t), j = \overline{1, N_q}, q = \overline{1, Q},$$

где $X = \{x_j\ (t), j = \overline{1, N_q}, q = \overline{1, Q}\}$ – вектор переменных N-мерного евклидова пространства, $X \in \boldsymbol{R^n}$; вектор X представляет множество видов продукции, выпускаемых всеми отраслями региона; $x_j\ (t), j = \overline{1, N_q}, N_q \subset N$ – это подмножество видов продукции, которое выпускает каждая q-я отрасль региона $q \in Q$, $\boldsymbol{Q}$ – множество отраслей, которые в модели (1.6)-(1.10) рассматриваются как независимые критерии.

В целом задача (1.6)- (1.10) относится к классу выпуклых векторных задач математического программирования. (1.10) представляют ограничения, которые накладываются на все переменные $X = \{x_j\ (t), j = \overline{1, N_q}, q = \overline{1, Q}\}$; (1.9) – ограничения, накладываемые только на переменные – объемы продукции всех отраслей (независимых критериев);

$X_q = \{x_j\ (t), j = \overline{1, N_q}\}, q = \overline{1, Q}$ – объемы продукции, выпускаемые каждой отраслью;

(1.3)- (1.5) – стандартные ограничения.

$S = \{X \in R^n | G(X) \leq 0, X^{min} \leq X \leq X^{max}\} \neq \emptyset$ – это допустимое множество точек (или более кратко – допустимое множество), задающиеся стандартными ограничениями (1.8)-(1.10) и тривиальными ограничениями $0 \leq x_j\ (t) \leq u_j\ (t), j = \overline{1, N}$. Предполагаем, что допустимое множество точек не пусто и представляет собой компакт, [44, 47].

2.4. Исследование, анализ муниципального (четвертого) уровня управления государства

На муниципальном уровне управления прогноз, планирование и управление направлено, на повышения социального и экономического уровня жизни населения местное самоуправления. В Конституции РФ в 12 статье указано: «В Российской Федерации признается и гарантируется местное самоуправление. Местное самоуправление в пределах своих полномочий самостоятельно. Органы местного самоуправления не входят в систему органов государственной власти».

В муниципальных образованиях, наряду с военными объектами, сосредоточены все промышленные и сельскохозяйственные предприятия, которые: с одной стороны, создают экономическую базу развития экономики государства и создают экономический потенциал будущего развития государства; а с другой стороны, именно эти предприятия определяют основные налоговые поступления, формируют доходную часть бюджета РФ, которая и определяет социально-экономическое развитие государства.

С учетом сказанного, хотелось бы, чтобы муниципальные образования (МО) более активно участвовали в государственной деятельности. Президент Путин В.В. в своем выступлении [8] сказал, что в настоящее время в МО остается лишь 1% от общих налоговых поступлений. Желательно поднять их уровень до 5%. К сожалению, продвижение в этом вопросе остановилось.

Информационная модель развития экономики муниципального образования представлена в [35, 38].

2.5. Исследование, анализ (пятого) уровня управления фирмой (предприятием)и формирование математической модели фирмы

2.5.1. Исследование, анализ уровня управления фирмой (предприятием)

На уровне (пятом) управления фирмой (предприятием) целевая направленность определяется повышением экономического уровня жизни не только акционеров, но и всех участников производства, которые представлены инженерным, производственным, управленческим персоналом. Все участники производства в равной степени формируют прибыль фирмы (предприятия) и только при их совместной деятельности возможен максимальный рост производительности труда, анализ в [29, 30], математическое обеспечение в [42, 43, 44].

2.5.2. Математическая модель управления фирмой (предприятием)

В соответствии с представленными целями и задачами сформулируем математическую модель управления фирмой (предприятием) на пятом уровне управления государства в виде векторной задачи линейного программирования с неоднородными критериями.

$$opt\, F\big(X(t)\big) = \{max\, F_1\big(X(t)\big) = \{max\, f_k\big(X(t)\big) = \sum_{j=1}^{N} c_j^k x_j(t)\,, k = \overline{1, K_1}, \quad (1.11)$$

$$min\, F_2\big(X(t)\big) = \{min\, f_k\big(X(t)\big) = \sum_{j=1}^{N} c_j^k x_j(t)\,, k = \overline{1, K_2}\}\}, \quad (1.12)$$

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\,(t) x_j\,(t) \le b_i\,(t), i = \overline{1, M}, \quad (1.13)$$

$$\sum_{j=1}^{N} c_j^k x_j\,(t) \ge b_k(t), k \in K, \quad (1.14)$$

$$0 \le x_j\,(t) \le u_j\,(t), j = \overline{1, N}, \quad (1.15)$$

где $X = \{x_j\,(t), j = \overline{1, N}\}$ – вектор переменных, т.е. это вектор из N-мерного евклидова пространства R^N, (обозначение $j = \overline{1, N}$ эквивалентно $j = (1, \dots, N)$);

$F(X)$- вектор-функция (векторный критерий), имеющая K – компонент-функций, (K – мощность множества K). Множество K состоит из подмножества K_1 компонент максимизации и подмножества K_2 минимизации: $K = K_1 \cup K_2$, для оценки совокупности критериев вводится обозначение операция «*opt*», которое включает в себя *max* и *min*;

$F_1\big(X(t)\big) = \{max\, f_k\big(X(t)\big), k = \overline{1, K_1}$ – это векторный критерий, компонента которого максимизирует, K_1 – число критериев, а $K_1 \equiv \overline{1, K_1}$- множество критериев максимизации (задача (1.11), (1.13)- (1.15)) представляют собой ВЗЛП с однородными критериями максимизации);

$F_2\big(X(t)\big) = \{min\, f_k\big(X(t)\big), k = \overline{1, K_2}$- векторный критерий, каждая компонента которого минимизируется, $K_2 \equiv \overline{K_1 + 1, K} \equiv \overline{1, K_2}$ – множество критериев минимизации, K_2 – число, (задача (1.12), (1.13)- (1.15)) это ВЗЛП с однородными критериями минимизации).

$K_1 \cup K_2 = K, K_1 \subset K, K_2 \subset K.$

(1.13)- (1.15) – стандартные ограничения.

$$S = \{X \in R^n | G(X) \le 0, X^{min} \le X \le X^{max}\} \ne \emptyset - \quad (1.16)$$

это допустимое множество точек, задающиеся стандартными ограничениями (1.13)-(1.15) и тривиальными ограничениями $0 \le x_j\,(t) \le u_j\,(t), j = \overline{1, N}$. Предполагаем, что допустимое множество точек не пусто и представляет собой компакт, [44, 47].

3. Статистическая информация и Цифровая экономика в развитии социально экономической системы государства

3.1. Статистическая информация

Статистическая информация формируется с трех источников, во-первых, от потребителей, которые заняты материально-техническим обеспечением производства; во-вторых, от производителей, которые реализует технологические процессы организации производства; в-третьих, от производителей, реализующих произведенные товары, услуги. В соответствии с решением Коллегии Евразийской экономической комиссии от 3 сентября 2013 г. № 185 “Об утверждении перечня статистических показателей официальной статистической информации, предоставляемой Евразийской экономической комиссии уполномоченными органами государств – членов Таможенного союза и Единого экономического пространства”, [9], все предприятия ежегодно (ежеквартально) представляют ряд макроэкономических показателей.

Основной из них – это Валовой внутренний продукт (в текущих ценах), который включает информацию – квартальную, годовую по видам экономической деятельности (приложение 1 в [9]) по институциональным секторам (приложение 2 в [9]), по элементам конечного использования (приложение 3 в [9]), по элементам доходов (приложение 4 в [9]).

3.2. Цифровая экономика.

Дадим определение цифровой экономики.

«Цифровая экономика» – это информационное отображение на бумажных и прежде всего на электронных носителях, во-первых, всех материальных средств (которые включают: земельные ресурсы, производственные предприятия, фирмы, товары (включая процесс создания и реализации), финансовые (в т. ч. банки) и государственные организации), и, во-вторых, населения с его финансовыми возможностями, которые (материальные средства и население) в совокупности динамично изменяются в пространстве и во времени».

Для формирования информационного отображения «Цифровой экономики» разработаны цифровые технологии или программное обеспечение, которое представляют технологии сбора, хранения (база данных), обработки, поиска, передачи и представления, данных большого объема [28, 50]. Эти информационные технологии сбора и передачи данных в общем виде (стрелками) представлены в нижней части рис. 1.

Заключение.

Исследование направлено на решение проблемы обеспечения надежности прогнозирования, стратегического планирования в краткосрочной, среднесрочной, долгосрочной перспективе развития экономики государства. А также стратегического социально-экономического развития всех уровней развития государства: мега регионов, регионов, муниципалитетов и финансового бизнеса малых, средних и крупных фирм (предприятий). Методология построена: во-первых, на информационном обеспечении, которое представляется государственными статистическими органами, и цифровой экономики; во-вторых, на математическом моделировании экономических систем (математическое обеспечение); в-третьих, на инвестиционных процессах, которые определяют тенденции развития экономики государства; в-четвертых, на программном обеспечении решения указанных проблем.

ЧАСТЬ 2. **МНОГОМЕРНАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАЗВИТИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ И ФИНАНСОВЫХ СИСТЕМ**

Аннотация. Цель работы состоит в представлении многомерной математики, которая является базой математического и программного обеспечения моделирования развития производственных, экономических и финансовых систем, входящих в основные уровни экономики государства. В рамках теории векторной оптимизации представлены принципы оптимальности решения векторных задач при равнозначных критериях и при заданном приоритете критерия https://rdcu.be/bhZ8i. (Работа "Vector optimization with equivalent and priority criteria" Springer Nature распространяется бесплатно.). На основе теории разработаны конструктивные методы решения задач векторной оптимизации, которые позволяют оценивать экспериментальные данные, во-первых, при равнозначных критериях, во-вторых, при моделировании инженерных, финансово-экономических систем с заданным приоритетом критерия при принятии оптимального решения.

Ключевые слова: Теория многомерной математики, Аксиоматика векторной оптимизации, Равнозначные критерии, Приоритеты критериев, Методы принятия оптимальных решений.

PART 2. **MULTIDIMENSIONAL MATHEMATICS FOR MODELING DEVELOPMENT OF PRODUCTION AND FINANCIAL SYSTEMS**

Abstract. The purpose of the work is to present multidimensional mathematics, which is the basis of mathematical and software for modeling the development of production, economic and financial systems that are part of the main levels of the state's economy. Within the framework of the theory of vector optimization, the principles of optimality of solving vector problems with equivalent criteria and with a given priority of the criterion are presented https://rdcu.be/bhZ8i. (The work "Vector optimization with equivalent and priority criteria» by Springer Nature is distributed free of charge.). On the basis of the theory, constructive methods for solving vector optimization problems

have been developed, which make it possible to evaluate experimental data, firstly, with equivalent criteria, and secondly, when modeling engineering systems with a given criterion priority when making an optimal decision.

Keywords: Theory of Multidimensional Mathematics, Axiomatics of Vector Optimization, Equivalent Criteria, Criteria Priorities, Optimal Decision-Making Methods.

Введение.

Исследование развития производственных, экономических и финансовых систем, входящих в основные уровни экономики государства, показало, что их развитие зависит от некоторого множества функциональных характеристик, которые необходимо учитывать на стадии проектирования. Анализ функционирования таких систем показал, что улучшение по одной из характеристик приводит к ухудшению других характеристик. Для улучшения функционирования производственных, экономических и финансовых систем в целом необходимо улучшения всех характеристик в совокупности [51, 52, 53].

Математическая модель производственных, экономических и финансовых систем представлена многокритериальными задачами оптимизации. Следовательно, требуется решение многокритериальных (векторных) задач математического программирования. Исследования такого класса задач началось более ста лет тому назад в работе Pareto V [40]. Дальнейшее исследования многокритериальной оптимизации проводилось на теоретическом уровне зарубежными [40, 54-60] и русскими авторами [61 – 64], на решении практических задач сначала в области экономики [11-14, 54-66], а за тем в области инженерных систем [69-81].

Цель работы: Исследование проблемы многомерной математик. Характеристика векторной задача линейного программирования. Представление теории, аксиоматики и аксиоматических методов. Разработка конструктивных методов решения векторных задач математического программирования при равнозначных критериях и при заданном приоритете критерия. Численная реализация векторной задачи линейного программирования – математической модели производственных, экономических и финансовых систем, входящих в основные уровни экономики государства.

В области математического и программного обеспечения представлена характеристика, проведён анализ и исследование задач векторной оптимизации, [40-47]. В рамках теории векторной оптимизации представлены аксиоматика и принципы оптимальности решения векторных задач при равнозначных критериях и при заданном приоритете критерия. На основе принципов оптимальности разработаны конструктивные методы решения задач векторной оптимизации, которые позволяют принимать оптимальное решение, во-первых, при равнозначных критериях, во-вторых, при заданном приоритете критерия.

1. Введение в многомерную математику: Анализ, Векторная задача математического программирования, Теория, Аксиомы и Аксиоматические методы, Принципы оптимальности

Математические модели государства и его составных частей: мезо-регионов, регионов, муниципальных образований, предприятий (фирм) представлены векторными задачами математического программирования (ВЗМП), [10, 11, 21, 44, 50], (аналогично с инженерными задачами [71-81]). Развитие экономических, финансовых систем связаны с моделированием, прогнозированием, формированием на их основе стратегического планирования и инновационного развития на базе векторной оптимизации. Дальнейшее развитие исследования работ по теории векторной оптимизации привела к формированию "Многомерной математики".

1.1. Анализ развития современной математики.

Анализ математики современной проведен в соответствии [51, с. 560-563].

Математика – это наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира. Математика, как наука стала возможной после накопления достаточно большого фактического материала, возникла в древней Греции в 6-5 веках до новой эры, в соответствии с [51] четыре периода.

1. Зарождение математики. На ранних стадиях развития счет предметов бытия привел к созданию простейших понятий арифметики натуральных чисел.

2. Период элементарной математики. Исследование предметов бытия привел к созданию простейших понятий арифметических вычислений, определения площадей, объемов и т.п. возникает математика, как наука.

3. Период создания математики переменных величин. С 17 века начинается новый период развития математики. На первый план выдвигается ***понятие функции***, определяющее взаимосвязь параметров исследуемого объекта. Изучение переменных величин и функциональных зависимостей приводит далее к основным понятиям математического анализа, к понятию предела, производной, дифференциала и интеграла. Создается анализ бесконечно малых в виде *дифференциального и интегрального* вычислений, позволяющее связывать конечные изменения переменных величин с их поведением на принимаемое решение (функцию). Законы механики, физики записываются в форме дифференциальных уравнений, задача интегрирования этих уравнений становится одной из важнейших задач математики.

4. Современная математики. Все созданные в 17 и 18 веках разделы математического анализа продолжали развиваться в 19, 20 и 21 веках. В качестве основного аппарата новых областей механики и математической физики усиленно разрабатывается теория дифференциальных уравнений обыкновенных и уравнений с частными производными, вычислительной математики. Проблемы нахождения наилучшего решения в задачах управления физическими или механическими системами, описываемые дифференциальными уравнениями, привели к созданию *теории оптимального управления*.

В целом процесс развития математики показывает, что при решении математических проблем, происходило исследование и анализ отдельной ***функции (одномерной)***, зависящей от некоторого множества переменных (параметров) исследуемого объекта, системы. (Подробнее смотри в [51, с. 560-563]).

В реальной жизни исследуемый объект, система при своем функционировании (развитии) характеризуется некоторым набором функциональных характеристик, которые зависят от одних и тех же параметров системы. Отсюда проблема многомерности исследуемых объектов, систем стала общенаучной. Для решения проблемы многомерности мы представим векторную (многомерную) задачу оптимизации и рассмотрим теорию (аксиоматику, принципы оптимальности) ее решения, [43, 44, 45-47].

1.2. Векторная задача математического программирования

Векторная задача математического программирования (ВЗМП) – это стандартная задача математического программирования, имеющая некоторое множество критериев, которые в совокупности представляют вектор критериев. ВЗМП подразделяются на однородные и неоднородные ВЗМП.

Однородные ВЗМП максимизации – это векторная задача, у которой каждая компонента множества критериев направлена на максимизацию.

Однородные ВЗМП минимизации – это векторная задача, у которой каждая компонента множества критериев направлена на минимизацию.

Неоднородные ВЗМП – это векторная задача, у которой множество критериев разделено на два подмножества (вектора) критериев – максимизации и минимизации соответственно, т. е. неоднородные ВЗМП – это объединение двух видов однородных задач.

В соответствии с этими определениями представим выпуклую векторную задачу математического программирования с неоднородными критериями.

$$Opt\, F(X) = \{\max F_1(X) = \{\max f_k\,(X), k = \overline{1, K_1}\}, \tag{2.1}$$

$$\min F_2(X) = \{\min f_k\,(X), k = \overline{K_1 + 1, K} = K_2 \subset K\}\}, \tag{2.2}$$

$$G\,(X) \leq B, \tag{2.3}$$

$$X \geq 0, \tag{2.4}$$

где $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ – вектор переменных, т.е. это вектор из N-мерного евклидова пространства R^N; $F(X)$ – вектор-функция (векторный критерий), имеющая K – компонент-функций, $F(X)=\{f_k(X), k=\overline{1,K}\}$. Множество $\boldsymbol{K}$ состоит из подмножества $\boldsymbol{K}_1$ компонент максимизации и подмножества $\boldsymbol{K}_2$ минимизации; $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_1 \cup \boldsymbol{K}_2$, для оценки совокупности критериев вводится обозначение операция «*opt*», которое включает в себя *max* и *min*;

$F_1(X)=\{f_k(X), k=\overline{1,K_1}\}$ – (2.5)

это векторные критерии максимизации, K_1 – множество критериев максимизации, $K_1 \equiv \overline{1,K_1}$, $\boldsymbol{K}$ – число, (задача (2.1), (2.2)-(2.4) является однородной задачей максимизации). Предполагаем, что $f_k(X), k=\overline{1,K_1}$ являются выпуклыми функциями;

$F_2(X)=\{f_k(X), k=\overline{1,K_2}\}$ – (2.6)

это векторные критерии, каждая компонента которого минимизируется, $K_2 \equiv \overline{K_1+1,K} \equiv \overline{1,K_2}$ – множество критериев минимизации, $\boldsymbol{K}_2$ – число, (задача (2.2)-(2.4) является однородной задачей минимизации). Мы предполагаем, что $f_k(X), k=\overline{1,K_2}$ являются выпуклыми функциями (we will sometimes call these the minimization criteria):

$\boldsymbol{K}_1 \cup \boldsymbol{K}_2=\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{K}_1 \subset \boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{K}_2 \subset \boldsymbol{K}$. (2.7)

$G(X) \leq B, X \geq 0$ – стандартные ограничения. $g_i(X) \leq b_i, i=1,\ldots,M$, (2.8)

где b_i – множество реальных чисел и $g_i(X)$ не пустое выпуклое множество точек.

$\boldsymbol{S}=\{X \in \boldsymbol{R}^n | X \geq 0, G(X) \leq B, X^{min} \leq X \leq X^{max}\} \neq \emptyset$ – (2.9)

это допустимое множество точек (или более кратко – допустимое множество), задающиеся стандартными ограничениями (2.3)- (2.4) и тривиальными ограничениями $X \geq 0$. Предполагаем, что допустимое множество точек не пусто и представляет собой компакт. Векторная функция (критерий) минимизации $F_2(X)$может быть преобразован в векторную функцию (критерий) максимизации умножением каждой компоненты $F_2(X)$ на минус единицу. Векторный критерий $F_2(X)$ введен в ВЗМП (2.1)- (2.4) для того, чтобы показать, что в задаче имеется два подмножества критериев $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ с различными направлениями оптимизации.

Предполагаем, что точки оптимума, полученные по каждому критерию, не совпадают хотя бы для двух критериев. Если все точки оптимума совпадают между собой для всех критериев, то считаем решение тривиально.

1.3. Теория векторной оптимизации

Теория векторной оптимизации направлена на решение векторных (многокритериальных) задач математического программирования (2.1)- (2.4) с однородными и неоднородными критериями. Теория векторной оптимизации включает теоретические основы: аксиоматика, принципы оптимальности и методы решения векторных задач, во-первых, с равнозначными критериями и, во-вторых, с заданным приоритетом критерия. В совокупности теория векторной оптимизации представляет математический аппарат моделирования и принятия оптимального решения «объекта принятия решений». В соответствии с этим определением «Теория векторной оптимизации" включает следующие разделы.

Основные теоретические понятия и определения, которые будут использованы при построении аксиоматики (аксиоматики Машунина Ю.К.), принципов оптимальности и методы решения задач векторной оптимизации. Аксиоматика Машунина Ю.К. подразделяется на аксиоматику, принципы оптимальности и методы решения векторных задач, во-первых, с равнозначными критериями и во-вторых, с заданным приоритетом критерия.

Концепция решения задач векторной оптимизации с равнозначными критериями. Концепция векторной оптимизации с приоритетом критерия. Симметрия в векторных задачах математического программирования: исследование, анализ.

«Объектом принятия решений» является: социальная система, экономическая и техническая система. Математический аппарат позволяет выбрать любую точку из множества точек, оптимальных по Парето, и показать ее оптимальность. Мы представили аксиоматику, принцип оптимальности и методы решения задач векторной оптимизации (2.1)- (2.4) с равнозначными критериями и заданным приоритетом критериев [6, 20]. Для простоты исследования критерии и ограничения ВЗМП (2.1)- (2.4) представлены полиномами второй степени, т.е. рассматриваются выпуклые векторные задачи, которые также включают векторные задачи линейного программирования. Выпуклые ВЗМП характеризуются свойством, что точка оптимума существует и такая точка только одна (Теорема Вейерштрасса).

1.4. Теоретические основы: Аксиомы и Аксиоматические методы.

Аксиома – это утверждение, не требующее логического доказательства. На основе этих утверждений строится та или иная теория.

Аксиоматический метод – это способ построения научной теории, при котором в основу теории кладутся некоторые исходные положения, называемые Аксиомами теории. В итоге все остальные положения теории получаются как логические следствия аксиом, [41]. В математике Аксиоматический метод зародился в работах древнегреческих геометров. Образцом аксиоматического метода является древнегреческий ученый Евклид, аксиомы которого были заложены в его знаменитом сочинении «Начала».

Дальнейшее развитие аксиоматического метода получил в работах Д. Гильберта в виде так называемого метода формализма системы. Общая схема построения произвольной формальной системы («S») включает:

1. *Язык системы*, в том числе алфавит – это перечень элементарных символов; правила образования (синтаксис), по которым строится формулы «S».

2. *Аксиомы системы* «S», которые представляют некоторое множество формул.

3. *Правила* вывода системы «*S*» [41].

В приложении к решению задачи векторной оптимизации Аксиоматика подразделяется на два раздела: 1. Аксиоматика решения задачи векторной оптимизации с равнозначными критериями; 2. Аксиоматика решения задачи векторной оптимизации с заданным приоритетом критериев. Только при построении первоначальной аксиоматики возможно в дальнейшем построение принципа оптимальности и вытекающих из него алгоритмов решения векторных задач математического программирования.

2. Теория, аксиоматика, принцип оптимальности и методы решения задач многомерной математики (векторной оптимизации)

2.1. Теория, аксиоматика, принцип оптимальности и методы решения задач векторной оптимизации: равнозначные критерии

Аксиоматика векторной оптимизации с равнозначными критериями, как и теоретическая аксиоматика, рекомендованная Д. Гильбертом [41, с. 111], включает три раздела:

1) языком системы в виде определений нормализации критериев и относительной оценки;

2) аксиоматикой равенства критериев в задаче векторной оптимизации; 3) принципом оптимальности решения векторной задачи, на основе которого формируется конструктивный метод решения задачи векторной оптимизации с равнозначными критериями.

2.1.1. Язык системы: Нормализация критериев, относительная оценка

*Определение 1. **Нормализация критериев***.

Нормализация критериев (математическая операция: сдвиг плюс нормирование) представляет однозначное отображение функции $f_k(X)\ \forall k \in K$, в одномерное пространство R^1 (сама функция $f_k(X)\ \forall k \in K$ представляет собой функцию преобразования из N-мерного евклидова пространства $\boldsymbol{R^N}$ в $\boldsymbol{R^1}$). Для нормализации критериев в векторных задачах будут использоваться линейные преобразования:

$$f_k(X) = a_k f'_k(X) + c_k\ \forall k \in K, \text{ или} \quad (2.10)$$

$$f_k(X) = (f'_k(X) + c_k)/a_k\ \forall k \in K, \quad (2.11)$$

где $f'_k(X), k = \overline{1,K}$ – старое (до нормализации) значение критерия; $f_k(X), k = \overline{1,K}$ – нормализованное значение, a_k, c_k- постоянные.

Нормализация критериев (2.11) $f_k(X) = (f'_k(X) + c_k)/a_k\ \forall k \in K$ представляет простое (линейное) инвариантное преобразование полинома, в результате которого структура полинома остается неизменной. В оптимизационной задаче нормализация критериев $f_k(X) = (f'_k(X) + c_k)/a_k\ \forall k \in K$ не влияет на результат решения. Действительно, если решается выпуклая оптимизационная задача:

$\boldsymbol{max}_{X\in S}\, f\,(X)$, то в точке оптимума $X^*\in S$: $\frac{df(X^*)}{\mathrm{d}X} = 0$. (2.12)

В общем случае (в том числе с нормализацией критерия (2.11)) решается задача:

$\boldsymbol{max}_{X\in S}\,(a_k f_k'(X) + c_k)$, (2.13)

то в точке оптимума $X^*\in S$:

$\frac{d\,(a_k f(X^*)+c_k)}{\mathrm{d}X} = a_k \frac{d(f(X^*))}{\mathrm{d}X} + \frac{d\,(c_k)}{\mathrm{d}X} = 0$. (2.14)

Результат идентичен, т.е. точка оптимума $X_k^*, k = \overline{1,K}$ является одной и той же для ненормализованных и нормализованных задач.

Определение 2. ***Определение относительной оценки функции (критерия).*** В векторной задаче (2.1)-(2.4) введем обозначение:

$\lambda_k(X) = \frac{f_k(X)-f_k^0}{f_k^*-f_k^0}, \forall k \in \boldsymbol{K}$ (2.15)

$\lambda_k(X)$ – *это относительная оценка*, которая представляет нормализованный критерий: $f_k(X)$, $\forall k \in \boldsymbol{K}$ в точке $X \in \boldsymbol{S}$, где в точке $X \in \boldsymbol{S}$ величина k-го критерия равна $f_k(X)$;

f_k^* – величина k-го критерия в точке оптимума $X \in \boldsymbol{S}$, полученной при решении векторной задачи (2.1)- (2.4) отдельно по k-му критерию; f_k^0- наихудшая величина k-го критерия на допустимом множестве $\boldsymbol{S}$ в векторной задаче. Относительная оценка $\lambda_k(X)\ \forall k \in K$, во-первых, измеряется в относительных единицах; во-вторых, относительная оценка $\lambda_k(X)\ \forall k \in K$ на допустимом множестве $\boldsymbol{S}$ меняется с нуля в точке X_k^0 к единице в точке оптимума X_k^*:

$\forall k \in \boldsymbol{K} \lim_{X\to X_k^0} \lambda_k(X) = 0; \forall k \in \boldsymbol{K} \lim_{X\to X_k^*} \lambda_k(X) = 1$:

Относительная оценка $\lambda_k(X)\ \forall k \in K$ находится в следующих пределах:

$\forall k \in \boldsymbol{K}\ 0 \le \lambda_k(X) \le 1, X \in \boldsymbol{S}$, (2.16)

В результате такой нормализации все критерии ВЗМП (2.1)-(2.4) соизмеримы в относительных единицах, что позволяет, сравнимая их друг с другом, использовать критерии при совместной оптимизации.

Определение 3. ***Операция сравнения относительных оценок функции (критерия) между собой***.

Так как, любая функция (критерий) представлен в относительных оценках функций $\lambda_k(X)\ \forall k \in K$, которые лежат пределах (2.16) $\forall k \in \boldsymbol{K}\ 0 \le \lambda_k(X) \le 1$, то возможно сравнение относительных оценок по числовой величине. Для сравнения используется операция «вычитания». Если сравнивается две функции (критерия), измеренные в относительных оценках $\lambda_{k=1}(X)$ и $\lambda_{k=2}(X)\ \forall k \in K$, то возможны три ситуации:

первая, когда $\lambda_{k=1}(X) > \lambda_{k=2}(X)$;

вторая, когда $\lambda_{k=1}(X) = \lambda_{k=2}(X)$; (2.17)

третья, когда $\lambda_{k=1}(X) < \lambda_{k=2}(X)$. (2.18)

Первая и третья ситуация исследуется в разделе 6.

В разделе 2.2 исследуется вторая ситуация (2.17).

2.1.2. Аксиома равенства критериев в задаче векторной оптимизации.

Аксиома 1. ***О равенстве и равнозначности критериев в допустимой точке векторной задачи математического программирования***.

В векторной задаче оптимизации два критерия с индексами $l \in \boldsymbol{K}, q \in \boldsymbol{K}$ будем считать равнозначными в точке $X \in \boldsymbol{S}$, если относительные оценки по k-му и q-му критерию равны между собой в этой точке: $\lambda_l(X) = \lambda_q(X), l, q \in \boldsymbol{K}$.

Пояснение. Если в точке $X \in \boldsymbol{S}$ функции (критерии) в относительных единицах будут равны: $\lambda_l(X) = 0{,}45\ l \in \boldsymbol{K}$ и $\lambda_q(X) = 0{,}45, q \in \boldsymbol{K}$ (т.е. 45% от своей оптимальной величины, которая в относительных единицах равна 1), то такие критерии не «равны» друг другу, а равнозначны по своему числовому значению. И каждый критерий $l \in \boldsymbol{K}$, $q \in \boldsymbol{K}$ несет свой функциональный смысл, числовая величина которого может быть получена, используя нормализацию критериев (2.15).

Определение 4. Определение минимального относительного уровня.

Относительный уровень λ в векторной задаче представляет нижнюю оценку точки $X \in S$ среди всех относительных оценок $\lambda_k(X), k = \overline{1,K}$:

$\forall X \in \boldsymbol{S}\ \lambda \le \lambda_k(X), k = \overline{1,K},$ (2.19)

нижний уровень для выполнения условия (2.19) в точке $X \in S$ определяется как:

$\forall X \in S\ \lambda = \boldsymbol{min}_{k \in K} \lambda_k(X).$ (2.20)

Соотношения (2.19) и (2.20) являются взаимосвязанными. Они служат переходом от операции (2.20) определения min к ограничениям (2.19) и наоборот. Относительный уровень λ позволяет объединить все критерии в векторной задаче одной числовой характеристикой λ и производить над ней определенные операции, тем самым, выполняя эти операции над всеми критериями, измеренными в относительных единицах.

Относительный уровень λ функционально зависит от переменной $X \in \boldsymbol{S}$. Поэтому, изменяя X, можем изменять все $\lambda_k(X), k = \overline{1,K}$ и нижний уровень $\lambda = \boldsymbol{min}_{k \in K} \lambda_k(X)$, который является характеристикой многомерной (многофункциональной) системы.

Пояснение. Величина относительной оценки $\forall k \in K\ \lambda_k(X)$ является характеристикой *одномерной системы*, а величина минимального относительного уровня $\lambda = \boldsymbol{min}_{k \in K} \lambda_k(X)$ является характеристикой *многомерной* математики.

2.1.3. Принцип оптимальности решения многомерной (векторной) задачи оптимизации с равнозначными критериями.

Определение 5. ***Принцип оптимальности решения векторной задачи с равнозначными критериями.***

Векторная задача математического программирования при равнозначных критериях решена, если найдена точка $X^o \in \boldsymbol{S}$ и максимальный уровень λ^o (верхний индекс о – оптимум) среди всех относительных оценок такой, что

$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{X \in S} \boldsymbol{min}_{k \in K} \lambda_k(X)$ (2.21)

Используя взаимосвязь выражений (2.19) и (2.20), преобразуем максиминную задачу (2.21) в экстремальную задачу:

$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{X \in S}\ \lambda$ (2.22)

при ограничениях $\lambda \le \lambda_k(X), k = \overline{1,K}.$ (2.23)

Полученную задачу (2.22)- (2.23) назовем λ-задачей. λ-задача (2.22)-(2.23) имеет (N+1) размерность, как следствие результат решения λ-задачи (2.22)-(2.23) представляет собой оптимальный вектор $X^o \in R^{N+1}$, (N+1)-я компонента которого суть величина λ^o, т. е. $\boldsymbol{X^o} = \{x_1^o,\ x_2^o, \dots, x_N^o, x_{N+1}^o\}$, при этом $x_{N+1}^o = \lambda^o$, (N+1) компонента вектора X^o выделена в λ^o.

Полученная пара $\{\lambda^o, X^o\} = \boldsymbol{X^o}$ характеризует оптимальное решение λ-задачи (2.22)-(2.23) и соответственно векторной задачи математического программирования (2.1)-(2.4) с равнозначными критериями, решенную на основе нормализации критериев и принципе гарантированного результата. Назовем в оптимальном решении $\boldsymbol{X^o} = \{\lambda^o, X^o\}$, X^o – оптимальной точкой, а λ^o – максимальным уровнем.

***Теорема** 1. **Теорема о двух наиболее противоречивых критериях в ВЗМП с равнозначными критериями**.*

В выпуклой векторной задаче математического программирования (2.1)-(2.4) с равнозначными критериями, решенной на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата, в оптимальной точке $\boldsymbol{X^o} = \{\lambda^o, X^o\}$ всегда имеется два критерия – обозначим их индексами $q \in \boldsymbol{K}, p \in \boldsymbol{K}$ (которые являются самыми противоречивыми из множества критериев $k = \overline{1,K}$), и для которых выполняется равенство:

$\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_p(X^o), q, p \in \boldsymbol{K}, X \in \boldsymbol{S},$ (2.24)

и другие критерии определяются неравенством:

$\lambda^o \le \lambda_k(X^o), \forall k \in \boldsymbol{K}, q \ne p \ne k.$ (2.25)

Впервые доказательство теоремы 1 представлено в [15, стр.22], в дальнейшем повторено в работе [19, стр.234]. Точка X^o является оптимальным решением ВЗМП.

2.1.4. Конструктивный метод решения задачи векторной оптимизации с равнозначными критериями.

Для решения векторной задачи математического программирования (2.1)-(2.4) разработан метод, основанный на нормализации критериев, аксиоматике и принципе максимина (гарантированного результата). Конструктивный метод решения векторной задачи оптимизации с равнозначными критериями включает два блока: *1-й блок* «Системный анализ» – разделен на три шага; *2-й блок* «Принятие оптимального решения», включающий два шага: построения λ-задачи и ее решения.

Блок 1. Системный анализ.

Шаг 1. Решается задача (2.1)- (2.4) по каждому критерию отдельно: $\forall k \in \boldsymbol{K}_1$ решается на максимум, а для $\forall k \in \boldsymbol{K}_2$ решается на минимум. В результате получим:

X_k^*- точку оптимума по соответствующему критерию, $k = \overline{1, K}$;

$f_k^* = f_k\ (X_k^*)$ – величина k-го критерия в этой точке, $k = \overline{1, K}$.

Шаг 2. Определяем наихудшую величину каждого критерия (антиоптимум): $f_k^0, k = \overline{1, K}$. Для чего решается задача (2.1)- (2.4) для каждого критерия $k = \overline{1, \boldsymbol{K}_1}$ на минимум:

$f_k^0 = min\ f_k\ (X), G\ (X) \le B, X \ge 0, k = \overline{1, \boldsymbol{K}_1}$;

для каждого критерия $k = \overline{1, \boldsymbol{K}_2}$ на максимум:

$f_k^0 = max\ f_k\ (X), G\ (X) \le B, X \ge 0, k = \overline{1, \boldsymbol{K}_2}$.

В результате решения получим:

$X_k^0 = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ – точка оптимума по соответствующему критерию, $k = \overline{1, K}$;

$f_k^0 = f_k\ (X_k^0)$ – величина k-го критерия в этой точке, $k = \overline{1, K}$.

Шаг 3. Выполняется системный анализ множества точек, оптимальных по Парето. В точках $X^* = \{X_k^*, k = \overline{1, K}\}$ определяются величины целевых функций $F\ (X^*)$ и относительных оценок $\lambda\ (X^*)$: $\lambda_k(X) = \frac{f_k\ (X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, \forall k \in \boldsymbol{K}$. Результат системного анализа:

$$F\ (X^*) = \{f_k\ (X_k^*), q = \overline{1, K}, k = \overline{1, K}\} = \begin{vmatrix} f_1(X_1^*), \dots, f_K(X_1^*) \\ \dots \\ f_1\ (X_K^*), \dots, f_K\ (X_K^*) \end{vmatrix}, \quad (2.26)$$

$$\lambda\ (X^*) = \{\lambda_q\ (X_k^*), q = \overline{1, K}, k = \overline{1, K}\} = \begin{vmatrix} \lambda_1(X_1^*), \dots, \lambda_K(X_1^*) \\ \dots \\ \lambda_1\ (X_K^*), \dots, \lambda_K\ (X_K^*) \end{vmatrix}. \quad (2.27)$$

Любая относительная оценка (2.27) лежит в пределах $0 \le \lambda_k(X) \le 1, k = \overline{1, K}$.

Из результатов системного анализа (2.26)- (2.27) вытекает проблема: Найти такую (оптимальную) точку, в которой все относительные оценки: $\lambda_q\ (X), q = \overline{1, K}$ были близки к единице. На решение этой проблемы направлена λ-задача.

Блок 2. Принятие оптимального решения. Включает два шага.

Шаг 4. Построение λ-задачи. Создание λ-задачи осуществляется в два этапа: первоначально строится максиминная задача оптимизации с эквивалентными критериями, которые на втором этапе преобразуются в стандартную задачу математического программирования, названной λ-задачей. Для построения максиминная задача используем определение 2:

$\forall X \in \boldsymbol{S}\ \lambda = \boldsymbol{min}_{\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{K}} \lambda_k\ (X)$.

Нижний уровень λ максимизируем по $X \in S$. В результате сформулируем максиминную задачу оптимизации с нормализованными критериями:

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{S}} \boldsymbol{min}_{\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{K}} \lambda_k\ (X). \quad (2.28)$$

На втором этапе задача (2.28) преобразуется в стандартную задачу математического программирования, названную λ-задача:

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{S}}\ \lambda,\ \lambda^o = \boldsymbol{max}_{\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{S}}\ \lambda, \quad (2.29)$$

$$\lambda - \lambda_k(X) \le 0, k = \overline{1, K}, \to \lambda - \frac{f_k\ (X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0} \le 0, k = \overline{1, K}, \quad (2.30)$$

$$G\ (X) \le B, X \ge 0,\ G\ (X) \le B, X \ge 0, \quad (2.31)$$

где вектор неизвестных $\boldsymbol{X}$ имеет размерность $N+1$: $X = \{\lambda, x_1, \dots, x_N\}$.

Шаг 5. Решение λ-задачи. λ-задача (2.29)-(2.31) – стандартная задача выпуклого программирования, для ее решения используются стандартные методы. В результате решения λ-задачи получим:

$\boldsymbol{X^o} = \{\lambda^o, X^o\}$ – точку оптимума; (2.32)

$f_k(X^o), k = \overline{1, K}$- величины критериев в этой точке; (2.33)

$\lambda_k(X^o) = \frac{f_k(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}$- величины относительных оценок; (2.34)

λ^o – максимальную относительную оценку, являющаяся максимальным нижним уровнем для относительных оценок $\lambda_k(X^o)$. λ^o – гарантированный результат в относительных единицах.

λ^o гарантирует, что в точке X^o относительные оценки $\lambda_k(X^o)$ больше или равны λ^o:

$\lambda_k(X^o) \geq \boldsymbol{\lambda^o}, k = \overline{1, K}$ or $\boldsymbol{\lambda^o} \leq \lambda_k(X^o), k = \overline{1, K}, X^o \in \boldsymbol{S}$, (2.35)

и в соответствии с теоремой 1 точка оптимума $X^o = \{\boldsymbol{\lambda^o}, x_1, \dots, x_N\}$ является оптимальной по Парето.

2.2. Теория, аксиоматика, принцип оптимальности и методы решения задач векторной оптимизации: с приоритетом критерия

В определении 3 указано, что если сравнивать две функции (критерия), измеренных в относительных оценках $\lambda_{k=1}(X)$ и $\lambda_{k=2}(X)\, \forall k \in K$, то возможны три ситуации. Вторая ситуация, когда $\lambda_{k=1}(X) = \lambda_{k=2}(X)$ исследована в разделе 2.1 (равнозначные критерии). Ситуации: первая, когда $\lambda_{k=1}(X) > \lambda_{k=2}(X)$, и третья, когда $\lambda_{k=1}(X) < \lambda_{k=2}(X)$, исследуются в этом разделе. Такие ситуации определяются, как задачи с приоритетом критерия.

Для построения методов решения проблемы векторной оптимизации с приоритетом критерия мы введем следующие определения: О приоритете одного критерия над другим; О числовом выражении приоритета критерия над другим; О заданном числовом выражении приоритета одного критерия над другим; О нижнем уровне среди всех относительных оценок с приоритетом критерия; О подмножестве точек, приоритетных по критерию; Принцип оптимальности 2 – Решение векторной задачи с заданным приоритетом критерия, [17, 43, 44].

2.2.1. Аксиоматика векторной оптимизации с приоритетом критерия

Язык системы аксиоматики решения векторной задачи с заданным приоритетом критерия включает определения: 1) Приоритет одного критерия над другим; 2) Числовое значение приоритета критерия; 3) Нижний уровень критерия среди всех относительных оценок с приоритетом критерия.

Определение 6. О приоритете одного критерия над другим.

Критерий $q \in \boldsymbol{K}$ в векторной задаче (2.1)- (2.4) в точке $X \in \boldsymbol{S}$ имеет приоритет над другими критериями $k = \overline{1, K}$, если относительная оценка $\lambda_q(X)$ по этому критерию больше или равна относительных оценок $\lambda_k(X)$ других критериев, т. е.:

$\lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), k = \overline{1, K}$, (2.36)

строгий приоритет, если хотя бы для одного критерия $t \in \boldsymbol{K}$:

$\lambda_q(X) > \lambda_k(X), t \neq q$, а для остальных критериев $\lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), k = \overline{1, K}, k \neq t$. (2.37)

Введением определения приоритета критерия $q \in \boldsymbol{K}$ в ВЗМП (2.1)-(2.4) выполнено переопределение раннего понятия приоритета. Если раньше в него вкладывалось интуитивное понятие о важности этого критерия, то сейчас эта "важность" определяется математически: чем больше относительная оценка q-го критерия над другими, тем он важнее (приоритетнее), и наиболее высокий приоритет в точке оптимума $X_k^*, \forall q \in \boldsymbol{K}$.

Из определения выражения приоритета критерия $q \in \boldsymbol{K}$ в векторной задаче в уравнениях (2.1)- (2.4) следует, что возможная область соответствующая множеству точек $\boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}$, которое характеризуется как $\lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), \forall k \neq q, \forall X \in \boldsymbol{S}_q$. Однако, вопрос на сколько критерий $q \in \boldsymbol{K}$ в точке множества $\boldsymbol{S}_q$ имеет больший приоритет относительно другого критерия остается открытым. Для ответа на этот вопрос, мы вводим коэффициент связи между парой относительных оценок q и k, что, в целом, представляет вектор:

$P^q(X) = \{p_k^q(X) \mid k = \overline{1, K}\}, q \in \boldsymbol{K}\ \forall X \in \boldsymbol{S}_q$. (2.38)

Определение 7. О числовом выражении приоритета критерия над другими.

В векторной задаче (2.1)- (2.4) с приоритетом критерия q-го над другими критериями $k = \overline{1, K}$, для $\forall X \in \boldsymbol{S}_q$, вектор $P^q(X)$ показывает во сколько раз относительная оценка $\lambda_q(X), q \in \boldsymbol{K}$, больше относительных оценок $\lambda_k(X), k = \overline{1, K}$:

$$P^q(X) = \left\{p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}, k = \overline{1, K}\right\}, p_k^q(X) \geq 1 \ \forall X \in \boldsymbol{S}_q \subset S, k = \overline{1, K}, \forall q \in \boldsymbol{K}. \quad (2.39)$$

Такое отношение $p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}$ назовем числовым выражением приоритета q-го критерия над остальными критериями $k = \overline{1, K}$.

Определение 7а. О заданном числовом выражении приоритета одного критерия над другим. В векторной задаче (2.1)- (2.4) с приоритетом критерия $q \in \boldsymbol{K}$ для $\forall X \in \boldsymbol{S}$ вектор $P^q = \{p_k^q, k = \overline{1, K}\}$, считается заданным лицом, принимающим решения, (ЛПР), если задана каждая компонента этого вектора. Заданная ЛПР компонента p_k^q, с точки зрения ЛПР, показывает во сколько раз относительная оценка $\lambda_q(X), q \in \boldsymbol{K}$ больше остальных относительных оценок $\lambda_k(X), k = \overline{1, K}$. Вектор $p_k^q, k = \overline{1, K}$ является заданным числовым выражением приоритета q-го критерия над остальными критериями $k = \overline{1, K}$:

$$P^q(X) = \{p_k^q(X), k = \overline{1, K}\}, p_k^q(X) \geq 1, \forall X \in \boldsymbol{S}_q \subset S, k = \overline{1, K}, \forall q \in \boldsymbol{K}. \quad (2.40)$$

Векторная задача (2.1)– (2.4), в которой задан приоритет какого-либо из критериев, называют векторной задачей с заданным приоритетом критерия. Проблема задачи вектора приоритетов возникает тогда, когда необходимо определить точку $X^o \in \boldsymbol{S}$ по заданному вектору приоритетов.

При операции сравнения относительных оценок с приоритетом критерия $q \in \boldsymbol{K}$, аналогично, как и в задаче с эквивалентными критериями, введем дополнительную числовую характеристику λ, которую назовем *уровнем*.

Определение 8. О нижнем уровне среди всех относительных оценок с приоритетом критерия. Уровень λ является нижним среди всех относительных оценок с приоритетом критерия $q \in \boldsymbol{K}$, таким, что

$$\lambda \leq p_k^q \lambda_k(X), k = \overline{1, K}, q \in \boldsymbol{K}, \forall X \in \boldsymbol{S}_q \subset S; \quad (2.41)$$

нижний уровень для выполнения условия (2.41) определяется решением задачи:

$$\lambda = min_{k \in K} p_k^q \lambda_k(X), q \in \boldsymbol{K}, \forall X \in \boldsymbol{S}_q \subset S. \quad (2.42)$$

Соотношения (2.41) и (2.42) являются взаимосвязанными и служат в дальнейшем переходом от операции определения min к ограничениям и наоборот. В разделе 2.1 мы дали определение точки $X^o \in \boldsymbol{S}$, оптимальной по Парето, с эквивалентными критериями. Рассматривая данное определение как исходное, мы построим ряд аксиом деления допустимого множества точек $\boldsymbol{S}$, во-первых, как подмножество точек, оптимальных по Парето S^o, и, во-вторых, на подмножество точек $\boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}, q \in \boldsymbol{K}$, приоритетным на q -му критерию.

2.2.2. Аксиоматика приоритета критериев в задаче векторной оптимизации.

Аксиома 2. О подмножестве точек, приоритетных по критерию в задаче векторной оптимизации.

В векторной задаче (2.1)-(2.4) подмножество точек $\boldsymbol{S}_q \subset S$ называется областью приоритета критерия $q \in K$ над другими критериями, если

$\forall X \in \boldsymbol{S}_q \ \forall k \in \boldsymbol{K} \ \lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), q \neq k$.

Это определение распространяется и на множество точек $\boldsymbol{S}^o$, оптимальных по Парето, что дается следующим определением.

Аксиома 2а. ***О подмножестве точек, приоритетных по критерию, на множестве точек оптимальных по Парето***.

В векторной задаче (2.1)- (2.4) подмножество точек $\boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}^o \subset$ S называется областью приоритета критерия $q \in \boldsymbol{K}$ над другими критериями, если $\forall$X $\in S_q^o \ \forall k \in K \ \lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), q \neq k$. Дадим некоторые пояснения.

Аксиома 2 и 2а позволила представить в векторной проблеме (2.1)– (2.4) допустимое множество точек $\boldsymbol{S}$, включая подмножество точек, оптимальных по Парето, $\boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S}$, в подмножества:

одно подмножество точек $\boldsymbol{S}' \subset \boldsymbol{S}$, где критерии эквивалентны, и подмножество точек $\boldsymbol{S}'$, пересекаясь с подмножеством точек $\boldsymbol{S}^o$, выделяет подмножество точек, оптимальных по Парето, в подмножество с эквивалентными критериями $\boldsymbol{S}^{oo} = \boldsymbol{S}' \cap \boldsymbol{S}^o$, которое, как это показано далее, состоит из одной точки $X^o \in \boldsymbol{S}$, т.е.

$$X^o = \boldsymbol{S}^{oo} = \boldsymbol{S}' \cap \boldsymbol{S}^o, \boldsymbol{S}' \in \boldsymbol{S}, \boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S}; \tag{2.43}$$

«$\boldsymbol{K}$» подмножеств точек, где у каждого критерия $q = \overline{1, K}$ имеется приоритет над другими критериями $k = \overline{1, K}, q \neq k$. Таким образом, выполнено разделение, во-первых, множества всех допустимых точек $\boldsymbol{S}$, на подмножества $\boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}, q = \overline{1, K}$, и, во-вторых, разделение подмножества точек, оптимальных по Парето, $\boldsymbol{S}^o$, на подмножества $\boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}, q = \overline{1, K}$.

Отсюда верны следующие соотношения:

$$\boldsymbol{S}' \cup \left(\bigcup_{q \in K} \boldsymbol{S}_q^o\right) \equiv \boldsymbol{S}^\circ, \boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}^\circ \subset \boldsymbol{S}, q = \overline{1, K}. \tag{2.44}$$

Мы заметим, что подмножество точек $\boldsymbol{S}_q^o$, с одной стороны, включено в область (подмножество точек), имеющих приоритет критерия $q \in \boldsymbol{K}$ над другими критериями:

$\boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}$, и с другой стороны, на подмножество точек, оптимальны поз Парето: $\boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}^\circ \subset \boldsymbol{S}$.

Аксиома 2 и числовое выражение приоритета критерия (Определение 5) позволяет определять каждую допустимую точку $X \in \boldsymbol{S}$ (посредством вектора:

$$P^q(X) = \{p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}, k = \overline{1, K}\}, \text{ формироваться и выбирать:} \tag{2.45}$$

• подмножество точек по приоритетному критерию $\boldsymbol{S}_q$, который включен в множество точек $\boldsymbol{S}$, $\forall q \in \boldsymbol{K}\ X \in \boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S}$, (такое подмножество точек может использоваться в проблемах кластеризации, но это вне статьи);

• подмножество точек по приоритетному критерию $\boldsymbol{S}_q^o$, который включен в ряд точек $\boldsymbol{S}^o$, оптимальных по Парето, $\forall q \in K, X \in \boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}^\circ$.

В итоге получим:

Множество допустимых точек $X \in \boldsymbol{S} \rightarrow$	Подмножества точек оптимума по Парето, $X \in \boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S} \rightarrow$	Подмножество оптимальных точек приоритетом $q \in K\ X \in \boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}_q \subset \boldsymbol{S} \rightarrow$	Отдельная точка, $\forall X \in \boldsymbol{S}$ $X \in \boldsymbol{S}_q^o \subset \boldsymbol{S}^o \subset \boldsymbol{S}$

Это самый важный результат теории, который позволяет на основе этих трех аксиом вывести принцип оптимальности и построить методы выбора *любой точки* из множества точек, оптимальных по Парето. Такая классификация подмножества точек может использоваться в проблемах кластеризации, но это выходит за рамки статьи.

2.2.3. Принцип оптимальности решения векторной оптимизации с заданным приоритетом критерия

Определение 9. Принцип оптимальности 2. Решение векторной задачи с заданным приоритетом критерия.

Векторная задача (2.1)-(2.4) с заданным приоритетом q-го критерия $p_k^q \lambda_k(X), k = \overline{1, K}$ считается решенной, если найдена точка X^o и максимальный уровень λ^o среди всех относительных оценок такой, что

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{X \in \boldsymbol{S}} \boldsymbol{min}_{k \in K} p_k^q \lambda_k(X), q \in \boldsymbol{K}. \tag{2.46}$$

Используя взаимосвязь (2.41) и (2.42), преобразуем максиминную задачу (2.46) в λ-задачу, которую назовем λ-задачей с приоритетом q-го критерия:

$$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{X \in \boldsymbol{S}} \lambda, \tag{2.47}$$

$$\text{при ограничениях } \lambda \leq p_k^q \lambda_k(X), k = \overline{1, K}. \tag{2.48}$$

Мы называем уравнения (2.47)- (4.48) λ-задачей с приоритетом критерия.

В оптимальном решении $\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\}$, $\boldsymbol{X^o}$ – оптимальная точка, а λ^o – максимальный нижний уровень. Точка X^o и уровень λ^o соответствуют ограничениям (2.48), которые можно записать как: $\lambda^o \leq p_k^q \lambda_k(X^o), k = \overline{1,K}$.

Эти ограничения являются основой оценки правильности результатов решения в практических векторных задачах оптимизации.

Определение 1 и 2 «Принципы оптимальности» дают возможность сформулировать понятие операции «opt».

Определение 9. (*Математическая операция «opt»*).

В векторной задаче (2.1)-(2.4), которая представлена критериями «max» и «min», математическая операция «opt» состоит в определении точки X^o и максимального нижнего уровня λ^o, в котором все критерии измеряются в относительных единицах:

$$\lambda^\circ \leq \lambda_k\,(X^\circ) = \frac{f_k\,(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1,K}, \tag{2.49}$$

т.е. все критерии $\lambda_k(X^o), k = \overline{1,K}$ равны или больше максимального уровня λ^o, (поэтому λ^o также называется гарантированным результатом).

Теорема 2. ***Теорема о наиболее противоречивых критериях в векторной задаче с заданным приоритетом***.

Если в выпуклой векторной задаче математического программирования максимизации (2.1)- (2.4) задан приоритет q-го критерия $p_k^q, k = \overline{1,K}, \forall q \in \boldsymbol{K}$ над другими критериями, в точке оптимума $X^o \in \boldsymbol{S}$, полученной на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата, всегда найдется два критерия с индексами $r \in \boldsymbol{K}, t \in \boldsymbol{K}$, для которых выполняется строгое равенство из:

$$\lambda^\circ = p_k^r \lambda_r\,(X^\circ) = p_k^t\,\lambda_t\,(X^\circ), r, t, \in \boldsymbol{K}, \tag{2.50}$$

и другие критерии определяются неравенствами:

$$\lambda^\circ \leq p_k^q\,(X^\circ), k = \overline{1,K}, \forall q \in \boldsymbol{K}, q \neq r \neq t. \tag{2.51}$$

Критерии с индексами $r \in \boldsymbol{K}, t \in \boldsymbol{K}$, для которых выполняется равенство (2.50), называются наиболее противоречивыми.

Доказательство. Аналогично теореме 2 [19, 20].

Заметим, что в (2.50) и (2.51) индексы критериев $r \in \boldsymbol{K}, t \in \boldsymbol{K}$ могут совпадать с индексом $q \in \boldsymbol{K}$.

Следствие теоремы 1. О равенстве оптимального уровня и относительных оценок в векторной задаче с двумя критериями с приоритетом одного из них.

В выпуклой векторной задаче математического программирования с двумя эквивалентными критериями, решаемой на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата, в оптимальной точке X^o всегда выполняется равенство: при приоритете первого критерия над второй:

$$\lambda^o = \lambda_1(X^o) = p_2^1\,(X^\circ)\lambda_2(X^o), X^o \in \boldsymbol{S}, \tag{2.52}$$

где $p_2^1\,(X^\circ) = \lambda_1(X^o)/\lambda_2(X^o)$, при приоритете второго критерия над первым:

$$\lambda^o = \lambda_2(X^o) = p_1^2\,(X^\circ)\lambda_1(X^o), X^o \in \boldsymbol{S},$$

где $p_1^2\,(X^\circ) = \lambda_2(X^o)/\lambda_1(X^o)$.

2.2.4. Конструктивный метод решения задачи векторной оптимизации с заданным приоритетом критерия.

Шаг 1. Решаем векторную задачу с равнозначными критериями. Алгоритм решения представлен в разделе 2.1.4. В результате решения получаем:

оптимальные точки по каждому критерию отдельно $X_k^*, k = \overline{1,K}$ и размеры критериальных функций в этих точках $f_k^* = f_k\,(X_k^*), k = \overline{1,K}$;

точки антиоптимума по каждому критерию $X_k^0 = \{x_j, j = \overline{1,N}$ и наихудшей неизменной части каждого критерия $f_k^0 = f_k\,(X_k^0), k = \overline{1,K}$;

$\boldsymbol{X^o} = \{X^o, \lambda^o\}$ оптимальная точка, как результат решения VPMP с эквивалентными критериями, т. е. Результата решения максимальной задачи и λ-задачи, построенной на ее основе; λ° – максимальная относительная оценка, которая является максимальным нижним уровнем для всех относительных оценок λ_k (X°), или гарантированный результат в относительных единицах, λ° гарантирует, что все относительные оценки λ_k (X°) равны или больше λ°:

$$\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), k = \overline{1,K}, X^\circ \in S \quad (2.53)$$

Лицо, принимающее решение, проводит анализ результатов решения векторной задачи с равнозначными критериями. Если полученные результаты удовлетворяют лицо, принимающее решение, то конец, иначе выполняются последующие расчеты.

Дополнительно вычислим:

в каждой точке $X_k^*, k = \overline{1,K}$ определим величины всех критериев $f_k^* = f_k\,(X_k^*), k = \overline{1,K}$, которые представляют границу множества Парето, и относительных оценок: $\lambda\,(X^*) = \{\lambda_q\,(X_k^*), q = \overline{1,K}, k = \overline{1,K}\}, \lambda_k\,(X) = \frac{f_k\,(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, \forall k \in \boldsymbol{K}$:

$$F\,(X^*) = \begin{vmatrix} f_1(X_1^*) \dots f_K(X_1^*) \\ \dots \\ f_1(X_K^*) \dots f_K(X_K^*) \end{vmatrix}, \lambda\,(X^*) = \begin{vmatrix} \lambda_1(X_1^*) \dots \lambda_K(X_1^*) \\ \dots \\ \lambda_1(X_K^*) \dots \lambda_K(X_K^*) \end{vmatrix}. \quad (2.54)$$

Матрицы критериев F (X^*) и относительных оценок λ (X^*) показывают величины каждого критерия $k = \overline{1,K}$ при переходе от точки оптимума $X_k^*, k \in \boldsymbol{K}$ к другой $X_q^*, q \in \boldsymbol{K}$;

в точке оптимума при равнозначных критериях X^o вычислим величины критериев и относительных оценок:

$$f_k(X^o), k = \overline{1,K}; \lambda_k(X^o), k = \overline{1,K}, \quad (2.55)$$

которые удовлетворяют неравенству (2.53). В других точках $X \in \boldsymbol{S^o}$ меньший из критериев в относительных единицах $\lambda = \boldsymbol{min}_{k \in K} \lambda_k\,(X)$ всегда меньше λ^o. Запоминаются данные λ-задачи (2.47)- (2.48). Эта информация и является основой для дальнейшего изучения множества Парето.

Шаг 2. Выбор приоритетного критерия $q \in \boldsymbol{K}$.

Из теории (см. теорему 1) известно, что в оптимальной точке X^o всегда имеется два наиболее противоречивых критерия $q \in \boldsymbol{K}$ и $v \in \boldsymbol{K}$, для которых в относительных единицах выполняется точное равенство: $\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_v(X^o), q, v \in \boldsymbol{K}, X \in \boldsymbol{S}$, а для остальных:

$$\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), \forall k \in \boldsymbol{K}, q \neq v \neq k.$$

Как правило, из этой пары выбирается критерий, который ЛПР хотел бы улучшить, такой критерий называется «приоритетным критерием»: $q \in \boldsymbol{K}$.

Шаг 3. Определяются числовые пределы изменения величины приоритета критерия $q \in \boldsymbol{K}$. Для приоритетного критерия $q \in \boldsymbol{K}$ из матрицы (2.54) определим числовые пределы изменения величины критерия: в натуральных единицах $f_q\,(X)$ и в относительных единицах $\lambda_q\,(X)$, которые лежат в пределах:

$$f_k(X^o) \leq f_q\,(X) \leq f_q\,(X_q^*), k \in \boldsymbol{K}, \quad (2.56)$$

где $f_q\,(X_q^*)$ выводится из матрицы уравнения F (X^*) (2.54), все критерии показывают размеры, измеренные в физических единицах, $f_k(X^o), k = \overline{1,K}$ из уравнения (2.55), и, в относительных единицах:

$$\lambda_k(X^o) \leq \lambda_q\,(X) \leq \lambda_q\,(X_q^*), k \in \boldsymbol{K}, \quad (2.57)$$

где $\lambda_q\,(X_q^*)$ выводится из матрицы $\lambda\,(X^*)$, все критерии показывают размеры, измеренные в относительных единицах (отметим, что $\lambda_q\,(X_q^*) = 1), \lambda_q\,(X^o)$.

Выражения (2.56) и (2.57) выдаются на дисплей для анализа.

Шаг 4. Выбор величины приоритетного критерия (Принятие решения). ЛПР проводит анализ результатов расчетов (2.56), выбирает числовую величину f_q, $q \in \boldsymbol{K}$:

$$f_q(X^o) \leq f_q \leq f_q(X_q^*), q \in \boldsymbol{K}. \quad (2.58)$$

Для выбранной величины критерия f_q необходимо определить вектор неизвестных X^{oo}, для этого проводим последующие вычисления.

Шаг 5. Расчет относительной оценки:

$$\lambda_q = \frac{f_q - f_q^0}{f_q^* - f_q^0}, \qquad (2.59)$$

которая при переходе от точки X^o к X_q^*, в соответствии с (2.44):

$\lambda_q\ (X^\circ) \le \lambda_q \le \lambda_q\ (X_q^*) = 1.$

Шаг 6. Вычисление коэффициента линейной аппроксимации. Используя стандартные приемы линейной аппроксимации, вычислим коэффициент пропорциональности ρ между $\lambda_q(X^\circ), \lambda_q$: $\rho\ = \frac{\lambda_q - \lambda_q\,(X^o)}{\lambda_q^* - \lambda_q^0}, q \in \boldsymbol{K},$

Шаг 7. Вычисление координат приоритетного критерия f_q.

Координаты точки приоритетного критерия X_q лежат в следующих пределах: $X^o \le X_q \le X_q^*, q \in \boldsymbol{K}.$ Предполагая линейный характер изменения вектора $X_q = \{x_1^q, \dots, x_N^q\}$ определим координаты точки приоритетного критерия с величиной f_q с относительной оценкой λ_q (2.54):

$X_q = \{x_1^q = x_1^o + \rho\ (x_q^*\ (1) - x_1^o), \dots,$

$x_N^q = x_N^o + \rho\ (x_q^*\ (N) - x_N^o)\}$, (2.60)

где $X^o = \{x_1^o, \dots, x_N^o\}, X_q^* = \{x_q^*\ (1), \dots, x_q^*\ (N)\}.$

Шаг 8. Вычисление основных показателей точки X_q.

Для полученной точки $X_q = \{x_{qj}, j\ =\ \overline{1, N}\}$, вычислим:

все критерии в натуральных единицах: $F^q = \{f_k(X_q), k\ =\ \overline{1, K}\}$;

все относительные оценки критериев:

$\lambda^q = \{\lambda_k^q, k = \overline{1, K}\}, \lambda_k\ (x^q) = \frac{f_k\,(X_q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}$; (2.61)

минимальную относительную оценку: $\lambda^{oq} =\ \min\,(p_k^q\ \lambda_k\ (X_q), k = \overline{1, K}).$

Аналогично рассчитывается любая точка по Парето: $\boldsymbol{X_t^o} = \{\boldsymbol{\lambda_t^o}, \boldsymbol{X_t^o}\} \in \boldsymbol{S^o}.$

Анализ результатов. Рассчитанная величина критерия $f_q\ (X_t^o), q \in \boldsymbol{K}$ обычно не равна заданной f_q. Ошибка выбора $\Delta f_q = \left|f_q(X_t^o) - f_q\right|$ определяется ошибкой линейной аппроксимации. Результаты исследования симметрии в ВЗМП с заданным приоритетом аналогичны, как и для ВЗМП с равнозначными критериями, но центр симметрии смещен в сторону приоритетного критерия.

3. Заключение.

Представленная теория, аксиоматика, принципы оптимальности являются дальнейшим развитием аксиоматического подхода, заложенного в знаменитом сочинении «Начала», древнегреческого ученого Евклида, который представил аксиомы для одно мерной математики. Это нашло отражение в теории оптимизации с одним критерием. Аксиоматика (Машунина Ю.К.), изложенная в работе, направлена на системное (с множеством критериев) исследование финансово-экономических объектов и систем.

ЧАСТЬ 3. **МНОГОМЕРНАЯ МАТЕМАТИКА.**
ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ И МЕТОДОЛОГИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАЗВИТИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ И ФИНАНСОВЫХ СИСТЕМ

Аннотация. Цель работы состоит в представлении многомерной математики, которая является базой математического и программного обеспечения моделирования развития производственных, экономических и финансовых систем, входящих в основные уровни экономики государства. Теория и методы решение векторных задач математического программирования при равнозначных критериях и при заданном приоритете критерия представлены в A https://rdcu.be/bhZ8i. (Работа "Vector optimization with equivalent and priority criteria" Springer Nature распространяется бесплатно.). На основе теории разработаны конструктивные методы решения задач векторной оптимизации, которые позволяют оценивать экспериментальные данные, во-первых, при равнозначных критериях, во-вторых, при моделировании инженерных систем с заданным приоритетом критерия при принятии оптимального решения.

Практическая направленность показана при автоматизированном проектировании на базе векторной оптимизации экономических и финансовых систем. Для этой цели разработано программное обеспечение решения векторной задачи линейного программирования (ВЗЛП). Программное обеспечение решения ВЗЛП используются при цифровой трансформации принятия оптимальных решений в экономических и финансовых системах. Численный пример представлен цифровой трансформацией и принятием оптимального решения в производственной фирме.

Ключевые слова: Теория многомерной математики, Аксиоматика векторной оптимизации, Методология моделирования, Программное обеспечение, оптимальное решение в производственной фирме.

PART 3. **MULTIDIMENSIONAL MATHEMATICS.**
SOFTWARE FOR MODELING THE DEVELOPMENT OF PRODUCTION AND FINANCIAL SYSTEMS

Abstract. The purpose of the work is to present multidimensional mathematics, which is the basis of mathematical and software for modeling the development of production, economic and financial systems that are part of the main levels of the state's economy. The theory and methods for solving vector problems of mathematical programming with equivalent criteria and with a given priority of the criterion are presented in https://rdcu.be/bhZ8i. (The work "Vector optimization with equivalent and priority criteria» by Springer Nature is distributed free of charge.). On the basis of the theory, constructive methods for solving vector optimization problems have been developed, which make it possible to evaluate experimental data, firstly, with equivalent criteria, and secondly, when modeling engineering systems with a given criterion priority when making an optimal decision. The practical orientation is shown in computer-aided design based on vector optimization of economic and financial systems. For this purpose, software for solving the vector linear programming problem (LLP) has been developed. VZLP solution software is used in the digital transformation of optimal decision-making in economic and financial systems. A numerical example is represented by digital transformation and optimal decision making in a manufacturing firm.

Keywords: Theory of Multidimensional Mathematics, Axiomatics of Vector Optimization, Modeling Methodology, Software, Optimal Solution in a Manufacturing Firm.

Введение.

Исследование развития производственных, экономических и финансовых систем, входящих в основные уровни экономики государства, показало, что их развитие зависит от некоторого множества функциональных характеристик, которые необходимо учитывать на стадии проектирования. Анализ функционирования таких систем показал, что улучшение по одной из характеристик приводит к ухудшению других характеристик. Для улучшения функционирования производственных, экономических и финансовых систем в целом необходимо улучшения всех характеристик в совокупности [1, 2].

Математическая модель производственных, экономических и финансовых систем представлена многокритериальными задачами оптимизации. Следовательно, требуется решение многокритериальных (векторных) задач математического программирования. Исследования такого класса задач началось более ста лет тому назад в работе Pareto V [3]. Дальнейшее исследования многокритериальной оптимизации проводилось как на теоретическом уровне зарубежными [4, 5, 6, 34-39] и русскими авторами [13, 14, 15-33], так и на решении практических задач сначала в области экономики [20 – 23, 28 – 38], а за тем в области инженерных систем [7-12, 16-33, 65 – 81].

Цель работы состоит в представлении математического и программного обеспечения моделирования развития производственных, экономических и финансовых систем, входящих в основные уровни экономики государства. Методология численной реализации векторной задачи линейного программирования – математической модели производственных, экономических и финансовых систем, входящих в основные уровни экономики государства.

В прикладной части работы для моделирования и цифровой трансформации производственных, экономических и финансовых систем использованы векторные задачи линейного программирования, которые решались в условиях определенности и неопределенности.

В организационном плане процесс моделирования производственных, экономических и финансовых систем сформирован в виде методологии:

Методология включает три блока, разделенных на ряд этапов:

Блок 1. Формирование технического задания;

Блок 2. Методология процесса принятия оптимального решения (выбора оптимальных параметров) системы на базе векторной оптимизации;

Блок 3. Геометрическая интерпретация перехода от N-мерному пространству и выбор оптимальных параметров исследуемой системы.

1. Программное обеспечение моделирования производственных, экономических и финансовых систем на базе методов векторной оптимизации

1.1. Векторная задача линейного программирования

Векторная задача линейного программирования (ВЗЛП) – это стандартная задача математического программирования, имеющая некоторое множество критериев, которые в совокупности представляют вектор критериев. ВЗЛП подразделяются на однородные и неоднородные ВЗЛП, [20]. Однородная ВЗЛП максимизации – это векторная задача, у которой каждая компонента множества критериев направлена на максимизацию. Однородные ВЗЛП минимизации – это векторная задача, у которой каждая компонента множества критериев направлена на минимизацию. Неоднородные ВЗЛП – это векторная задача, у которой множество критериев разделено на два подмножества (вектора) критериев – максимизации и минимизации соответственно, т. е. неоднородные ВЗМП – это объединение двух видов однородных задач.

В соответствии с этими определениями представим векторную задачу линейного программирования с неоднородными критериями.

$opt\ F\big(X(t)\big) = \{max\ F_1\big(X(t)\big) = \{max\ f_k\big(X(t)\big) = \sum_{j=1}^{N} c_j^k x_j(t)\,, k = \overline{1, K_1}$, (3.1)

$min\ F_2\big(X(t)\big) = \{min\ f_k\big(X(t)\big) = \sum_{j=1}^{N} c_j^k x_j(t)\,, k = \overline{1, K_2}\}\}$, (3.2)

$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\ (t) x_j\ (t) \le b_i\ (t), i = \overline{1, M}$, (3.3)

$\sum_{j=1}^{N} c_j^k x_j\ (t) \ge b_k(t), k \in K$, (3.4)

$0 \le x_j\ (t) \le u_j\ (t), j = \overline{1, N}$, (3.5)

где $X = \{x_j\ (t), j = \overline{1, N}\}$ – вектор переменных, т.е. это вектор из N-мерного евклидова пространства R^N, (обозначение $j = \overline{1, N}$ эквивалентно $j = \ (1, \ldots, N)$;

$F(X)$ – вектор-функция (векторный критерий), имеющая K – компонент-функций, (K – мощность множества K). Множество K состоит из подмножества K_1 компонент максимизации и подмножества K_2 минимизации: $K = K_1 \cup K_2$, для оценки совокупности критериев вводится обозначение операция «*opt*», которое включает в себя max и min;

$F_1\big(X(t)\big) = \{max\ f_k\big(X(t)\big), k = \overline{1, K_1}$ – это векторный критерий, каждая компонента которого максимизирует, K_1 – число критериев, а $K_1 \equiv \overline{1, K_1}$- множество критериев максимизации (задача (3.1), (3.3)- (3.5) представляют собой ВЗЛП с однородными критериями максимизации);

$F_2\big(X(t)\big) = \{min\ f_k\big(X(t)\big), k = \overline{1, K_2}$- векторный критерий, каждая компонента которого минимизируется, $K_2 \equiv \overline{K_1 + 1, K} \equiv \overline{1, K_2}$ – множество критериев минимизации, K_2 – число, (задача (3.2)- (3.5) это ВЗЛП с однородными критериями минимизации). $K_1 \cup K_2 = K$, $K_1 \subset K$, $K_2 \subset K$.

(3.3)- (3.5) – стандартные ограничения.

$S = \{X \in R^n | G(X) \leq 0, X^{min} \leq X \leq X^{max}\} \neq \emptyset$ -

это допустимое множество точек (или более кратко – допустимое множество), задающиеся стандартными ограничениями (3.3)- (3.5) и тривиальными ограничениями $0 \leq x_j\ (t) \leq u_j\ (t), j = \overline{1, N}$. Предполагаем, что допустимое множество точек не пусто и представляет собой компакт.

1.2. Программное обеспечение решения векторной задачи линейного программирования

Программное обеспечение решения ВЗЛП (3.1)- (3.5) разработано на базе алгоритма, основанного на нормализации критериев и принципа гарантированного результата, представленного выше. Программное обеспечение решения ВЗЛП (3.1)- (3.5) в системе MATLAB включает два блока:

1 блок (подпрограмма): Подготовка исходной информации для решения ВЗЛП: VPLP_DATA_N;

2 блок (подпрограмма). Функция VPLP_Solution – Решение векторной задачи линейного программирования: которая должна быть загружена в систему MATLAB заранее.

1.3. Блок 1. Подготовка исходной информации

В качестве числового примера представлена векторной задачи линейного программирования (3.1)- (3.5) – математическая модель производственных, экономических и финансовых систем следующего вида:

$Opt\ F(X) = \{max\ F_1\ (X) = \{max\ f_1(X) \equiv 43.2x_1 + 36x_2$, (3.6)

$max\ f_2(X) \equiv 7.3x_1 + 14.4x_2\}$,

$min\ F_2\ (X) = \{min\ f_3(X) \equiv 7.2x_1 + 8.64x_2\}\}$, (3.7)

$7.2x_1 + 8.64x_2 \leq 5184$, (3.8)

$8.2x_1 + 7.6x_2 \leq 5355$,

$7.3x_1 + 7.1x_2 \geq 1600$, (3.9)

$x_1 \leq 600, x_2 \leq 540, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$. (3.10)

Математическая модель производственных, экономических и финансовых систем (3.6)-(3.10) включает три критерия – целевые показатели и ограничения по ресурсам.

1.4. Блок 2. Программа – функция: Решения векторной задачи линейного программирования

Текст программы – название: VPLP_Solution = представлено в приложении.

Текст в системе MATLAB. Информация для решения ВЗЛП (3.6)- (3.10) готовится в подпрограмме с названием VPLP_DATA_3.

2. Методология процесса моделирования и принятия оптимальных решений развития финансово-экономической систем

2.1. Методология процесса моделирования развития финансово-экономической систем

Процесс моделирования в различных областях исследований финансово-экономических систем, базируется на системной векторной оптимизации принятия решений.

Методология процесса принятия оптимальных решений в финансово-экономических системах на базе векторной оптимизации включает последовательно три этапа.

1 этап. *Решение векторной задачи математического программирования при равнозначных критериях*. Полученный результат является основой для дальнейшего исследования системы. При этом используется метод решения векторной задачи при равнозначных критериях. Если полученный результат удовлетворяет лицу, принимающего решения, (ЛПР – проектировщик), то он берется за основу. Если не удовлетворяет, то переходим ко второму этапу (прямая задача) или третьему этапу (Обратная задача).

2 этап. *Решение прямой задачи векторной оптимизации*, которая состоит в следующем: «Какие будут показатели (характеристики), если изменить параметры системы». – Используется метод решения векторной задачи при равнозначных критериях, представленный в разделе 1.2.

3. этап. *Решение обратной задач векторной оптимизации*, которая состоит в следующем: «Какие будут параметры системы при заданных показателях (характеристиках) системы». – Используется метод решения векторной задачи при заданном приоритете критерия, представленный в разделе 1.4.

2.2. Задача моделирования финансово-экономической системы

Процесс моделирования представим на примере формирования производственного плана предприятия (финансово-экономической системы) в виде векторной задачи линейного программирования (3.6)- (3.10).

2.2.1. Техническое задание на моделирование социально-экономической системы

Дано. Предприятие выпускает однородную продукцию двух видов, N=2. При производстве изделий используется два ресурса M=2. Числовые значения технологической матрицы производства представлены в табл. 3.1, где x_1, x_2 определяют объемы продукции первого и второго вида. Объем трудовых затрат, представленный отношением $7.3x_1 + 8.64x_2$, должен превышать 16000 т. руб. Маркетинговые ограничения, определяемые рынком, составляют: $x_1 = 600$, $x_2 = 540$. Затраты, связанные с управленческими и коммерческими расходами представлены в таблице 3.1.

Таблица 3.1

Затраты ресурсов и производственные показатели

Вид ресурсов	Затраты ресурсов на одно изделие		Производственные возможности фирмы по каждому виду ресурсов
	Вид 1	Вид 2	
Трудовые a_{11}, a_{12}	7.2	8.64	5184
Материальные a_{21}, a_{22}	8.2	7.6	5355
Управленческие и коммерческие расходы	20.4	5.36	Т.руб. на 1 изделие
Валовая прибыль	8.1	18.5	
Налоги 20% от валовой прибыли	1.62	3.7	
Доход от продажи ед. продукции (тысяч руб.) $c_j^1, j = 1,2$	43.2	36	Максимизировать
Прибыль $c_j^2, j = 1,2$	7.3	14.4	Максимизировать
Стоимость трудовых ресурсов	7.2	8.64	Минимизировать
Объем продукции	x_1	x_2	Определить

Требуется определить производственный план предприятия, который включает показатели по номенклатуре (по видам изделий) и по объему, т. е. сколько изделий соответствующего вида x_1, x_2 следует изготовить предприятию, чтобы доход и прибыль при их реализации была как можно выше, а затраты меньше. Составить математическую модель задачи, решить ее.

2.2.2. Построение модели финансово-экономической системы

Построение математической модели производственной части включает формирование критериев, экономических показателей и ограничений.

Критерии. 1 критерий – Максимизация объема продаж: $f_1(X)\equiv 43.2x_1 + 36x_2$.

2 критерий – Максимизация прибыли: $f_2(X)\equiv 7.3x_1 + 14.4x_2$.

3 критерий – Минимизация затрат на изготовлении продукции: $f_3(X)\equiv 7.2x_1 + 8.64x_2$.

Экономические показатели. Валовая прибыль: $f_4(X)\equiv 8.1x_1 + 18.5x_2$.

Налоги 20% (Социальная направленность): $f_5(X)\equiv 1.62x_1 + 3.7x_2$.

Валовая добавленная стоимость (стоимость – материалы): $f_6(X)\equiv 34.6x_1 + 28.4x_2$.

Ограничения. 1 ограничение по трудовым ресурсам: $7.2x_1 + 8.64x_2 \le 5184$.

2 ограничение по материальным ресурсам: $8.2x_1 + 7.6x_2 \le 5355$.

3 ограничение – минимальный производственный план: $7.3x_1 + 7.1x_2 \ge 1600$.

4 ограничение по маркетинговым исследованиям рынка: $x_1 = 600$, $x_2 = 540$.

Цель производителя получить доход и прибыль от продажи изделий как можно выше при минимизации себестоимости выпускаемых изделий с учетом ограничений по трудовым и плановым ресурсам. Отсюда целевую направленность можно выразить с помощью векторной задачи линейного программирования, которая примет следующий вид:

$Opt\ F(X) = \{max\ F_1\ (X) = \{max\ f_1(X)\equiv 43.2x_1 + 36x_2,$ (3.11)

$max\ f_2(X)\equiv 7.3x_1 + 14.4x_2\},$ (3.12)

$min\ F_2\ (X) = \{min\ f_3(X)\equiv 7.2x_1 + 8.64x_2\}\},$ (3.13)

$7.2x_1 + 8.64x_2 \le 5184,$ (3.14)

$8.2x_1 + 7.6x_2 \le 5355,$ (3.15)

$7.3x_1 + 7.1x_2 \ge 1600,$ (3.16)

$x_1 \le 600, x_2 \le 540, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$ (3.17)

В ВЗЛП (3.11)- (3.17) формулируется следующее: требуется найти неотрицательное решение x_1, x_2, в системе неравенств (3.14)- (3.17) такое, при котором функции $f_1(X)$ и $f_2(X)$ принимают максимально возможное значение, а функция $f_3(X)$минимальное значение.

2.2.3. Решение векторной задачи линейного программирования – модели системы с равнозначными критериями

Решение векторной задачи линейного программирования (3.11)- (3.17) в соответствии с алгоритмом решения ВЗЛП на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата представим в системе Matlab. По своей структуре ВЗЛП (3.11)- (3.17) эквивалентна ВЗЛП (равна) (3.11)- (3.17). Поэтому для решения задачи линейного программирования (3.11)- (3.17) используем исходную информацию, которая подготовлена для решения ВЗЛП (3.11)- (3.17) с названием VPLP_DATA_3 в разделе 1.3.

Геометрическая интерпретация допустимого множества точек (решений) ***S***, определяемых ограничениями (3.14)- (3.17), представлена на рис. 2.1.

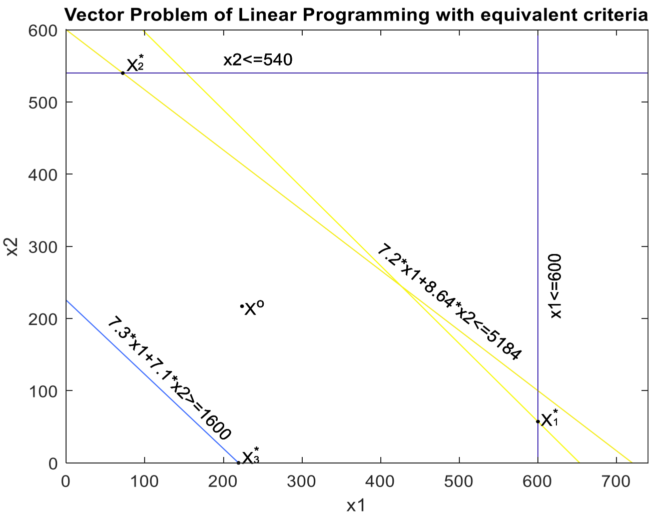

Рис. 5.1. Допустимое множество решений ВЗЛП (3.14)- (3.17) и результаты решения

В результате решения ВЗЛП (3.11)- (3.16), используя программное обеспечение решения ВЗЛП, которое представлено в разделе 1.2, получили:

Во-первых, результаты системного анализа, которые включают величины критериев $f_k\ (X_k^*), q = \overline{1, K}, k = \overline{1, K}, K = 3$ в точках оптимума X_1^*, X_2^* and X_3^*:

$$F\ (X^*) = \{f_k\ (X_k^*), q = \overline{1, K}, k = \overline{1, K}, K = 3\} = \begin{vmatrix} -27981\ -5204\ 4815 \\ -22550\ -8302\ 5184 \\ -9468\ -1600\ 1578 \end{vmatrix},$$

и величины относительных оценок в этих точках:

$$\lambda\ (X^*) = \{\lambda_q\ (X_k^*), q = \overline{1, K}, k = \overline{1, K}, K = 3\} = \begin{vmatrix} 1.00\ 0.5378\ 0.1025 \\ 0.7267\ 1.00\ 0 \\ 0.0682\ 0\ 1.00 \end{vmatrix}. \qquad (3.18)$$

Во-вторых, решение ВЗЛП (3.11)- (3.17) при равнозначных критериях (Решение λ-задачи):

$\boldsymbol{X^o} = \{x_1 = 0.4711, x_2 = 223.4, x_3 = 217.0\},$ (3.19)

где $\boldsymbol{X^o}$ определяет переменные; координаты x_1 соответствуют λ^o– максимальному относительному уровню: $x_1 = \lambda^o$; и x_2, x_3 соответствуют x_1, x_2 задачи (3.11)- (3.17). Lo $= \lambda^o = 0.4711$ представляет оптимальную величину целевой функции. λ^o является максимальным уровнем среди всех минимальных относительных оценках на допустимом множестве $X \in \boldsymbol{S}$:

$\lambda^o = \boldsymbol{max}_{\boldsymbol{X \in S}} \boldsymbol{min}_{\boldsymbol{k \in K}} \lambda_k\ (X).$ (3.20)

Функции $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3\ (X)$ и точки оптимума X^o и λ^o которые получены и представлены на рис. 3.2.

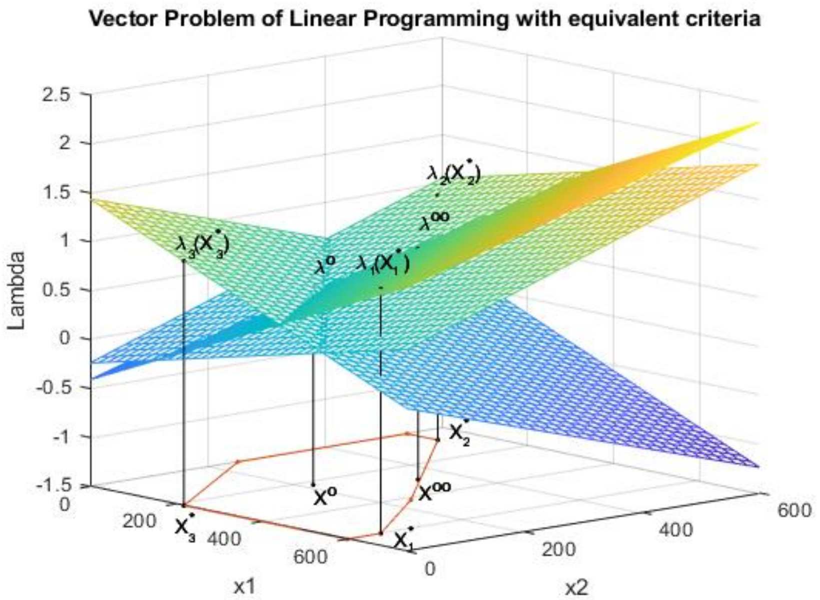

Рис. 3.2. Результаты решения ВЗЛП: функции: $\lambda_1(X), \lambda_2(X)$ *and* $\lambda_3\ (X)$
точки оптимума X^o и λ^o

Выполним проверку:

$f_1(X^o) = -17473, f_2(X^o) = -4757, f_3(X^o) = 3485;$

$\lambda_1(X^o) = 0.4711\lambda_2(X^o) = 0.4711;, \lambda_3(X^o) = 0.4711;$

т. е. $\lambda^o \le \lambda_k(X^o), k = 1, 2, 3.$

Эти результаты показывают, что в точке оптимума X^o три критерия $\lambda_1(X^o), \lambda_2(X^o), \lambda_3(X^o)$, измеренные в относительных единицах, достигли уровня: $\lambda^o = 0.4711$ от своих оптимальных величин f_1^*, f_2^*, f_3^*. Любое увеличение одного из критериев выше этого уровня приводит к уменьшению другого критерия, т.е. точка X^o оптимальна по Парето.

2.2.4. Решение прямой задачи– модели системы с равнозначными критериями

Решение прямой задачи, которая состоит в следующем: «Какие будут показатели (характеристики), если изменить параметры». В производственном плане, представленного

ВЗЛП (3.11)- (3.17) изменим 3 ограничение по минимальному производственному плану, который должен превышать 2600: $7.3x_1 + 7.1x_2 \geq 2600$. В итоге ВЗЛП (3.11)- (3.16) примет вид:

$Opt\ F(X) = \{max\ F_1\ (X) = \{max\ f_1(X) \equiv 43.2x_1 + 36x_2,$ (3.21)

$max\ f_2(X) \equiv 7.3x_1 + 14.4x_2\},$ (3.22)

$min\ F_2\ (X) = \{min\ f_3(X) \equiv 7.2x_1 + 8.64x_2\}\},$ (3.23)

$7.2x_1 + 8.64x_2 \leq 5184,$ (3.24)

$8.2x_1 + 7.6x_2 \leq 5355,$ (3.25)

$7.3x_1 + 7.1x_2 \geq 2600,$ (3.26)

$x_1 \leq 600, x_2 \leq 540, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$ (3.27)

Допустимое множество точек, представленное ограничениями (3.24)-(3.27) представлено на рис 3.3.

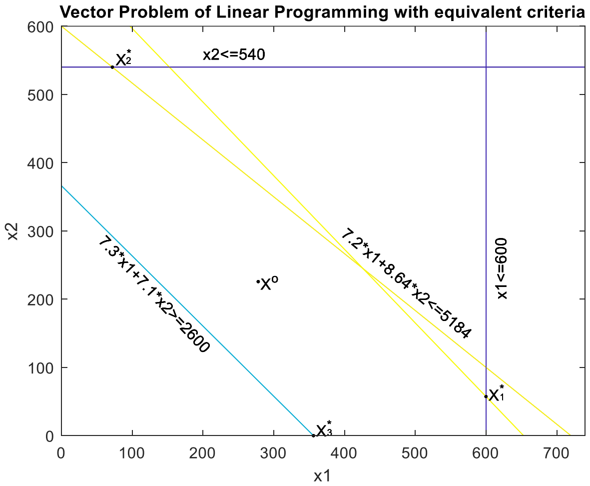

Рис. 3.3. Допустимое множество точек (3.24)- (3.27), точки оптимума X_1^*, X_2^* and X_3^* и точка оптимума $\boldsymbol{X^o}$.

В результате решения ВЗЛП (3.21)- (3.26) получили:

Во-первых, результаты системного анализа, которые включают:

Точки оптимума по каждому критерию:

$$X^* = \{X_k^*, k = \overline{1,K}, K = 3\} = \begin{vmatrix} 600.0000\ 57.2368 \\ 72.0000\ 540.0000 \\ 356.1644\ 0 \end{vmatrix}; \quad (3.28)$$

величины критериев $f_q\ (X_k^*), q = \overline{1,K}, k = \overline{1,K}, K = 3$ в точках оптимума X_1^*, X_2^* and X_3^* (3.28):

$$F\ (X^*) = \{f_q\ (X_k^*), q = \overline{1,K}, k = \overline{1,K}\} = \begin{vmatrix} -27981\ -5204\ 4815 \\ -22550\ -8302\ 5184 \\ -15386\ -2600\ 2564 \end{vmatrix}; \quad (3.29)$$

величины относительных оценок в этих точках X_1^*, X_2^* and X_3^* (3.28):

$$\lambda\ (X^*) = \{\lambda_q\ (X_k^*), q = \overline{1,K}, k = \overline{1,K}, K = 3\} = \begin{vmatrix} 1.0\ 0.4568\ 0.141 \\ 0.633\ 1.0\ 0.000 \\ 0.1489\ 0\ 1.0 \end{vmatrix}. \quad (3.30)$$

Во-вторых, решение ВЗЛП (3.21)-(3.27) на антиоптимум:

Точки оптимума по каждому критерию:

$$X^{min} = \{X_k^0, k = \overline{1,K}, K = 3\} = \begin{vmatrix} 0.0\ 366.2 \\ 356.16\ 0.0 \\ 425.9\ 245.0 \end{vmatrix};$$

величины критериев $f_q\ (X_k^0), q = \overline{1,K}, k = \overline{1,K}, K = 3$ в точках антиоптимума X_1^0, X_2^0 and X_3^0:

$$F\ (X^{min}) = \{f_q\ (X_k^0), q = \overline{1,K}, k = \overline{1,K}\} = \begin{vmatrix} -13183 & -5273 & 3164 \\ -15386 & -2600 & 2564 \\ -27222 & -6638 & 5184 \end{vmatrix};$$

В-третьих, решение ВЗЛП (3.21)- (3.27) при равнозначных критериях (Решение λ-задачи):

$\boldsymbol{X^o} = \{\, x_1 = 0.4701, x_2 = 278.1, x_3 = 225.7\}$**.** (3.31)

где $\boldsymbol{X^o}$ определяет переменные; координаты x_1 соответствуют λ^o– максимальному относительному уровню: $x_1 = \lambda^o$; и x_2, x_3 соответствуют x_1, x_2 задачи (3.21)-(3.27). Критерии в точке X^o равны:

$F\ (X^o) = \{f_1(X^o) = 20140, f_2(X^o) = 5280, f_3(X^o) = 3952\}$.

Lo $= \lambda^o =$ 0.4701 представляет оптимальную величину целевой функции.

Величины относительных оценок в точке оптимума X^o:

$\lambda\ (X^o) = \{\lambda_1(X^o) = 0.4701, \lambda_2(X^o) = 0.4701, \lambda_3(X^o) = 0.4701\}$.

λ^o является максимальным уровнем среди всех минимальных относительных оценках на допустимом множестве $X \in \boldsymbol{S}$: $\lambda^o = \boldsymbol{max_{X\in S} min_{k\in K}} \lambda_k\ (X)$.

Функции $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3\ (X)$ и точки оптимума X^o и λ^o которые получены и представлены на рис. 3.4.

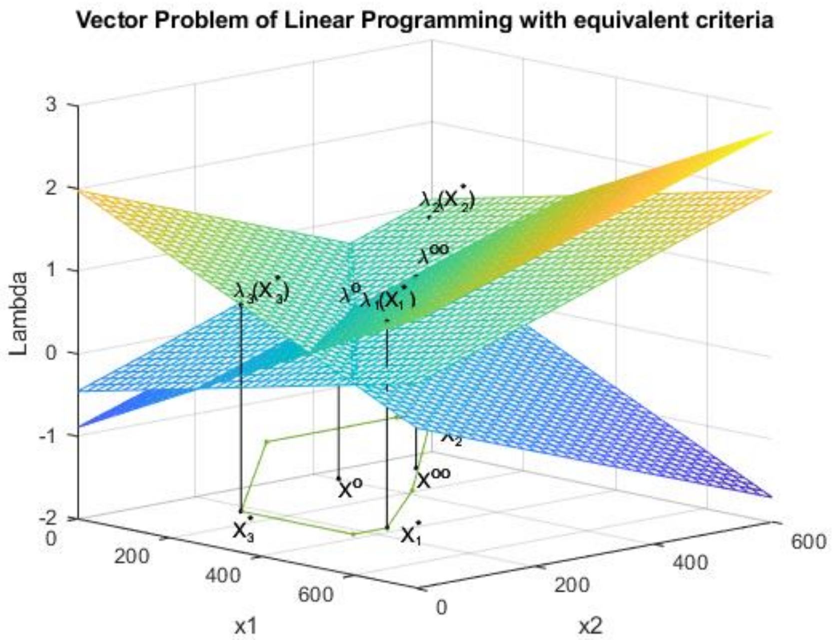

Рис. 3.4. Функции $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3\ (X)$ и точки оптимума X^o и λ^o

2.2.5. Решение обратной задачи – модели системы с равнозначными критериями

Решение обратной задачи состоит в следующем: «Какие будут параметры системы при заданных показателях (характеристиках) системы».

В нашем примере выберем показатель $f_2\ (X)$ – «Прибыль». При решении по второму критерию (прибыль) в точке оптимума X_2^* получили (3.22): $f_2(X_2^*) = 8302$. При решении ВЗЛП при равнозначных критериях в точке оптимума X^o получили $f_2(X^o) = 5280, \lambda_2(X^o) = 0.4701$. Отсюда показатель прибыли лежит в пределах:

$f_2(X^o) = 5280 \leq f_2(X) \leq f_2(X_2^*) = 8301.6$,

или в относительных единицах: $\lambda_2(X^o) = 0.4701 \leq \lambda_2(X) \leq \lambda_2(X_2^*) = 1$.

Встает вопрос, какие должны быть параметры производства x_1, x_2, при которых прибыль будет равна, например, $f_2(X) = 7000$. Далее в соответствии с алгоритмом раздела 5.4.

Шаг 4. Выбор величины приоритетного критерия $q = 2 \in \boldsymbol{K}$. (Decision-making).

На сообщение: «Введите величину приоритетного критерия *fq*=» – вводим, например, f_q=7000.

Шаг 5. *Вычисляется относительная оценка.*

Для выбранной величины приоритетного критерия $f_q = 7000$ вычисляется относительная оценка: %fmin = 2727.3 FXopt (q,q) = -8294.4

$$\lambda_q = \frac{f_q - f_q^0}{f_q^* - f_q^0} = \frac{7000-2727.3}{8294-2727.3} = 0.7717. \qquad (3.32)$$

которая при переходе от точки X^o к точке X_q^* лежит в пределах:

$0.4454 = \lambda_2 (X^o) \le \lambda_2 = 0.7717 \le \lambda_2 (X_2^*) = 1, q \in \boldsymbol{K}$.

Шаг 6. Вычислим коэффициент линейной аппроксимации

Предполагая линейный характер изменения критерия $f_q (X)$ и соответственно относительной оценки λ_q, используя стандартные приемы линейной аппроксимации, вычислим коэффициент пропорциональности между $\lambda_q (X^o)$, λ_q, который назовем ρ:

$$\rho = \frac{\lambda_q - \lambda_q (X^o)}{\lambda_q (X_q^*) - \lambda_q (X^o)} = \frac{0.7717-0.4454}{1-0.4454} = 0.5692, q = 3 \in \boldsymbol{K}. \qquad (3.33)$$

Шаг 7. Вычислим координаты приоритета критериев размерности f_q.

Предполагая линейный характер изменения вектора $X^q = \{x_1, x_2\}$, q=2 определим координаты для точки с размерностью fq =7000:

$x_{\lambda=0.7}^{q=2} = \{x_1^q = x_1^o + \rho(x_2^* (1) - x_1^o) = 278.1 + 0.5692(72 - 278.1) = 182.4,$

$x_2^q = x_2^o + \rho(x_2^* (2) - x_2^o) = 225.7 + 0.5692(540 - 225.7) = 394,9\},$

где $X^o = \{x_1^o = 278.1, x_2^o = 225.7\}$, $X_2^* = \{x_2^* (1) = 72.0, x_2^* (2) = 540\}$.

Как результат решения мы получим точку с координатами:

$X^q = \{x_1^q = 160.79, x_2^q = 404,59\}$.

Шаг 8. Вычисление в точке X^q главных показателей $f_2(X^q)$.

Для полученной точки X^q, вычислим:

все критерии в натуральных единицах $f_k (X^q) = \{f_k (X^q), k = \overline{1,K}\}$,

$f_1(X) \equiv 43.2x_1^q + 36x_2^q = 43.2 * 160.79 + 36 * 404,59 = 21512,$

$f_2(X) \equiv 7.3x_1^q + 14.4x_2^q = 7.3 * 160.79 + 14.4 * 404,59 = 6983.9,$

$f_3(X) \equiv 7.2x_1^q + 8.64x_2^q = 7.2 * 160.79 + 8.64 * 404,59 = 4653.4.$

$f (X^q) = \{f_1 (X^q) = 21512, f_2 (X^q) = 6983.9, f_3 (X^q) = 4653.4\};$

все относительные оценки критериев:

$$\lambda^q = \{\lambda_k^q, k = \overline{1,K}\}, \lambda_k (X^q) = \frac{f_k (X^q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1,K}:$$

$$\lambda_k (X^q) = \{\lambda_1 (X^q) = 0.5628, \lambda_2 (X^q) = 0.7689, \lambda_3 (X^q) = 0.2025\}.$$

Минимальная относительная оценка: $\min\lambda (X^q) = \min_{k\in K} (\lambda_k (X^q)) = 0.2025$.

Допустимое множество точек, представленное ограничениями (3.24)-(3.25) представлено на рис 3.5.

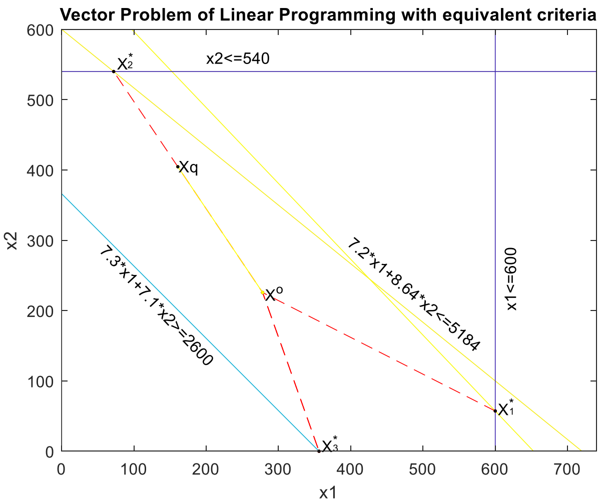

Рис. 3.5. Допустимое множество точек (3.25)- (3.27), точки оптимума X_1^*, X_2^* and X_3^*, точка оптимума $\boldsymbol{X^o}$ и точка оптимума X^q, полученная при приоритете критерия $q = 2$.

Функции $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3\ (X)$, точки оптимума X^o, λ^o и точка оптимума X^q, полученная при приоритете критерия q, представлены на рис. 3.6.

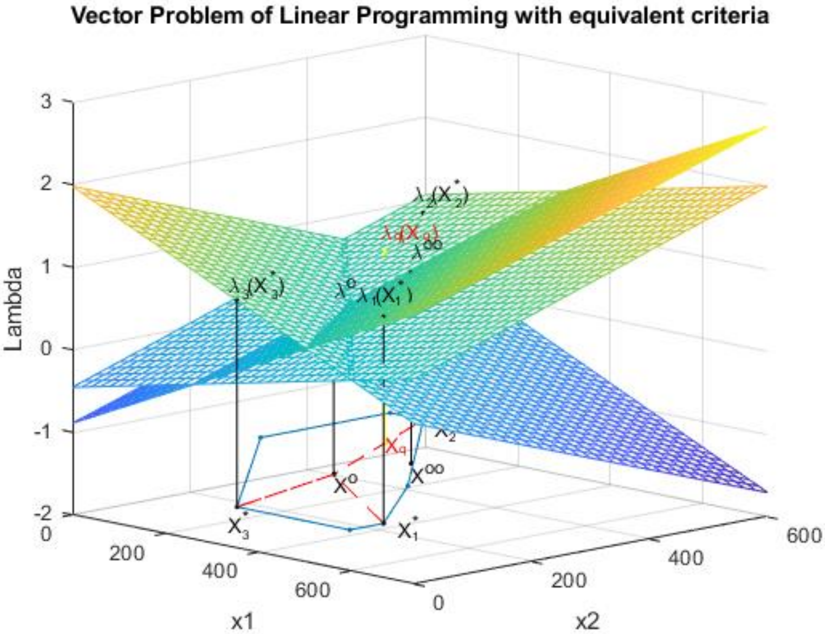

Рис. 3.6. Функции $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3\ (X)$, точки оптимума X^o и λ^o и точка оптимума X^q, полученная при приоритете критерия $q = 2$

Вектор приоритетов $P^q(X) = \{p_k^q = \frac{\lambda_q\ (X^q)}{\lambda_k\ (X^q)}, k = \overline{1, K}\}$:

$P^{q=2} =\ [p_1^2 = 1.3661, p_2^2 =\ 1.0, p_3^2 = 3.7963]$.

3.2.6. Анализ результатов моделирования

Рассчитанная величина $f_q\ (X) = 6983.9, q = 2 \in \boldsymbol{K}$ обычно не равна заданной $f_q = 7000$. Ошибка выбора

$\Delta f_q = |f_q\ (X) - f_q| = |6983.9 - 7000| = 16.1$ определяется ошибкой линейной аппроксимации: $\Delta f_{q\%} =\ 0.1\%$.

Если ошибка $\Delta f_q = |f_q\ (X_t^o) - f_q| = |6983.9 - 7000| = 16.1$, измеренная в натуральных единицах или в процентах $\Delta f_{q\%} = \frac{\Delta f_q}{f_q} * 100 =\ 0.1\%$, больше заданной $\Delta f, \Delta f_q > \Delta f$, то переходим к шагу 2, если $\Delta f_q \leq \Delta f$, то вычисления завершаются. *Конец.*

В процессе моделирования могут быть изменены параметрические ограничения и функции, т. е. получено некоторое множество оптимальных решений. Из этого множества оптимальных решений выбираем окончательный вариант (процесс принятия решений). Аналогично другие точки из области Парето $\boldsymbol{X_t^o} = \{\lambda_t^o, X_t^o\} \in \boldsymbol{S^o}$ могут быть получены.

Заключение.

Исследование направлено на решение проблемы программного обеспечения надежности прогнозирования в краткосрочной, среднесрочной, долгосрочной перспективе, во-первых, развития экономики государства, и, во-вторых, социально-экономического и финансового развития. Методология процесса принятия оптимальных решений в финансово-экономических системах на базе векторной оптимизации построена: во-первых, на информационном обеспечении, которое представляется государственными статистическими органами; во-вторых, на математическом моделировании экономических систем (математическое обеспечение); в-третьих, на инвестиционных процессах, которые определяют тенденции развития финансово-экономической системы государства; в-четвертых, на программном обеспечении решения указанных проблем. Направление дальнейших исследований связано с практическим использованием в прогнозировании развития экономики Российской Федерации.

Приложение.

1. Блок программы – название: VPLP_DATA_3.

Предназначен для подготовки информации для решения Векторной Задачи Линейного Программирования – ВЗЛП (2.51)- (2.57).

```
%Vector linear programming problem: VPLP_DATA_3
%Avtor Машунин Юрий К. – Mashunin Yury K. (Mashunin Yu.K.)
%The program is designed for the training and research,
%for the commercial purposes please contact: email: Mashunin@mail.ru
disp ('Input datas for the solution of VZLP_DATA_k3')
disp ('Number of criteria'); k=3
disp ('Matrix of criteria')
c= [-43.2 -36.; % стоимость
-7.3 -14.4; % прибыль
7.2 8.64]; % труд
disp ('Matrix of restrictions')
a= [7.2 8.64; % труд
8.2 7.6; % Материалы
-7.3 -7.1]; % минимальная плановая загрузка
disp ('Vector of restrictions ')
b= [5184. 5355. -2600.]; %
disp ('Restrictions of type of equalities ')
Aeq= []; Beq= [];
disp ('Lower bound of variables')
Lb= [0. 0.];
disp ('Upper bound of variables')
Ub= [600. 540.]; %
[Xo,Lo,FXo,LXo,Xopt,FXoptLXopt] = VPLP_Solution (k,c,a,b,Aeq,Beq,Lb,Ub)
disp ('РЕЗУЛЬТАТ Системного Анализа ')
disp ('Точки оптимума по каждому критерию')
Xmax=Xopt (1:k,:)
disp ('Величины критериев в точке оптимума')
FXopt=FXoptLXopt (1:k,:)
disp ('Величины относительных оценок точке оптимума Values of the Relative estimates at the optimum point Xopt')
FXmin=FXoptLXopt (k+1:2*k,:)
disp ('Точки оптимума по наихудшему значению критерия (антиоптимум)')
Xmin=Xopt (k+1:2*k,:)
disp ('Величины критериев в наихудшей точке оптимума')
FXmin=FXoptLXopt (2*k+1:3*k,:)
disp ('РЕЗУЛЬТАТ решени. ВЗЛП с равнозначными критериями ')
disp ('Точка оптимума')
X_optim=Xo
disp ('Относительна. оценка критерия в Точке оптимума')
L_optim=Lo
disp ('Величины критериев в точке оптимума X_optim')
FXoptim= FXo % [c (1,:)*Xo (2:3) c (2,:)*Xo (2:3) c (3,:)*Xo (2:3)];
disp ('Величины Относительных оценок в точке оптимума X_optim')
LXoptim= LXo % [(FXoptim (1)-FXmin (1))/d1 …].
```

2. Блок программы – название: VPLP_Solution.

Программа – функция: Решения векторной задачи линейного программирования

Текст из системы MATLAB.

```
%Vector linear programming problem: VPLP_Solution
```

```
function [Xo,Lo,FXo,LXo,Xopt1,FXoptLXopt] = VPLP_Solution (k,c,a,b,Aeq,Beq,Lb,Ub)
%Avtor Машунин Юрий К. – Mashunin Yury K. (Mashunin Yu.K.)
%Предназначена для обучения, научно-исследовательских работ
%The program is designed for the training and research,
%for the commercial purposes please contact: email: Mashunin@mail.ru
disp ('Step 1.The solution for each criterion is the best')
for i=1:k %criterion – opt
[x,f]=linprog (c (i,:),a,b,Aeq,Beq,Lb,Ub)
s=strcat ('Criterion: f',num2str (i),'max=',num2str (f)); %
disp (s)
for j=1:k % The value of the criterion at the optimum point
fXopt=c (j,:)*x;
FXopt (i,j)=fXopt;
end
Xopt (i,:)=x';
FXopt;
end
disp ('Step 2. Solution by criterion-best-worst (Antioptimum)')
for i=1:k
[xmin,fmin]=linprog (-1*c (i,:),a,b,Aeq,Beq,Lb,Ub)
s=strcat ('Criterion: f',num2str (i),'min=',num2str (fmin));
disp (s)
for j=1:k % The value of the criterion at the optimum point
fXmin=c (j,:)*xmin;
FXmin (i,j)=fXmin;
end
Xmin (i,:)=xmin';
FXmin;
end
disp ('Step 3. System analysis of the results of the decision')
FXopt
for i=1:k
dK=-1*FXopt (i,i)+FXmin (i,i);
d (i)=dK;
end
for i=1:k
for j=1:k % The value of the criterion at the optimum point
FXoptij=FXopt (i,j);
FXminij=FXmin (i,j);
dL= (-1*FXopt (i,j)+FXmin (j,j))/d (j);
LXopt (i,j)=dL;
end
end
LXopt
disp ('Step 4. Constaction of the L-problem')
a01=ones (1,k) % [1 1 1 1 1 1 1 1 1]
s=size (a) % Dimension of matrix a: s (1)=m, s (2)=n
a02=zeros (1,s (1)) %a02 = zeros (1, s (1))% a02 – Zeros in is limited
a03=zeros (1,s (2)) %a03 – Zero in criteria
KrL= [-1 a03]
for i=1:k % The value of the criterion at the optimum poin
a0kr=c (i,:)/d (i);
```

```
c_d (i,:)=a0kr;
b0kr=FXmin (i,i)/d (i);
bFmin (i,:)=b0kr;
end
a0= [a01' c_d;
a02' a].
b0= [bFmin' b].
s1=size (Aeq) % Dimension of matrix a: s (1)=m, s (2)=n
a02=zeros (1,s1 (1)) %a02 = zeros (1, s (1))% a02 – Zeros in is limited
Aeq0= [a02' Aeq].
Beq0=Beq
lb0= [0 Lb] %10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10].
ub0= [1 Ub] %2500.].
disp (' Step 5. Solution of the L-problem')
[x0,L0]=linprog (KrL,a0,b0,Aeq0,Beq0,lb0,ub0)
disp ('The optimum point Xo={xj,j=1,N}')
Xo=x0 (2:s (2)+1)'
Fx0=zeros (1,k); Lx0=zeros (1,k);
for j=1:k % Size of criteria at the optimum point
nFx0=c (j,:)*x0 (2:s (2)+1)
Fx0 (j)=nFx0
dL= (-1*Fx0 (j)+FXmin (j,j))/d (j)
Lx0 (j)=dL
end
% КОНЕЦ основного цикла
Xo=x0
Lo=Xo (1)
disp (' Criteria Fk (Xo), k=1,K')
FXo=Fx0,
disp (' Criteria in the relative units Lk (Xo), k=1,K')
LXo=Lx0
Xopt1= [Xopt;Xmin].
FXoptLXopt= [FXopt;LXopt;FXmin].
% END
```

Список литературы:

1. Конституция Российской Федерации: Принята всенародным голосованием 12 декабря 1993 г., с учетом поправок от 30.12.2008 № 7-ФКЗ.

2. Бюджетный кодекс Российской Федерации. – М.: ТК Велби, Изд-во Проспект, 2010. – 215 с.

3. Налоговый кодекс Российской Федерации. Часть первая [принят Государственной Думой 16.07.1998 г. Одобрен Советом Федерации 17.07.1998 г.]. – Режим доступа: URL: http://www.consultant.ru/popular/

Налоговый кодекс Российской Федерации. Часть вторая [принят Государственной Думой 19.07.2000 г. Одобрен Советом Федерации 26.07.2000 г.]. – Режим доступа: URL: http://www.consultant.ru/popular/

4. Распоряжение Правительства РФ от 13 февр. 2019 г. № 207-р [Электронный ресурс]. URL: http:// government.ru/docs/35733/ (дата обращения 08.04.2020 г.).

5. О национальных целях и стратегических задачах развития Российской Федерации на период до 2024 г. Указ Президента Российской Федерации от 07.05.2018 г. № 204 [Электронный ресурс]. URL: http://kremlin.ru/acts/ bank/43027 (дата обращения 08.04.2020 г.).

6. Об утверждении Основ государственной политики регионального развития Российской Федерации на период до 2025 года. Указ Президента Российской Федерации от 16.01.2017 г. № 13 [Электронный ресурс]. URL: http:// kremlin.ru/acts/bank/41641 (дата обращения 08.04.2020 г.)

7. Ленин В.И. Полное собрание соч., 5 изд., т. 42, с. 278.

8. Послание Путина 15 января 2020: все предложения Президента Путина Федеральному собранию. buhguru.com/spravka-info/vse-...

9. Решение Коллегии Евразийской экономической комиссии от 3 сентября 2013 г. № 185 “Об утверждении перечня статистических показателей официальной статистической информации, предоставляемой Евразийской экономической комиссии уполномоченными органами государств – членов Таможенного союза и Единого экономического пространства”. https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/70345586/

10. Машунин, Ю. К. Прогнозирование и планирование социально-экономических систем: учебник для вузов / Ю. К. Машунин. – Москва: Издательство Юрайт, 2021. – 330 с. – (Высшее образование). – Текст: непосредственный. ISBN 978-5-534-14698-1

11. Месарович М., Мако Д., Такахара И. Теория иерархических многоуровневых систем. М.: МИР, 1972. 344 с.

12.Дж. Гелбрейт. Экономическая теория и цели общества. – М.: Прогресс. 1976. -230.

13. Coase, Ronald. The Institutional Structure of Production // The American Economic Review, vol.82, n°4, pp. 713-719, 1992. (Nobel Prize lecture).

14. Саймон Г. Теория принятия решений в экономической теории и науке о поведении. // В кн.: Теория фирмы. СПб, 1995.

15. Бартов О. Б., Третьякова Е. А. Мезо уровневая модель влияния информационно-коммуникационных ресурсов на экономическое развитие российских регионов // Экономика региона. 2021. Т. 17, вып. 2. С. 402-417.
https://doi.org/10.17059/ekon.reg.2021-2-4

16. Лаврикова Ю. Г., Суворова А. В. Оптимальная пространственная организация экономики региона: поиск параметров и зависимостей // Экономика региона. 2020. Т. 16, вып. 4. С. 1017-1030. https://doi.org/10.17059/ekon.reg.2020-4-1

17. Котов А. В. Пространственный анализ структурных сдвигов как инструмент исследования динамики экономического развития макрорегионов России // Экономика региона. 2021. Т. 17, вып. 3. С. 755-768. https://doi.org/10.17059/ekon.reg.2021-3-3.

18.Тимирьянова В. М. Исследование связи производства, обмена и потребления методами иерархического анализа // Экономика региона. 2021. Т. 17, вып. 1. С. 145-157. https://doi.org/10.17059/ekon.reg.2021-1-11

19. Акаев А. А., Десятко Д. Н., Петряков А. А., Сарыгулов А. И. Региональное развитие и система образования в условиях цифровой трансформации // Экономика региона. 2020. Т. 16., вып. 4. С. 1031-1045. https:// doi.org/10.17059/ekon.reg.2020-4-2

20. Машунин Ю.К. Теория прогнозирования развития многоуровневой иерархической системы экономики государства на базе векторной оптимизации: монография / Ю.К. Машунин. – Москва.: РУСАЙНС, 2021. – 390 с. ISBN 978-5-4365-6727-3

21. Леонтьев В.В. Исследование структуры американской экономики. М.: Госстатиздат, 1958. 534 с.

22. Гранберг А.Г., Суслов В.И., Суспицын С.А. Многорегиональные системы. Экономико-математическое исследование / СО РАН, ИЭОПП, Гос. НИУ «Совет по изучению произв. сил». Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2007.370 с.

23. Крюков В. А., Баранов А. О., Павлов В. Н., Суслов В. И., Суслов Н. И. Проблемы развития единого комплекса средств макроэкономического межрегионального межотраслевого анализа и прогнозирования // Экономика региона. 2020. Т.16, вып. 4. С. 1072-1086. https://doi.org/10.17059/ekon.reg.2020-4-5

24. Елисеева И.И., Платонов В.В. Динамический потенциал – недостающее звено в исследовании инновационной деятельности // Финансы и бизнес. 2014. № 4. С. 102-110.

25. Татаркин А.И., Суховей А.В. Построение инновационной экономики в РФ: проблемы и перспективы // Инновации. 2017. № 7. С. 11-15.

26. Минакир П.А., Демьяненко А.Н., Горюнов А.П. Методология исследования интеграции и фрагментации в экономическом пространстве России // Россия. Тенденции и перспективы развития. Ежегодник. Вып. 13 / РАН. ИНИОН. Отд. науч. сотрудничества; отв. ред. В. И. Герасимов. – М.: ИНИОН РАН, 2018. Ч. 2. 936 с. С. 885–888.

27. Машунин Ю.К. Управление экономикой региона: монография. – М.: РУСАЙНС, 2017. – 342 с. ISBN 978-5-4365-1984-5

28. Машунин Ю.К. Теория прогнозирования развития многоуровневой иерархической системы экономики государства на базе векторной оптимизации: монография / Ю.К. Машунин. – Москва: РУСАЙНС, 2021. – 390 с. ISBN 978-5-4365-6727-3

29. Сио К. К. Управленческая экономика: Пер. с англ. – М.: ИНФА-М, 2000. – 671 с.

30. Хан К. Контроллинг. – М.: ИНФА-М, 2004. – 671 с.

31. Fayol A. (1992). General and industrial management. – M: Controlling.

32. Бабкин А.В., Байков Е.А. Коллаборация промышленных и творческих кластеров в экономике: сущность, формы, особенности // Научно-технические ведомости СПб государственного политехнического университета. Экономические науки. 2018. Т. 11. № 4. С. 141-164.

33. Машунин Ю. К., Машунин К. Ю. Моделирование и практика инновационного развития кластера // Научно-технические ведомости СПбПУ. Экономические науки. 2017. Т.10, №4. С. 187–197. DOI: 10.18721/JE. 1041828.

34. Машунин Ю.К., Машунин К.Ю. Стратегическое и инновационное развитие кластера на базе цифровой экономики // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Экономические науки. 2018. Т. 11, № 4. С. 85 – 99. DOI: 10.18721/JE.11406

35. Машунин Ю.К. Разработка стратегии развития муниципального образования: монография. – LAP LAMBERT, 2017. – 173 с. ISBN 978-3-659-94001-9

36. Машунин Ю.К., Машунин И.А. Прогнозирование развития экономики региона с использованием таблиц «Затраты – Выпуск» //Экономика региона – 2014. – № 2. С. 276-289. УДК: 338.27:519.714

37. Машунин Ю.К. Экономико-математическое моделирование и прогнозирование развития экономики региона на основе межотраслевого баланса и инвестиций // Труды Гранберговской конференции, 10–13 октября 2016 г., Новосибирск: Междунар. конф. «Пространственный анализ социально-экономических систем: история и современность»: сб. докладов – Новосибирск: ИЭОПП СО РАН, 2017. С.379-385.

38. Машунин Ю. К. Исследование, прогнозирование развития экономики, промышленности и формирование бюджета региона, государства в условиях цифровой экономики. 221-250 с. // В монографии: Цифровизация экономических систем: теория и практика / под ред. д-ра экон. наук, проф. А. В. Бабкина. – СПб. ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2020. – 796 с. ISBN 978-5-7422-6931-1

39.Yu.K. Mashunin, Strategic Development of the multi-level Socio-economic system of the State in the Digital Economy, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Economics, 14 (2) (2021) 22–49. DOI: 10.18721/JE.14202

40. Pareto V. 1896. Cours d'Economie Politique. – Lausanne: Rouge.

41. Машунин Ю.К. Методы и модели векторной оптимизации. – М.: Наука, 1986. 141 с.

42. Машунин Ю.К., Машунин К.Ю. Векторная оптимизация с равнозначными и приоритетными критериями //Изв. РАН. ТиСУ. 2017. №6. С. 80-99. https://rdcu.be/bhZ8i (scopus)

43. Mashunin, Yu. K., 2020. Theory and Methods of Vector Optimization (Volume One). – Cambridge Scholars Published. – 183 p. ISBN (10) 1-5275-4831-7 ISBN (13) 978-1-5275-4831-2

44. Mashunin, Yu. K., 2021. Theory and Methods of Vector Optimization (Volume Two). – Cambridge Scholars Published. – 270 p. ISBN (10): 1-5275-7413-X ISBN (13): 978-1-5275-7413-7

45. Машунин Ю. К. Векторная оптимизация. Т. 1. Векторная оптимизация: теория: монография / Ю.К. Машунин. – Москва: РУСАЙНС, 2021. 258 с. ISBN 978-5-4365-8611-1

46. Машунин Ю. К. Векторная оптимизация. Т. 2. Векторная оптимизация в инженерии: монография / Ю.К. Машунин. – Москва: РУСАЙНС, 2021. – 266 с. ISBN 978-5-4365-8611-3

47. Машунин, Ю. К. Векторная оптимизация. Т. 3. Векторная оптимизация в экономике: монография / Ю.К. Машунин. – Москва: РУСАЙНС, 2022. – 318 с. ISBN 978-5-4365-0227-4

48. Машунин Ю.К., Машунин И.А. Управление устойчивым развитием экономических систем в цифровую эпоху // Управление устойчивым развитием экономических систем в цифровую эпоху: монография / С.Е. Егорова, А. В. Бабкин, В.В. Лычагин [и др.]; под ред. д-ра экон. наук, проф. А. В. Бабкина. – СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2022. Стр.102-153. ISBN 978-5-7422-7936-5

49. Машунин Ю.К. Исследование и методология выбора оптимальных параметров в много уровневой социально-экономической системы стратегического развития государства в условиях цифровой экономики // Сборник. Перспективные научные исследования: актуальные вопросы, достижения и инновации / МИПИ им. Ломоносова. 2023. – стр.83-119. DOI 10.58351.230110.2023.13.38.005.

50. Mashunin Yu.K. Modeling, simulation, making optimal decisions in engineering and production systems based on vector optimization: monograph. Yu.K. Mashunin. Moscow: RuScience. 2024. – 368 p. ISBN 978-5-466-08001-8

51. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И. В. Виноградов. –М.: Советская Энциклопедия. Т.1 А – Г. 1977. 1152 с.

52. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И. В. Виноградов. –М.: Советская Энциклопедия. Т.3 Коо -Од – М. 1982. 1184 с.

53. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И. В. Виноградов. –М.: Советская Энциклопедия. Т.4 Ок-Сло. 1984. 1216 с.

54. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. – М.: Мир, 1964, 837 с.

55. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения: Пер. с англ./Под ред. И. Ф. Шахнова. – М.: Радио и связь, 1981. 560 с.

56. J. Johannes. Vector Optimization: Theory, Applications, and Extensions. New York, Berlin, Heidelberg. Springer-Verlag. 2010. 460 p.

57. Qamrul Hasan Ansari, Jen-Chih Yao. Recent Developments in Vector Optimization. Springer Heidelberg Dordrecht. New York. London. 2010. 550 p.

58. Nakayama Hirotaka, Yun Yeboon, Yoon Min. Sequential Approximate Multiobjective Optimization Using Computational Intelligence. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. 2009. 197 p.

59. Shankar R. Decision Making in the Manufacturing Environment: Using Graft Theory and fuzzy Multiple Attribute Decision Making Methods. Springer; 2007. 373 p.

60. Cooke T., Lingard H., Blismas N. The development end evaluation of a decision support tool for health and safety in construction design // Engineering, Construction and Architectural Management. 2008. V. 15. №4. P. 336-351.

61. Гермейер Ю.Б. Игры с не противоположными интересами. – М.: Наука, 1976, 326 стр.

62. Зак Ю.А. Многоэтапные процессы принятия решений в задаче векторной оптимизации // АиТ. 1976. № 6, С. 41-45.

63. Михайлевич В. С., Волкович В. П. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. М.: Наука, 1982, 285 с.

64. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука. 1982. 256 с.

65. Машунин Ю. К., Левицкий В. Л. Методы векторной оптимизации в анализе и синтезе технических систем: монография. – Владивосток: ДВГАЭУ, 1996. 131 с.

67. Машунин Ю.К. Решение композиционных и декомпозиционных задач синтеза сложных технических систем методами векторной оптимизации//Изв. РАН. ТиСУ. 1999. №3. С. 88-93.

68. Yu. K. Mashunin, “Solving composition and decomposition problems of synthesis of complex engineering systems by vector optimization methods,” Comput. Syst. Sci. Int. 38, 421 (1999). (Scopus).

69. Машунин Ю.К., Машунин К.Ю. Моделирование технических систем в условиях неопределенности и принятие оптимального решения //Изв. РАН. ТиСУ. 2013. №4. С. 19-35.

70. Mashunin K. Yu., and Mashunin Yu. K. Simulation Engineering Systems under Uncertainty and Optimal Decision Making. Journal of Comput. Syst. Sci. Int. Vol. 52. No. 4. 2013. 519-534. (Scopus)

71. Mashunin Yu.K. Mashunin K.Yu. Modeling of technical systems on the basis of vector optimization (1. At equivalent criteria) / International Journal of Engineering Sciences & Research Technology. 3 (9): September, 2014. P. 84-96.

72. Mashunin Yu.K. Mashunin K.Yu. Modeling of technical systems on the basis of vector optimization (2. with a Criterion Priority) / International Journal of Engineering Sciences & Research Technology. 3 (10): October, 2014. P. 224-240.

73. Yu. K. Mashunin, K. Yu. Mashunin. Simulation and Optimal Decision Making the Design of Technical Systems // American Journal of Modeling and Optimization. 2015. Vol. 3. No 3, 56-67.

74. Yu. K. Mashunin, K. Yu. Mashunin. Simulation and Optimal Decision Making the Design of Technical Systems (2. The Decision with a Criterion Priority) // American Journal of Modeling and Optimization. 2016. Vol. 4. No 2, 51-66.

75. Yu. K. Mashunin, “Methodology of the Choice of Optimum Parameters of Technological Process on Experimental to Data. «American Journal of Modeling and Optimization, vol. 7, no. 1 (2019): 20-28. Doi: 10.12691/ajmo-7-1-4.

76. Yu. K. Mashunin. Vector optimization in the system optimal Decision Making the Design in economic and technical systems // International Journal of Emerging Trends & Technology in Computer Science. 2017. Vol. 7. No 1, 42-57.

77. Mashunin, Yu. K, Optimal designing in the interrelation technical system – Materials (Theory) // Mathematical methods in engineering and technology: proceedings of international. Science. Conf.: 12 tons 4 /under General Ed. A. A. Bolshakova. –SPb.: Publishing house of Polytechnical Institute. Un-t, 2018. P. 40-46.

78. Yu. K. Mashunin. Concept of Technical Systems Optimum Designing (Mathematical and Organizational Statement)// International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2017 Proceedings 8076394. Saint Petersburg. Russia/ WOS: 000414282400287 ISBN:978-1-5090-5648-4. (Web of science)

79. Yu. K. Mashunin. Optimum Designing of the Technical Systems Concept (Numerical Realization) // International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2017 Proceedings 8076395. Saint Petersburg. Russia/ WOS: 000414282400288 ISBN:978-1-5090-5648-4. (Web of science)

80. Mashunin K. Yu., and Mashunin Yu. K. Vector Optimization with Equivalent and Priority Criteria. Journal of Comput. Syst. Sci. Int., 2017, Vol. 56. No. 6. pp. 975-996. https://rdcu.be/bhZ8i (Scopus).

81. Mathematical Apparatus of Optimal Decision-Making Based on Vector Optimization,” Appl. Syst. Innov. 2019, 2, 32. https://doi.org/10.3390/asi2040032 (Scopus)