

DOI 10.58351/2949-2041.2025.26.9.005

Машунин Юрий Константинович

Доктор экономических наук, к.т.н., профессор
Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия

ORCID id: 0000-0001-7071-8729

Mashunin Yu. K., Doctor of Economics, Ph.D., Professor,
Far Eastern Federal University, Russia, Vladivostok,

ORCID id: 0000-0001-7071-8729

**МНОГОМЕРНАЯ МАТЕМАТИКА. ПРОЕКТИРОВАНИЕ ИНЖЕНЕРНЫХ СИСТЕМ,
МАТЕРИАЛОВ: ВЫБОР ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ, ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ
ИНТЕРПРЕТАЦИЯ В ОТНОСИТЕЛЬНЫХ И ФИЗИЧЕСКИХ ЕДИНИЦАХ
MULTIDIMENSIONAL MATHEMATICS. DESIGN OF ENGINEERING SYSTEMS,
MATERIALS: SELECTION OF OPTIMAL PARAMETERS,
GEOMETRIC INTERPRETATION IN RELATIVE AND PHYSICAL UNITS**

Аннотация. *Цель работы* представление теории и методов Многомерной математики. Построение математической модели инженерной системы (на примере структуры материала) в виде векторной задачи математического программирования на стадии проектирования. Выбор оптимальных параметров в многопараметрической и многофункциональной инженерной системы на базе многомерной математики. Геометрическая интерпретация результатов решения N -мерной инженерной системы в двухмерной системе в относительных и физических единицах. Представлены принципы оптимальности решения векторных задач при равнозначных критериях и при заданном приоритете критерия <https://rdcu.be/bhZ8i>. (Работа "Vector optimization with equivalent and priority criteria" Springer Nature распространяется бесплатно.).

В прикладной части работы представлено решение векторной задачи математического программирования - модели инженерной системы (на примере структуры материала). Выбор оптимальных параметров в многопараметрической и многофункциональной инженерной системы в условиях определенности и неопределенности на базе многомерной математики.

В организационном плане процесс моделирования и симулирования инженерной системы представлен в виде методологии: «Методология выбора оптимальных параметров инженерных систем в условиях определенности и неопределенности на базе многомерной математики». Методология разделена на две части. Первая часть – «Выбор оптимальных параметров инженерных систем в условиях определенности – равнозначные критерии»: включает два блока, разделенных на ряд этапов. Вторая часть – «Выбор оптимальных параметров инженерных систем в условиях неопределенности - с приоритетом одного из критериев»: включает два блока. При исследовании выполнен выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы (структура материала) по заданной величине приоритетного (по мнению проектировщика) критерию. Представлена геометрическая интерпретация результатов решения четырехмерной системы в двухмерную по каждому критерию в относительных и физических единицах.

Abstract. The purpose of the work is to present the theory and methods of Multidimensional Mathematics. Construction of a mathematical model of an engineering system (on the example of the structure of the material) in the form of a vector problem of mathematical programming at the design stage. Selection of optimal parameters in a multiparameter and multifunctional engineering system based on multidimensional mathematics. Geometric interpretation of the results of the solution of an N -dimensional engineering system in a two-dimensional system in relative and physical units. The principles of optimality of solving vector problems with equivalent criteria and with a given priority of the criterion are presented <https://rdcu.be/bhZ8i>. (The work "Vector optimization with equivalent and priority criteria" by Springer Nature is distributed free of charge.).



The applied part of the work presents the solution of a vector problem of mathematical programming - a model of an engineering system (on the example of the structure of the material). Selection of optimal parameters in a multiparameter and multifunctional engineering system under conditions of certainty and uncertainty on the basis of multidimensional mathematics.

In organizational terms, the process of modeling and simulation of an engineering system is presented in the form of a methodology: "Methodology for choosing optimal parameters of engineering systems under conditions of certainty and uncertainty based on multidimensional mathematics". The methodology is divided into two parts. The first part – "Selection of optimal parameters of engineering systems in conditions of certainty – equivalent criteria": includes two blocks divided into a number of stages. The second part – "Selection of optimal parameters of engineering systems in conditions of uncertainty – with the priority of one of the criteria": includes two blocks.

In the course of the study, the optimal parameters of the complex engineering system (material structure) were selected according to the given value of the priority (in the designer's opinion) criterion. A geometric interpretation of the results of solving a four-dimensional system into a two-dimensional one for each criterion in relative and physical units is presented.

Ключевые слова: Инженерная система, Теория многомерной математики, Аксиоматика векторной оптимизации, Методология моделирования, Математическое и программное обеспечение, сложная техническая система структура материала.

Keywords: Engineering System, Theory of Multidimensional Mathematics, Axiomatics of Vector Optimization, Modeling Methodology, Mathematical and Software, Complex Technical System Material Structure.

1. Введение.

Исследование развития инженерных систем и науки о материалах, в частности, показало, что их развитие характеризуется некоторым множеством функциональных характеристик, зависящих от некоторого множества параметров, которые необходимо учитывать на стадии проектирования. Анализ функционирования инженерных систем показал, что улучшение по одной из характеристик приводит к ухудшению других характеристик. Для улучшения функционирования инженерной системы в целом необходимо улучшения всех характеристик в совокупности [1, 2].

Математическая модель таких (инженерных) систем представлена многокритериальными задачами оптимизации и, как следствие, требуется решение многокритериальных (векторных) задач математического программирования. Исследования такого класса задач началось более ста лет тому назад в работе Pareto V. [3]. Дальнейшее исследования многокритериальной оптимизации проводилось как на теоретическом уровне зарубежными [4, 5, 6, 34-39] и русскими авторами [13, 14, 15-33], так и на решении практических задач сначала в области экономики [15, 16, 44], а за тем в области инженерных систем [7-12, 16-33, 44].

Цель работы представление теории и методов Многомерной математики. Построение математической модели инженерной системы (на примере структуры материала) в виде векторной задачи математического программирования на стадии проектирования. Выбор оптимальных параметров в многопараметрической и многофункциональной инженерной системы в условиях определенности и неопределенности на базе многомерной математики. Геометрическая интерпретация результатов решения N -мерной инженерной системы в двухмерной системе в относительных и физических единицах.

Под условиями определенности понимаются условия, при которых известна функциональная связь между функцией и параметрами. Под неопределенностью понимаются условия, когда неизвестна функциональная связь между функцией и параметрам, а известно лишь конечное множество данных между функцией и параметрами.

Для реализации поставленной цели в работе представлены две области исследования: математическое, программное обеспечение и прикладная область.



В области математического и программного обеспечения представлена характеристика, проведён анализ и исследование задач векторной оптимизации, [13, 14, 15-33, 44].

В рамках теории Многомерной математики (раздел векторная оптимизация) представлены аксиоматика и принципы оптимальности решения векторных задач при равнозначных критериях и при заданном приоритете критерия. На основе принципов оптимальности разработаны конструктивные методы решения задач векторной оптимизации, которые позволяют принимать оптимальное решение, во-первых, при равнозначных критериях, во-вторых, при заданном приоритете критерия.

В прикладной части работы представлено решение векторной задачи математического программирования - модели инженерной системы (на примере структуры материала). Выбор оптимальных параметров в многопараметрической и многофункциональной инженерной системы в условиях определенности и неопределенности на базе многомерной математики.

В задачах принятия оптимального решения выбора оптимальных параметров сложных инженерных системах возникают последовательно три вида задач.

1 вид. Решение векторной задачи при равнозначных критериях. Полученный результат является основой для дальнейшего исследования системы. При этом используется метод решения векторной задачи при равнозначных критериях. Если полученный результат удовлетворяет лицу, принимающего решения, (ЛПР - проектировщик), то он берется за основу. Если решение не удовлетворяет ЛПР, то переходим ко 2-му виду (прямая задача), связанная с изменением параметров; или 3-му виду решения векторных задач (Обратная задача: «Какие будут параметры сложных технических систем при заданных характеристиках).

В организационном плане процесс моделирования и симулирования инженерной системы представлен в виде методологии: «Методология выбора оптимальных параметров инженерных систем в условиях определенности и неопределенности на базе многомерной математики». (Технические системы [16-32], технологические процессы [16, 22], материалы [18, 44]),

Методология разделена на две части.

Первая часть – «Выбор оптимальных параметров инженерных систем в условиях определенности – равнозначные критерии»: включает два блока, разделенных на ряд этапов.

Блок 1. Формирование технического задания, преобразование условий неопределенности (связанных с экспериментальными данными) в условия определенности, построение математической и численной модели инженерной системы (the process of modeling of a engineering system) включает 4 этапа.

1 этап. Формирование технического задания для численного моделирования и выбора оптимальных параметров системы. Исходные данные формирует конструктор, который проектирует инженерную систему. *2 этап.* Построение математической и численной модели инженерной системы в условиях определенности. *3 этап.* Преобразование условий неопределенности в условия определенности и построение математической и численной модели инженерной системы в условиях определенности. *4 этап.* Построение агрегированной математической и численной модели инженерной системы в условиях определенности.

Блок 2. Принятие оптимального решения (выбора оптимальных параметров) в инженерной системе (материал) при равнозначных критериях на базе многомерной математики (the process of simulation of a engineering system).

5 этап. Решение векторной задачи математического программирования (ВЗМП) - модели инженерной системы при равнозначных критериях (решение прямой задачи). *6 этап.* Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП при равнозначных критериях в трехмерной системе координат в относительных единицах. *7 этап.* Анализ результатов решения Векторной Задачи Математического Программирования при равнозначных критериях - подготовка информации для принятия решений с приоритетом отдельного критерия из всего множества критериев.

Вторая часть – «Выбор оптимальных параметров инженерных систем в условиях неопределенности - с приоритетом одного из критериев»: включает два блока



Блок 3. Анализ, сравнение результатов решения ВЗМП при равнозначных критериях сложной инженерной системы (модели структуры материала) и подготовка к выбору оптимальных параметров по приоритетному критерию.

8 этап. 1. Анализ и сравнение результатов решения векторной задачи с равнозначными критериями с четырьмя и двумя переменными. 2. Вывод из анализа: Информация об Инженерной Системе в физических единицах для принятия решений с приоритетом критерия. 3. Подготовка к геометрической интерпретации решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по приоритетному критерию. 9 этап. Геометрическая интерпретация результатов решения при проектировании инженерной системы перехода от двухмерного к N -мерному пространству в относительных единицах.

Блок 4.k1. Исследование, выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы (структура материала) по первому приоритетному критерию, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП

4.1.k1. Решение ВЗМП - модели сложной инженерной системы (структуры материала) при заданном приоритете первого критерия в многомерной математике. (решение обратной задачи). 4.2.k1. Анализ результатов решения векторной задачи математического программирования - модели инженерной системы при заданном приоритете первого критерия. 4.3.k1. Геометрическая интерпретация результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по первому приоритетному критерию в относительных единицах. 4.4.k1. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП с приоритетом первого критерия – модели структуры материала при проектировании в трехмерной системе координат в физических единицах. *Далее по аналогии второй, третий и четвертый блок.*

Блок 4.k2. Исследование, выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы (структура материала) по второму приоритетному критерию, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП

Блок 4.k3. Исследование, выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы (структура материала) по третьему приоритетному критерию, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП

Блок 4.k4. Исследование, выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы (структура материала) по четвертому приоритетному критерию, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП

Реализация всех блоков методологии показана на численном примере (структуры материала).

2. Математическая постановка проблемы. Построение математической модели структуры материала в условиях определенности и неопределенности.

Химический состав материала изделия определяется (на единицу объема, веса) процентным содержанием некоторого множества компонент материала, которые в сумме равны ста процентам. Состав материала, характеризуется определенным набором функциональных характеристик, которые включают в себя механические и физико-химические свойства материалов. Одна группа свойств (функциональных характеристик) материала характеризуется тем, что их желательно по своей числовой величине получить как можно больше (например, прочность), другая группа свойств характеризуется тем, что их желательно по своей числовой величине получить как меньше. Улучшение по одной из этих характеристик приводит к ухудшению другой. В целом требуется подобрать такой состав материала, чтобы все свойства материала были как можно лучше в совокупности.

2.1. Математическая модель структуры материала

Рассматривается состав материала какого-либо изделия, технической системы, которая зависит от ряда компонент материала: $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_V\}$, где V - множества компонент материала, $Y = \{y_j, j = \overline{1, V}\}$, V - число компонент, из которых может быть составлен (изготовлен) материал, y_v - величина в процентах v -ой компоненты материала, каждая из которых лежит в заданных пределах:

$$y_v^{\min} \leq y_v \leq y_v^{\max}, \quad v = \overline{1, V}, \quad (2.1)$$

где $y_v^{\min}$, $y_v^{\max}$, $\forall v \in V$ – нижний, верхний пределы изменения вектора компонент материала.



$$\sum_{v=1}^V y_v = 100\%, \quad (2.2)$$

сумма всех компонент материала равна ста процентам.

Состав материала оценивается набором (множеством) K физических свойств материала:

$$H(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K}\}, \quad (2.3)$$

которые функционально зависят от конструктивных параметров $Y = \{y_v, v = \overline{1, V}\}^T$;

k - индекс вида физического свойства материала, $k = \overline{1, K}$, где K - число видов свойств (функциональных характеристик) материала, представим их в виде вектор - функции.

$H(Y)$ - вектор-функция (векторный критерий), имеющая K - компонент-функций, (K - мощность множества K): $H(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K}\}$. Множество K состоит из подмножества K_1 компонент максимизации и подмножества K_2 минимизации; $K = K_1 \cup K_2$;

$H_1(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K_1}\}$ - это векторный критерий, каждая компонента которого максимизируется, K_1 - число критериев, а $K_1 = \overline{1, K_1}$ - множество критериев максимизации. В дальнейшем будем предполагать, что $H_1(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K_1}\}$ непрерывные вогнутые функции (иногда будем их называть критериями максимизации);

$H_2(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K_2}\}$ - векторный критерий, каждая компонента которого минимизируется, $K_2 = \overline{K_1 + 1, K} = \overline{1, K_2}$ - множество критериев минимизации, K_2 - число. Предполагаем, что $h_k(Y), k = \overline{1, K_2}$ - непрерывные выпуклые функции (будем иногда их называть критериями минимизации), т. е.: $K = K_1 \cup K_2, K_1 \subset K, K_2 \subset K$.

Характеристики материала $H(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K}\}$ мы используем как критерии, а пределы изменения, накладываемые на каждый вид компонент, как параметрические ограничения. Математическую модель материала, решающую в целом проблему выбора оптимального проектного решения (выбора оптимальной структуры материала), представим в виде векторной задачи математического программирования:

$$Opt H(Y) = \{\max H_1(Y) = \{\max h_k(Y), k = \overline{1, K_1}\}, \quad (2.4)$$

$$\min H_2(Y) = \{\min h_k(Y), k = \overline{1, K_2}\}\}, \quad (2.5)$$

$$G(Y) \leq B, \quad (2.6)$$

$$\sum_{v=1}^V y_v(t) = 100\%, \quad (2.7)$$

$$y_v^{min} \leq y_v \leq y_v^{max}, v = \overline{1, V}, \quad (2.8)$$

где $Y = \{y_j, j = \overline{1, V}\}$ - вектор управляемых переменных (компонент материала) из (2.1);

$H(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K}\}$ - векторный критерий, каждая функция которого представляет характеристику материала, функционально зависящую от вектора переменных Y ;

$G(Y) = \{g_1(Y), \dots, g_M(Y)\}^T$ - вектор-функция ограничений, накладываемых на структуру материала, M - множество ограничений.

Предполагается, что функции $H(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K}\}$ дифференцируемы и выпуклы, $G(Y) = \{g_i(Y), i = \overline{1, M}\}^T$ непрерывны, а заданное ограничениями (2.6)-(2.8) множество допустимых точек S не пусто и представляет собой компакт:

$$S = \{X \in R^n | G(Y) \leq 0, Y^{min} \leq Y \leq Y^{max}\} \neq \emptyset, \quad (2.9)$$

Соотношения (2.4)-(2.8) образуют математическую модель материала. Требуется найти такой вектор параметров $Y^o \in S$, при котором каждая компонента (характеристика) вектор - функции: $H_1(Y)$ принимает максимально возможное значение, а вектор - функции $H_2(Y)$ принимает минимальное значение:

$$H_1(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K_1}\}, H_2(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K_2}\}. \quad (2.10)$$

В работе исследование конструктивных свойств материала рассматриваются в статике. Но структура материала могут рассматриваться в динамике (например, при изменении внешней температуры за какой-нибудь период времени). Для этого можно, использовать дифференциально-разностные методы преобразования [4] и проводить исследование за небольшой дискретный промежуток времени $\Delta t \in T$.

В совокупности математическую модель материала (2.4)-(2.8) можно трактовать как системный подход к исследованию материала.



2.2. Построение математической модели структуры материала в условиях определенности и неопределенности

При построении математической модели материала (2.4)-(2.8), как и для технической системы [20-26], возможны условия: определенности и неопределенности.

2.2.1. Построение математической модели материала в условиях определенности

Условия определенности характеризуются тем, что известна функциональная зависимость каждой характеристики материала и ограничений от конструктивных компонент материала. Для построения функциональной зависимости выполняем следующие работы.

1. Формируем множество всех функциональных характеристик (свойств) материала K .

Величину характеристики обозначим $h_k(Y)$, $k = \overline{1, K}$. Определяем множество всех компонент материала V , от которых зависят эти характеристики. Величины параметров представим в виде вектора $Y = \{y_j, j = \overline{1, V}\}$. Даем вербальное описание характеристик материала.

2. Мы проводим исследование физических процессов, протекающих в материале. Для этого используем фундаментальные законы физики: моделирование магнитных, температурных полей; законы сохранения энергии, движения и т. д. Устанавливаем информационную и функциональную связь характеристик материала и ее параметров: $H(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K}\}$.

3. Мы определяем функциональные ограничения: $H(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K}\}$

$$h_k^{\min} \leq h_k \leq h_k^{\max}, k = \overline{1, K}, \text{ или } H^{\min} \leq H \leq H^{\max}$$

и параметрические ограничения:

$$y_v^{\min} \leq y_v \leq y_v^{\max}, v = \overline{1, V}, \text{ или } Y^{\min} \leq Y \leq Y^{\max}.$$

Сумма всех компонент материала равна ста процентам: $\sum_{v=1}^V y_v(t) = 100\%$.

4. В результате мы построим математическую модель материала в виде векторной задачи математического программирования:

$$Opt H(Y) = \{\max H_1(Y) = \{\max h_k(Y), k = \overline{1, K_1}\}, \quad (2.10)$$

$$\min H_2(Y) = \{\min h_k(Y), k = \overline{1, K_2}\}\}, \quad (2.11)$$

$$H^{\min} \leq H \leq H^{\max}, \quad (2.12)$$

$$\text{при ограничениях } \sum_{v=1}^V y_v = 100\%, \quad (2.13)$$

$$y_v^{\min} \leq y_v \leq y_v^{\max}, v = \overline{1, V}, \quad (2.14)$$

Задача (2.10)-(2.14) адекватна задачи (2.4)-(2.8).

2.2.2. Построение математической модели материала в условиях неопределенности

Условия неопределенности характеризуются тем, что отсутствует достаточная информация о функциональной зависимости свойства материала от состава компонент. В этом случае проводятся экспериментальные исследования. Для заданного числа составов материалов:

$$Y_i = \{y_{ij}, j = \overline{1, V}\}, i = \overline{1, M}$$

определяются соответствующий набор свойств:

$$H(Y_i) = \{h_k(Y_i), k = \overline{1, K}\}, i = \overline{1, M}.$$

В итоге матрица экспериментов по исследованию структуры материала принимает вид:

$$I = \left\| \begin{array}{l} Y_1 = \{y_{1v}, v = \overline{1, V}\} h_1(Y_1) \dots h_K(Y_1) \\ \dots \\ Y_M = \{y_{Mv}, v = \overline{1, V}\} h_1(Y_M) \dots h_K(Y_M) \end{array} \right\|. \quad (2.15)$$

где столбец $v \in V$ представляет числовую величину v -ой компоненты материала в процентах, $v = \overline{1, V}$ столбец $k \in K$ представляет числовую величину k -го свойства материала, $k = \overline{1, K}$.

Задача лица, принимающего решения, (ЛПР) - конструктора состоит в выборе такой альтернативы, которая позволила бы получить "в наибольшей мере устраивающий его (оптимальный) результат" [18, 20]. Множество критериев (характеристик) K подразделяется на два подмножества $K = K_1 \cup K_2, K_1 \subset K, K_2 \subset K$.

K_1 — это подмножество характеристик, числовые величины которых желательно получить, как можно выше: $I_1(Y_i) = \{h_k(Y_i), i = \overline{1, M}, k = \overline{1, K_1}\} \rightarrow \max$.



K_2 — это подмножества технических характеристик, числовые величины которых желательно получить, как можно ниже: $I_2(Y_i) = \{h_k(Y_i, i = \overline{1, M}), k = \overline{1, K_2}\} \rightarrow \min$.
Решение задачи принятия решений по структуре материала (2.15) по своей сути близка к решению векторной задачи математического программирования, которая в условиях неопределенности примет вид:

$$Opt H(Y) = \{\max I_1(Y) = \{\max h_k(Y_i, i = \overline{1, M}), k = \overline{1, K_1}\}, \quad (2.16)$$

$$\min I_2(Y) = \{\min h_k(Y_i, i = \overline{1, M}), k = \overline{1, K_2}\}\}, \quad (2.17)$$

$$\text{при ограничениях } h_k^{\min}(Y_i, i = \overline{1, M}) \leq h_k \leq h_k^{\max}(Y_i, i = \overline{1, M}), k = \overline{1, K}, \quad (2.18)$$

$$\sum_{v=1}^V y_v = 100\%, \quad (2.19)$$

$$y_v^{\min} \leq y_v \leq y_v^{\max}, v = \overline{1, V}, \quad (2.20)$$

где $Y_i = \{y_{ij}, j = \overline{1, V}\}, i = \overline{1, M}$ - вектор управляемых переменных (параметров);

$H(Y_i) = \{I_1(Y_i), I_2(Y_i)\}$ - векторный критерий, каждая компонента которого представляет характеристику (свойство) материала, функционально зависящую от величины дискретного значения вектора переменных $Y_i, i = \overline{1, M}$; M - множество дискретных значений вектора переменных $Y_i, i = \overline{1, M}$;

в (2.18) $h_k^{\min}(Y_i) \leq h_k \leq h_k^{\max}(Y_i), k = \overline{1, K}$ - вектор-функция ограничений, накладываемых на функции материала изделия:

$y_v^{\min} \leq y_v \leq y_v^{\max}, v = \overline{1, V}$ - параметрические ограничения.

2.3. Построение математической модели материала в условиях определенности и неопределенности в виде векторной задачи.

В реальной жизни условия определенности и неопределенности совмещаются. Модель материала так же отражает эти условия. Объединим модели (2.10)-(2.14) и (2.16)-(2.20). В итоге получим модель материала в условиях определенности и неопределенности в совокупности в виде векторной задачи математического программирования:

$$Opt H(Y) = \{\max H_1(Y) = \{\max h_k(Y), k = \overline{1, K_1^{def}}\}, \quad (2.21)$$

$$\max I_1(Y) = \{\max h_k(Y_i, i = \overline{1, M}), k = \overline{1, K_1^{unc}}\}, \quad (2.22)$$

$$\min H_2(Y) = \{\min h_k(Y), k = \overline{1, K_2^{def}}\}, \quad (2.23)$$

$$\min I_2(Y) = \{\min h_k(Y_i, i = \overline{1, M}), k = \overline{1, K_2^{unc}}\}\}, \quad (2.24)$$

$$\text{при ограничениях } h_k^{\min} \leq h_k \leq h_k^{\max}, k = \overline{1, K}, \quad (2.25)$$

$$\sum_{v=1}^V y_v = 100\%, \quad (2.26)$$

$$y_v^{\min} \leq y_v \leq y_v^{\max}, v = \overline{1, V}, \quad (2.27)$$

где Y - вектор управляемых переменных (конструктивных параметров материала);

$H(Y) = \{H_1(Y) I_1(Y) H_2(Y) I_2(Y)\}$ - векторный критерий, каждая компонента которого представляет вектор критериев (характеристик) материала, которые функционально зависят от значений вектора переменных Y ; K_1^{def} , K_2^{def} (*definiteness*), K_1^{unc} , K_2^{unc} (*uncertainty*) множество критериев $\max$ и $\min$ сформированные в условиях определенности и неопределенности; в (2.25) вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование материала в производственных условиях, (2.27) параметрические ограничения.

3. Введение в многомерную математику: Анализ, Векторная задача математического программирования, Теория, Аксиомы и Аксиоматические методы, Принципы оптимальности

Математические модели структуры материала (2.21)-(2.27), а также модели технических систем, технологических процессов и динамической системы представлены векторными задачами математического программирования (ВЗМП), [16 - 21, 44]. Дальнейшее развитие исследования работ по теории векторной оптимизации привела к формированию "Многомерной математики".

3.1. Анализ развития современной математики.

Анализ математики современной проведен в соответствии [1, с. 560 – 563].

Математика – это наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира. Математика, как наука стала возможной после накопления достаточно



большого фактического материала, возникла в древней Греции в 6 – 5 веках до новой эры, в соответствии с [1] четыре периода.

1. Зарождение математики. На ранних стадиях развития счет предметов бытия привел к созданию простейших понятий арифметики натуральных чисел.

2. Период элементарной математики. Исследование предметов бытия привел к созданию простейших понятий арифметических вычислений, определения площадей, объемов и т.п. возникает математика, как наука.

3. Период создания математики переменных величин. С 17 века начинается новый период развития математики. На первый план выдвигается **понятие функции**, определяющее взаимосвязь переменных (параметров) исследуемого объекта. Изучение переменных величин и функциональных зависимостей приводит далее к основным понятиям математического анализа, к понятию предела, производной, дифференциала и интеграла. Создается анализ бесконечно малых в виде *дифференциального и интегрального* вычислений, позволяющее связывать конечные изменения переменных величин с их поведением на принимаемое решение (функцию). Основные законы механики и физики записываются в форме дифференциальных уравнений, и задача интегрирования этих уравнений выдвигается одной из важнейших задач математики.

4. Современная математики. Все созданные в 17 и 18 веках разделы математического анализа продолжали развиваться в 19, 20 и 21 веках. В качестве основного аппарата новых областей механики и математической физики усиленно разрабатывается теория дифференциальных уравнений обыкновенных и уравнений с частными производными, вычислительной математики. Проблемы нахождения наилучшего решения в задачах управления физическими или механическими системами, описываемые дифференциальными уравнениями, привели к созданию *теории оптимального управления*.

В целом процесс развития математики показывает, что при решении математических проблем, происходило исследование и анализ отдельной **функции (одномерной)**, зависящей от некоторого множества переменных (параметров) исследуемого объекта, системы. (Подробнее смотри в [1, с. 560 – 563]).

В реальной жизни исследуемый объект, система при своем функционировании (развитии) характеризуется некоторым набором функциональных характеристик, которые зависят от одних и тех же параметров системы. Отсюда проблема многомерности исследуемых объектов, систем стала общенаучной.

Для решения проблемы многомерности мы представим векторную (многомерную) задачу оптимизации и рассмотрим теорию (аксиоматику, принципы оптимальности) ее решения, [15, 29, 44].

3.2. Векторная задача математического программирования

Векторная задача математического программирования (ВЗМП) – это стандартная задача математического программирования, имеющая некоторое множество критериев, которые в совокупности представляют вектор критериев. ВЗМП подразделяются на однородные и неоднородные ВЗМП.

Однородные ВЗМП максимизации – это векторная задача, у которой каждая компонента множества критериев направлена на максимизацию.

Однородные ВЗМП минимизации – это векторная задача, у которой каждая компонента множества критериев направлена на минимизацию.

Неоднородные ВЗМП – это векторная задача, у которой множество критериев разделено на два подмножества (вектора) критериев – максимизации и минимизации соответственно, т. е. неоднородные ВЗМП – это объединение двух видов однородных задач. В соответствии с этими определениями представим выпуклую векторную задачу математического программирования с неоднородными критериями.

$$Opt F(X) = \{\max F_1(X) = \{\max f_k(X), k = \overline{1, K_1}\}, \quad (3.1)$$

$$\min F_2(X) = \{\min f_k(X), k = \overline{K_1 + 1, K} = K_2 \subset K\}, \quad (3.2)$$

$$G(X) \leq B, \quad (3.3)$$

$$X \geq 0, \quad (3.4)$$



где $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ - вектор переменных, т.е. это вектор из N -мерного евклидова пространства R^N ; $F(X)$ - вектор-функция (векторный критерий), имеющая K – компонент-функций, $F(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K}\}$. Множество K состоит из подмножества K_1 компонент максимизации и подмножества K_2 минимизации; $K = K_1 \cup K_2$, для оценки совокупности критериев вводится обозначение операция «opt», которое включает в себя max и min ;

$F_1(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K_1}\}$ — это векторные критерии максимизации, K_1 – множество критериев максимизации, $K_1 \equiv \overline{1, K_1}$, K – число, (задача (3.1), (3.32)-(3.4) является однородной задачей максимизации). Предполагаем, что $f_k(X), k = \overline{1, K_1}$ являются выпуклыми функциями;

$F_2(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K_2}\}$ — это векторные критерии, каждая компонента которого минимизируется, $K_2 \equiv \overline{K_1 + 1, K} \equiv \overline{1, K_2}$ - множество критериев минимизации, K_2 – число, (задача (3.2)-(3.4) является однородной задачей минимизации). Мы предполагаем, что $f_k(X), k = \overline{1, K_2}$ являются выпуклыми функциями (we will sometimes call these the minimization criteria), i.e.,

$$K_1 \cup K_2 = K, K_1 \subset K, K_2 \subset K. \quad (3.5)$$

$G(X) \leq B, X \geq 0$ - стандартные ограничения. $g_i(X) \leq b_i, i = 1, \dots, M$ где b_i – множество реальных чисел и $g_i(X)$ не пустое выпуклое множество точек.

$$S = \{X \in R^n | X \geq 0, G(X) \leq B, X^{min} \leq X \leq X^{max}\} \neq \emptyset \quad (3.6)$$

это допустимое множество точек (или более кратко - допустимое множество), задающиеся стандартными ограничениями (3.3)-(3.4) и тривиальными ограничениями $X \geq 0$. Предполагаем, что допустимое множество точек не пусто и представляет собой компакт. Векторная функция (критерий) минимизации $F_2(X)$ может быть преобразован в векторную функцию (критерий) максимизации умножением каждой компоненты $F_2(X)$ на минус единицу. Векторный критерий $F_2(X)$ введен в ВЗМП (3.1)-(3.4) для того, чтобы показать, что в задаче имеется два подмножества критериев K_1, K_2 с различными направлениями оптимизации.

Предполагаем, что точки оптимума, полученные по каждому критерию, не совпадают хотя бы для двух критериев. Если все точки оптимума совпадают между собой для всех критериев, то считаем решение тривиально.

3.3. Теория векторной оптимизации

Теория векторной оптимизации направлена на решение векторных (многокритериальных) задач математического программирования (3.1)-(3.4) с однородными и неоднородными критериями. Теория векторной оптимизации включает теоретические основы: аксиоматика, принципы оптимальности и методы решения векторных задач, во-первых, с равнозначными критериями и, во-вторых, с заданным приоритетом критерия. В совокупности теория векторной оптимизации представляет математический аппарат моделирования и принятия оптимального решения «объекта принятия решений».

В соответствии с этим определением «Теория векторной оптимизации» включает следующие разделы.

Основные теоретические понятия и определения, которые будут использованы при построении аксиоматики (аксиоматики Машунина Ю.К.), принципов оптимальности и методы решения задач векторной оптимизации. Аксиоматика Машунина Ю.К. подразделяется на аксиоматику, принципы оптимальности и методы решения векторных задач, во-первых, с равнозначными критериями и во-вторых, с заданным приоритетом критерия.

Концепция решения задач векторной оптимизации с равнозначными критериями. Концепция векторной оптимизации с приоритетом критерия. Симметрия в векторных задачах математического программирования: исследование, анализ.

«Объектом принятия решений» является: социальная система, экономическая и техническая система. Математический аппарат позволяет выбрать любую точку из множества точек, оптимальных по Парето, и показать ее оптимальность. Мы представили аксиоматику, принцип оптимальности и методы решения задач векторной оптимизации (3.1)-(3.4) с равнозначными критериями и заданным приоритетом критериев. [6, 20]. Для простоты исследования критерии и ограничения ВЗМП (3.1)-(3.4) представлены полиномами второй степени, т.е. рассматриваются выпуклые векторные задачи, которые также включают

векторные задачи линейного программирования. Выпуклые ВЗМП характеризуются свойством, что точка оптимума существует и такая точка только одна (Теорема Вейерштрасса).

3.4. Определения: Аксиомы и Аксиоматические методы.

Аксиома — это утверждение, не требующее логического доказательства. На основе этих утверждений строится та или иная теория.

Аксиоматический метод — это способ построения научной теории, при котором в основу теории кладутся некоторые исходные положения, называемые Аксиомами теории. В итоге все остальные положения теории получаются как логические следствия аксиом, [41]. В математике Аксиоматический метод зародился в работах древнегреческих геометров. Образцом аксиоматического метода является древнегреческий ученый Евклид, аксиомы которого были заложены в его знаменитом сочинении «Начала».

Дальнейшее развитие аксиоматического метода получил в работах Д. Гильберта в виде так называемого метода формализма системы. Общая схема построения произвольной формальной системы («S») включает:

1. *Язык системы*, в том числе алфавит – это перечень элементарных символов; правила образования (синтаксис), по которым строится формулы «S».

2. *Аксиомы системы* «S», которые представляют некоторое множество формул.

3. *Правила вывода системы* «S» [41].

В приложении к решению задачи векторной оптимизации Аксиоматика подразделяется на два раздела: 1. Аксиоматика решения задачи векторной оптимизации с равнозначными критериями; 2. Аксиоматика решения задачи векторной оптимизации с заданным приоритетом критериев.

Только при построении первоначальной аксиоматики возможно в дальнейшем построение принципа оптимальности и вытекающих из него алгоритмов решения векторных задач математического программирования.

4. Многомерная математика: теория методы

4.1. Теория, аксиоматика, принцип оптимальности и методы решения задач векторной оптимизации: равнозначные критерии

Аксиоматика векторной оптимизации с равнозначными критериями, как и теоретическая аксиоматика, рекомендованная Д. Гильбертом [41, с. 111], включает три раздела, представленные: 1) языком системы в виде определений нормализации критериев и относительной оценки; 2) аксиоматикой равенства критериев в задаче векторной оптимизации; 3) принципом оптимальности решения векторной задачи, на основании которого формируется конструктивный метод решения задачи векторной оптимизации с равнозначными критериями.

4.1.1. Язык системы многомерной математики: Нормализация критериев, относительная оценка

Определение 1. Нормализация критериев.

Нормализация критериев (математическая операция: сдвиг плюс нормирование) представляет однозначное отображение функции $f_k(X) \forall k \in K$, в одномерное пространство R^1 (сама функция $f_k(X) \forall k \in K$ представляет собой функцию преобразования из N -мерного евклидова пространства R^N в R^1). Для нормализации критериев в векторных задачах будут использоваться линейные преобразования:

$$f_k(X) = a_k f'_k(X) + c_k \forall k \in K, \text{ или } f_k(X) = (f'_k(X) + c_k) / a_k \forall k \in K, \quad (4.1)$$

где $f'_k(X)$, $k = \overline{1, K}$ - старое (до нормализации) значение критерия; $f_k(X)$, $k = \overline{1, K}$ - нормализованное значение, a_k, c_k - постоянные.

Нормализация критериев (4.1) $f_k(X) = (f'_k(X) + c_k) / a_k \forall k \in K$ представляет простое (линейное) инвариантное преобразование полинома, в результате которого структура полинома остается неизменной. В оптимизационной задаче нормализация критериев $f_k(X) = (f'_k(X) + c_k) / a_k \forall k \in K$ не влияет на результат решения. Действительно, если решается выпуклая оптимизационная задача:



$$\max_{X \in S} f(X), \text{ то в точке оптимума } X^* \in S: \frac{df(X^*)}{dx} = 0. \quad (4.2)$$

В общем случае (в том числе с нормализацией критерия (2.7)) решается задача:

$$\max_{X \in S} (a_k f'_k(X) + c_k), \quad (4.3)$$

то в точке оптимума $X^* \in S$:

$$\frac{d(a_k f(X^*) + c_k)}{dx} = a_k \frac{d(f(X^*))}{dx} + \frac{d(c_k)}{dx} = 0. \quad (4.4)$$

Результат идентичен, т.е. точка оптимума $X_k^*, k = \overline{1, K}$ является одной и той же для ненормализованных и нормализованных задач.

Определение 2. Определение относительной оценки функции (критерия). В векторной задаче (3.1)-(3.4) введем обозначение:

$$\lambda_k(X) = \frac{f_k(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, \forall k \in K \quad (4.5)$$

$\lambda_k(X)$ – это относительная оценка, которая представляет нормализованный критерий: $f_k(X)$, $\forall k \in K$ в точке $X \in S$, где в точке $X \in S$ величина k -го критерия равна $f_k(X)$;

f_k^* – величина k -го критерия в точке оптимума $X \in S$, полученной при решении векторной задачи (3.1)-(3.4) отдельно по k -му критерию; f_k^0 – наихудшая величина k -го критерия на допустимом множестве S в векторной задаче. Относительная оценка $\lambda_k(X) \forall k \in K$, во-первых, измеряется в относительных единицах; во-вторых, относительная оценка $\lambda_k(X) \forall k \in K$ на допустимом множестве S меняется с нуля в точке X_k^0 к единице в точке оптимума X_k^* :

$$\forall k \in K \lim_{X \rightarrow X_k^0} \lambda_k(X) = 0; \forall k \in K \lim_{X \rightarrow X_k^*} \lambda_k(X) = 1;$$

Относительная оценка $\lambda_k(X) \forall k \in K$ находится в следующих пределах:

$$\forall k \in K 0 \leq \lambda_k(X) \leq 1, X \in S, \quad (4.6)$$

В результате такой нормализации все критерии ВЗМП (3.1)-(3.4) соизмеримы в относительных единицах, что позволяет, сравнивая их друг с другом, использовать критерии при совместной оптимизации.

Определение 3. Операция сравнения относительных оценок функции (критерия) между собой.

Так как, любая функция (критерий) представлен в относительных оценках функций $\lambda_k(X) \forall k \in K$, которые лежат пределах (4.6) $\forall k \in K 0 \leq \lambda_k(X) \leq 1$, то возможно сравнение относительных оценок по числовой величине. Для сравнения используется операция «вычитания». Если сравниваются две функции (критерия), измеренные в относительных оценках $\lambda_{k=1}(X)$ и $\lambda_{k=2}(X) \forall k \in K$, то возможны три ситуации:

$$\begin{aligned} &\text{первая, когда } \lambda_{k=1}(X) > \lambda_{k=2}(X); \\ &\text{вторая, когда } \lambda_{k=1}(X) = \lambda_{k=2}(X); \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\text{третья, когда } \lambda_{k=1}(X) < \lambda_{k=2}(X). \quad (4.8)$$

Таким образом в многомерной математике используется одна математическая операция: сравнение. Первая и третья ситуация исследуется в разделе 6.

В разделе 5 исследуется вторая ситуация (4.7).

4.1.2. Аксиома равенства критериев в задаче векторной оптимизации.

Аксиома 1. О равенстве и равнозначности критериев в допустимой точке векторной задачи математического программирования.

В векторной задаче оптимизации два критерия с индексами $l \in K, q \in K$ будем считать равнозначными в точке $X \in S$, если относительные оценки по k -му и q -му критерию равны между собой в этой точке: $\lambda_l(X) = \lambda_q(X), l, q \in K$.

Пояснение. Если в точке $X \in S$ функции (критерии) в относительных единицах будут равны: $\lambda_l(X) = 0,45, l \in K$ и $\lambda_q(X) = 0,45, q \in K$ (т.е. 45% от своей оптимальной величины, которая в относительных единицах равна 1), то такие критерии не «равны» друг другу, а равнозначны по своему числовому значению. И каждый критерий $l \in K, q \in K$ несет свой функциональный смысл, числовая величина которого может быть получена, используя нормализацию критериев (4.5).



Определение 4. Определение минимального относительного уровня.

Относительный уровень λ в векторной задаче представляет нижнюю оценку точки $X \in S$ среди всех относительных оценок $\lambda_k(X), k = \overline{1, K}$:

$$\forall X \in S \lambda \leq \lambda_k(X), k = \overline{1, K}, \quad (4.9)$$

нижний уровень для выполнения условия (2.9) в точке $X \in S$ определяется как:

$$\forall X \in S \lambda = \min_{k \in K} \lambda_k(X). \quad (4.10)$$

Соотношения (4.9) и (4.10) являются взаимосвязанными. Они служат переходом от операции (4.10) определения $\min$ к ограничениям (4.9) и наоборот. Относительный уровень λ позволяет объединить все критерии в векторной задаче одной числовой характеристикой λ и производить над ней определенные операции, тем самым, выполняя эти операции над всеми критериями, измеренными в относительных единицах.

Относительный уровень λ функционально зависит от переменной $X \in S$. Изменяя X , можем изменять все $\lambda_k(X), k = \overline{1, K}$ и соответственно нижний уровень $\lambda = \min_{k \in K} \lambda_k(X)$, который является характеристикой многомерной (многофункциональной) системы.

Пояснение. Величина относительной оценки $\forall k \in K \lambda_k(X)$ является характеристикой одномерной системы, а величина минимального относительного уровня $\lambda = \min_{k \in K} \lambda_k(X)$ является характеристикой многомерной математики.

4.1.3. Принцип оптимальности решения многомерной (векторной) задачи оптимизации с равнозначными критериями.

Определение 5. Принцип оптимальности решения векторной задачи с равнозначными критериями.

Векторная задача математического программирования при равнозначных критериях решена, если найдена точка $X^o \in S$ и максимальный уровень λ^o (верхний индекс o - оптимум) среди всех относительных оценок такой, что

$$\lambda^o = \max_{X \in S} \min_{k \in K} \lambda_k(X) \quad (4.11)$$

Используя взаимосвязь выражений (4.9) и (4.10), преобразуем максиминную задачу (4.11) в экстремальную задачу:

$$\lambda^o = \max_{X \in S} \lambda \quad (4.12)$$

$$\text{при ограничениях } \lambda \leq \lambda_k(X), k = \overline{1, K}. \quad (4.13)$$

Полученную задачу (4.12)-(4.13) назовем λ -задачей.

λ -задача (4.12)-(4.13) имеет $(N+1)$ размерность, как следствие результат решения λ -задачи (4.12)-(4.13) представляет собой оптимальный вектор $X^o \in R^{N+1}$, $(N+1)$ -я компонента которого суть величина λ^o , т. е. $X^o = \{x_1^o, x_2^o, \dots, x_N^o, x_{N+1}^o\}$, при этом $x_{N+1}^o = \lambda^o$, $(N+1)$ компонента вектора X^o выделена в λ^o .

Полученная пара $\{\lambda^o, X^o\} = X^o$ характеризует оптимальное решение λ -задачи (4.12)-(4.13) и соответственно векторной задачи математического программирования (3.1)-(3.4) с равнозначными критериями, решенную на основе нормализации критериев и принципе гарантированного результата. Назовем в оптимальном решении $X^o = \{\lambda^o, X^o\}$, X^o - оптимальной точкой, а λ^o - максимальным уровнем.

Теорема 1. Теорема о двух наиболее противоречивых критериях в ВЗМП с равнозначными критериями.

В выпуклой векторной задаче математического программирования (3.1)-(3.4) с равнозначными критериями, решенной на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата, в оптимальной точке $X^o = \{\lambda^o, X^o\}$ всегда имеется два критерия - обозначим их индексами $q \in K, p \in K$ (которые являются самыми противоречивыми из множества критериев $k = \overline{1, K}$), и для которых выполняется равенство:

$$\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_p(X^o), q, p \in K, X \in S, \quad (4.14)$$

и другие критерии определяются неравенством:

$$\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), \forall k \in K, q \neq p \neq k. \quad (4.15)$$

Впервые доказательство теоремы 1 представлено в [15, стр.22], в дальнейшем повторено в работе [19, стр. 234]. Точка X^o является оптимальным решением ВЗМП.



4.1.4. Конструктивный метод решения задачи векторной оптимизации с равнозначными критериями.

Для решения векторной задачи математического программирования (3.1)-(3.4) разработан метод, основанный на нормализации критериев, аксиоматике и принципе максимина (гарантированного результата). Конструктивный метод решения векторной задачи оптимизации с равнозначными критериями включает два блока: 1-й блок «Системный анализ» - разделен на три шага; 2-й блок «Принятие оптимального решения», включающий два шага: построения λ -задачи и ее решения.

Блок 1. Системный анализ.

Шаг 1. Решается задача (3.1)-(3.4) по каждому критерию отдельно, т.е. для $\forall k \in K_1$ решается на максимум, а для $\forall k \in K_2$ решается на минимум.

В результате получим: X_k^* - точка оптимума по соответствующему критерию, $k = \overline{1, K}$; $f_k^* = f_k(X_k^*)$ - величина k -го критерия в этой точке, $k = \overline{1, K}$.

Шаг 2. Определяем наихудшую величину каждого критерия (антиоптимум):

$f_k^0, k = \overline{1, K}$. Решается задача (3.1)-(3.4) для каждого критерия $k = \overline{1, K_1}$ на минимум:

$f_k^0 = \min f_k(X), G(X) \leq B, X \geq 0, k = \overline{1, K_1}$ для каждого критерия $k = \overline{1, K_2}$ на максимум:

$$f_k^0 = \max f_k(X), G(X) \leq B, X \geq 0, k = \overline{1, K_2}.$$

В результате решения получим: $X_k^0 = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ - точка оптимума по соответствующему критерию, $k = \overline{1, K}$; $f_k^0 = f_k(X_k^0)$ - величина k -го критерия.

Шаг 3. Выполняется системный анализ множества точек, оптимальных по Парето. В точках $X^* = \{X_k^*, k = \overline{1, K}\}$ определяются величины целевых функций $F(X^*)$ и относительных оценок $\lambda(X^*)$: $\lambda_k(X) = \frac{f_k(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, \forall k \in K$. Результат системного анализа:

$$F(X^*) = \{f_k(X_k^*), q = \overline{1, K}, k = \overline{1, K}\} = \begin{vmatrix} f_1(X_1^*), \dots, f_K(X_1^*) \\ \dots \\ f_1(X_K^*), \dots, f_K(X_K^*) \end{vmatrix}, \quad (4.16)$$

$$\lambda(X^*) = \{\lambda_q(X_k^*), q = \overline{1, K}, k = \overline{1, K}\} = \begin{vmatrix} \lambda_1(X_1^*), \dots, \lambda_K(X_1^*) \\ \dots \\ \lambda_1(X_K^*), \dots, \lambda_K(X_K^*) \end{vmatrix}. \quad (4.17)$$

Любая относительная оценка (4.17) лежит в пределах $0 \leq \lambda_k(X) \leq 1, k = \overline{1, K}$.

Из результатов системного анализа (4.16)-(4.17) вытекает проблема. Найти такую (оптимальную) точку, в которой все относительные оценки: $\lambda_q(X), q = \overline{1, K}$ были близки к единице. На решение этой проблемы направлена λ -задача.

Блок 2. Принятие оптимального решения. Включает два шага.

Шаг 4. Построение λ -задачи. Создание λ -задачи осуществляется в два этапа: первоначально строится максиминная задача оптимизации с эквивалентными критериями, которые на втором этапе преобразуются в стандартную задачу математического программирования, названной λ -задачей. Для построения максиминная задача используем определение 2:

$$\forall X \in S \quad \lambda = \min_{k \in K} \lambda_k(X).$$

Нижний уровень λ максимизируем по $X \in S$. В результате сформулируем максиминную задачу оптимизации с нормализованными критериями:

$$\lambda^0 = \max_{X \in S} \min_{k \in K} \lambda_k(X). \quad (4.18)$$

На втором этапе задача (4.18) преобразуется в стандартную задачу математического программирования, названную λ -задачей:

$$\lambda^0 = \max_{X \in S} \lambda, \quad \lambda^0 = \max_{X \in S} \lambda, \quad (4.19)$$

$$\lambda - \lambda_k(X) \leq 0, k = \overline{1, K}, \quad \rightarrow \quad \lambda - \frac{f_k(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0} \leq 0, k = \overline{1, K}, \quad (4.20)$$

$$G(X) \leq B, X \geq 0, \quad G(X) \leq B, X \geq 0, \quad (4.21)$$

где вектор неизвестных X имеет размерность $N + 1$: $X = \{\lambda, x_1, \dots, x_N\}$.

Шаг 5. Решение λ -задачи. λ -задача (4.19)-(4.21) - стандартная задача выпуклого программирования, для ее решения используются стандартные методы. В результате решения λ -задачи получим:



$$X^o = \{\lambda^o, X^o\} - \text{точку оптимума;} \quad (4.22)$$

$$f_k(X^o), k = \overline{1, K} - \text{величины критериев в этой точке;} \quad (4.23)$$

$$\lambda_k(X^o) = \frac{f_k(X^o) - f_k^o}{f_k^* - f_k^o}, k = \overline{1, K} - \text{величины относительных оценок;} \quad (4.24)$$

λ^o - максимальная относительная оценка, являющаяся максимальным нижним уровнем для относительных оценок $\lambda_k(X^o)$. λ^o - гарантированный результат в относительных единицах.

λ^o гарантирует, что в точке X^o относительные оценки $\lambda_k(X^o)$ больше или равны λ^o :

$$\lambda_k(X^o) \geq \lambda^o, k = \overline{1, K} \text{ or } \lambda^o \leq \lambda_k(X^o), k = \overline{1, K}, X^o \in S, \quad (4.25)$$

и в соответствии с теоремой 1 точка оптимума $X^o = \{\lambda^o, x_1, \dots, x_N\}$ является оптимальной по Парето.

4.2. Теория, аксиоматика, принцип оптимальности и методы решения задач векторной оптимизации: с приоритетом критерия

В определении 3 указано, что если сравнивать две функции (критерия), измеренных в относительных оценках $\lambda_{k=1}(X)$ и $\lambda_{k=2}(X) \forall k \in K$, то возможны три ситуации. Вторая ситуация, когда $\lambda_{k=1}(X) = \lambda_{k=2}(X)$ исследована в разделе 2.2 (равнозначные критерии). Ситуации: первая, когда $\lambda_{k=1}(X) > \lambda_{k=2}(X)$, и третья, когда $\lambda_{k=1}(X) < \lambda_{k=2}(X)$, исследуются в этом разделе. Такие ситуации определяются, как задачи с приоритетом критерия.

Для построения методов решения проблемы векторной оптимизации с приоритетом критерия мы введем определения: О приоритете одного критерия над другим; О числовом выражении приоритета критерия над другим; О заданном числовом выражении приоритета одного критерия над другим; О нижнем уровне среди всех относительных оценок с приоритетом критерия; О подмножестве точек, приоритетных по критерию; Принцип оптимальности 2 - Решение векторной задачи с заданным приоритетом критерия, [17, 43, 44].

4.2.1. Аксиоматика векторной оптимизации с приоритетом критерия

Язык системы аксиоматики решения векторной задачи с заданным приоритетом критерия включает определения:

1) Приоритет одного критерия над другим;

2) Числовое значение приоритета критерия; 3) Нижний уровень критерия среди всех относительных оценок с приоритетом критерия.

Определение 6. О приоритете одного критерия над другим.

Критерий $q \in K$ в векторной задаче (3.1)-(3.4) в точке $X \in S$ имеет приоритет над другими критериями $k = \overline{1, K}$, если относительная оценка $\lambda_q(X)$ по этому критерию больше или равна относительных оценок $\lambda_k(X)$ других критериев, т. е.:

$$\lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), k = \overline{1, K}, \quad (4.26)$$

строгий приоритет, если хотя бы для одного критерия $t \in K$:

$$\lambda_q(X) > \lambda_k(X), t \neq q, \text{ а для остальных критериев } \lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), k = \overline{1, K}, k \neq t. \quad (4.27)$$

Введением определения приоритета критерия $q \in K$ в ВЗМП (3.1)-(3.4) выполнено переопределение раннего понятия приоритета. Если раньше в него вкладывалось интуитивное понятие о важности этого критерия, то сейчас эта "важность" определяется математически: чем больше относительная оценка q -го критерия над другими, тем он важнее (приоритетнее), и наиболее высокий приоритет в точке оптимума $X_k^*, \forall q \in K$.

Из определения выражения приоритета критерия $q \in K$ в векторной задаче в уравнениях (3.1)-(3.4) следует, что возможная область соответствующая множеству точек $S_q \subset S$, которое характеризуется как $\lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), \forall k \neq q, \forall X \in S_q$. Однако, вопрос на сколько критерий $q \in K$ в точке множества S_q имеет больший приоритет относительно другого критерия остается открытым. Для ответа на этот вопрос, мы вводим коэффициент связи между парой относительных оценок q и k , что, в целом, представляет вектор:

$$P^q(X) = \{p_k^q(X) \mid k = \overline{1, K}\}, q \in K \forall X \in S_q. \quad (4.28)$$

Определение 7. О числовом выражении приоритета критерия над другими.

В векторной задаче (3.1)-(3.4) с приоритетом критерия q -го над другими критериями $k = \overline{1, K}$, для $\forall X \in S_q$, вектор $P^q(X)$ показывает во сколько раз относительная оценка $\lambda_q(X)$, $q \in K$, больше относительных оценок $\lambda_k(X)$, $k = \overline{1, K}$:



$$P^q(X) = \{p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}, k = \overline{1, K}\}, p_k^q(X) \geq 1 \quad \forall X \in S_q \subset S, k = \overline{1, K}, \forall q \in K. \quad (4.29)$$

Такое отношение $p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}$ назовем числовым выражением приоритета q -го критерия над остальными критериями $k = \overline{1, K}$.

Определение 7а. О заданном числовом выражении приоритета одного критерия над другим. В векторной задаче (3.1)–(3.4) с приоритетом критерия $q \in K$ для $\forall X \in S$ вектор $P^q = \{p_k^q, k = \overline{1, K}\}$, считается заданным лицом, принимающим решения, (ЛПР), если задана каждая компонента этого вектора. Заданная ЛПР компонента p_k^q , с точки зрения ЛПР, показывает во сколько раз относительная оценка $\lambda_q(X)$, $q \in K$ больше остальных относительных оценок $\lambda_k(X)$, $k = \overline{1, K}$. Вектор $p_k^q, k = \overline{1, K}$ является заданным числовым выражением приоритета q -го критерия над остальными критериями $k = \overline{1, K}$:

$$P^q(X) = \{p_k^q(X), k = \overline{1, K}\}, p_k^q(X) \geq 1, \forall X \in S_q \subset S, k = \overline{1, K}, \forall q \in K. \quad (4.30)$$

Векторная задача (3.1)–(3.4), в которой задан приоритет какого-либо из критериев, называют векторной задачей с заданным приоритетом критерия. Проблема задачи вектора приоритетов возникает тогда, когда необходимо определить точку $X^0 \in S$ по заданному вектору приоритетов.

При операции сравнения относительных оценок с приоритетом критерия $q \in K$, аналогично, как и в задаче с эквивалентными критериями, введем дополнительную числовую характеристику λ , которую назовем *уровнем*.

Определение 8. О нижнем уровне среди всех относительных оценок с приоритетом критерия. Уровень λ является нижним среди всех относительных оценок с приоритетом критерия $q \in K$, таким, что

$$\lambda \leq p_k^q \lambda_k(X), k = \overline{1, K}, q \in K, \forall X \in S_q \subset S, \quad (4.31)$$

нижний уровень для выполнения условия (4.31) определяется

$$\lambda = \min_{k \in K} p_k^q \lambda_k(X), q \in K, \forall X \in S_q \subset S. \quad (4.32)$$

Соотношения (4.31) и (4.32) являются взаимосвязанными и служат в дальнейшем переходом от операции определения $\min$ к ограничениям и наоборот. В разделе 3.1 мы дали определение точки $X^0 \in S$, оптимальной по Парето, с эквивалентными критериями. Рассматривая данное определение как исходное, мы построим ряд аксиом деления допустимого множества точек S , во-первых, как подмножество точек, оптимальных по Парето S^0 , и, во-вторых, на подмножество точек $S_q \subset S, q \in K$, приоритетным на q -му критерию.

4.2.2. Аксиоматика приоритета критериев в задаче векторной оптимизации.

Аксиома 2. О подмножестве точек, приоритетных по критерию в задаче векторной оптимизации.

В векторной задаче (3.1)–(3.4) подмножество точек $S_q \subset S$ называется областью приоритета критерия $q \in K$ над другими критериями, если

$$\forall X \in S_q \quad \forall k \in K \quad \lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), q \neq k.$$

Это определение распространяется и на множество точек S^0 , оптимальных по Парето, что дается следующим определением.

Аксиома 2а. О подмножестве точек, приоритетных по критерию, на множестве точек оптимальных по Парето.

В векторной задаче (3.1)–(3.4) подмножество точек $S_q^0 \subset S^0 \subset S$ называется областью приоритета критерия $q \in K$ над другими критериями, если $\forall X \in S_q^0 \quad \forall k \in K \quad \lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), q \neq k$. Дадим некоторые пояснения.

Аксиома 2 и 2а позволила представить в векторной проблеме (3.1)–(3.4) допустимое множество точек S , включая подмножество точек, оптимальных по Парето, $S^0 \subset S$, в подмножества:

одно подмножество точек $S' \subset S$, где критерии эквивалентны, и подмножество точек S' , пересекаясь с подмножеством точек S^0 , выделяет подмножество точек, оптимальных по Парето, в подмножество с эквивалентными критериями $S^{00} = S' \cap S^0$, которое, как это показано далее, состоит из одной точки $X^0 \in S$, т.е.



$$X^o = S^{oo} = S' \cap S^o, S' \in S, S^o \subset S; \quad (4.33)$$

« K » подмножеств точек, где у каждого критерия $q = \overline{1, K}$ имеется приоритет над другими критериями $k = \overline{1, K}, q \neq k$. Таким образом, выполнено разделение, во-первых, множества всех допустимых точек S , на подмножества $S_q \subset S, q = \overline{1, K}$, и, во-вторых, разделение подмножества точек, оптимальных по Парето, S^o , на подмножества $S_q^o \subset S_q \subset S, q = \overline{1, K}$.

Отсюда верны следующие соотношения:

$$S' \cup (\cup_{q \in K} S_q^o) \equiv S^o, S_q^o \subset S^o \subset S, q = \overline{1, K}. \quad (4.34)$$

Мы заметим, что подмножество точек S_q^o , с одной стороны, включено в область (подмножество точек), имеющих приоритет критерия $q \in K$ над другими критериями: $S_q^o \subset S_q \subset S$,

и с другой стороны, на подмножество точек, оптимальны по Парето: $S_q^o \subset S^o \subset S$.

Аксиома 2 и числовое выражение приоритета критерия (Определение 5) позволяет определять каждую допустимую точку $X \in S$ (посредством вектора:

$$P^q(X) = \{p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}, k = \overline{1, K}\}, \text{ формироваться и выбирать:} \quad (4.35)$$

- подмножество точек по приоритетному критерию S_q , который включен в множество точек $S, \forall q \in K X \in S_q \subset S$, (такое подмножество точек может использоваться в проблемах кластеризации, но это вне статьи);

- подмножество точек по приоритетному критерию S_q^o , который включен в ряд точек S^o , оптимальных по Парето, $\forall q \in K, X \in S_q^o \subset S^o$.

В итоге получим:

Множество допустимых точек $X \in S \rightarrow$	Подмножества точек оптимума по Парето $X \in S^o \subset S \rightarrow$	Подмножество оптимальных точек приоритетом $q \in K$ $X \in S_q^o \subset S_q \subset S \rightarrow$	Отдельная точка, $\forall X \in S$ $X \in S_q^o \subset S^o \subset S$
--	---	--	--

Это самый важный результат теории, который позволяет на основе этих трех аксиом вывести принцип оптимальности и построить методы выбора *любой точки* из множества точек, оптимальных по Парето. Такая классификация подмножества точек может использоваться в проблемах кластеризации, но это выходит за рамки статьи.

4.2.3. Принцип оптимальности решения векторной оптимизации с заданным приоритетом критерия

Определение 9. Принцип оптимальности 2. Решение векторной задачи с заданным приоритетом критерия.

Векторная задача (3.1)–(3.4) с заданным приоритетом q -го критерия $p_k^q \lambda_k(X), k = \overline{1, K}$ считается решенной, если найдена точка X^o и максимальный уровень λ^o среди всех относительных оценок такой, что

$$\lambda^o = \max_{X \in S} \min_{k \in K} p_k^q \lambda_k(X), q \in K. \quad (4.36)$$

Используя взаимосвязь (4.31) и (4.32), преобразуем максиминную задачу (4.36) в λ -задачу, которую назовем λ -задачей с приоритетом q -го критерия:

$$\lambda^o = \max_{X \in S} \lambda, \quad (4.37)$$

$$\text{при ограничениях } \lambda \leq p_k^q \lambda_k(X), k = \overline{1, K}. \quad (4.38)$$

Уравнения (4.37)–(4.38) называем λ -задачей с приоритетом критерия.

В оптимальном решении $X^o = \{X^o, \lambda^o\}$, X^o - оптимальная точка, а λ^o - максимальный нижний уровень. Точка X^o и уровень λ^o соответствуют ограничениям (5.8), которые можно записать как: $\lambda^o \leq p_k^q \lambda_k(X^o), k = \overline{1, K}$.

Эти ограничения являются основой оценки правильности результатов решения в практических векторных задачах оптимизации.

Определение 1 и 2 «Принципы оптимальности» дают возможность сформулировать понятие операции «орт».



Определение 9. (Математическая операция «opt»).

В векторной задаче (3.1)-(3.4), которая представлена критериями «max» и «min», математическая операция «opt» состоит в определении точки X^o и максимального нижнего уровня λ^o , в котором все критерии измеряются в относительных единицах:

$$\lambda^o \leq \lambda_k(X^o) = \frac{f_k(X^o) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}, \quad (4.39)$$

т.е. все критерии $\lambda_k(X^o), k = \overline{1, K}$ равны или больше максимального уровня λ^o , (поэтому λ^o также называется гарантированным результатом).

Теорема 2. Теорема о наиболее противоречивых критериях в векторной задаче с заданным приоритетом.

Если в выпуклой векторной задаче математического программирования максимизации (3.1)-(3.4) задан приоритет q -го критерия $p_k^q, k = \overline{1, K}, \forall q \in K$ над другими критериями, в точке оптимума $X^o \in S$, полученной на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата, всегда найдется два критерия с индексами $r \in K, t \in K$, для которых выполняется строгое равенство из:

$$\lambda^o = p_k^r \lambda_r(X^o) = p_k^t \lambda_t(X^o), r, t \in K, \quad (4.40)$$

и другие критерии определяются неравенствами:

$$\lambda^o \leq p_k^q(X^o), k = \overline{1, K}, \forall q \in K, q \neq r \neq t. \quad (4.41)$$

Критерии с индексами $r \in K, t \in K$, для которых выполняется равенство (4.40), называются наиболее противоречивыми.

Доказательство. Аналогично теореме 2 [19, 20].

Заметим, что в (4.40) и (4.41) индексы критериев $r \in K, t \in K$ могут совпадать с индексом $q \in K$.

Следствие теоремы 1. О равенстве оптимального уровня и относительных оценок в векторной задаче с двумя критериями с приоритетом одного из них.

В выпуклой векторной задаче математического программирования с двумя эквивалентными критериями, решаемой на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата, в оптимальной точке X^o всегда выполняется равенство: при приоритете первого критерия над второй:

$$\lambda^o = \lambda_1(X^o) = p_2^1(X^o) \lambda_2(X^o), X^o \in S, \quad (4.42)$$

где $p_2^1(X^o) = \lambda_1(X^o) / \lambda_2(X^o)$,

при приоритете второго критерия над первым:

$$\lambda^o = \lambda_2(X^o) = p_1^2(X^o) \lambda_1(X^o), X^o \in S,$$

где $p_1^2(X^o) = \lambda_2(X^o) / \lambda_1(X^o)$.

4.2.4. Конструктивный метод решения задачи векторной оптимизации с заданным приоритетом критерия.

Шаг 1. Решаем векторную задачу с равнозначными критериями. Алгоритм решения представлен в разделе 4.1.4. В результате решения получаем:

оптимальные точки по каждому критерию отдельно $X_k^*, k = \overline{1, K}$ и размеры критериальных функций в этих точках $f_k^* = f_k(X_k^*), k = \overline{1, K}$;

точки антиоптимума по каждому критерию $X_k^0 = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ и наихудшей неизменной части каждого критерия $f_k^0 = f_k(X_k^0), k = \overline{1, K}$;

$X^o = \{X^o, \lambda^o\}$ оптимальная точка, как результат решения VPMP с эквивалентными критериями, т.е. результата решения максиминной задачи и λ -задачи, построенной на ее основе; λ^o - максимальная относительная оценка, являющейся максимальным нижним уровнем для всех относительных оценок $\lambda_k(X^o)$, или гарантированный результат в относительных единицах, λ^o гарантирует, что все относительные оценки $\lambda_k(X^o)$ равны или больше λ^o :

$$\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), k = \overline{1, K}, X^o \in S \quad (4.43)$$

Лицо, принимающее решение, проводит анализ результатов решения векторной задачи с равнозначными критериями. Если полученные результаты удовлетворяют лицо, принимающее решение, то конец, иначе выполняются последующие расчеты.

Дополнительно вычислим:



в каждой точке $X_k^*, k = \overline{1, K}$ определим величины всех критериев $f_k^* = f_k(X_k^*), k = \overline{1, K}$, которые представляют границу множества Парето, и относительных оценок: $\lambda(X^*) = \{\lambda_q(X_k^*), q = \overline{1, K}, k = \overline{1, K}\}, \lambda_k(X) = \frac{f_k(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, \forall k \in K$:

$$F(X^*) = \begin{bmatrix} f_1(X_1^*) & \dots & f_K(X_1^*) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1(X_K^*) & \dots & f_K(X_K^*) \end{bmatrix}, \lambda(X^*) = \begin{bmatrix} \lambda_1(X_1^*) & \dots & \lambda_K(X_1^*) \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1(X_K^*) & \dots & \lambda_K(X_K^*) \end{bmatrix}. \quad (4.44)$$

Матрицы критериев $F(X^*)$ и относительных оценок $\lambda(X^*)$ показывают величины каждого критерия $k = \overline{1, K}$ при переходе от точки оптимума $X_k^*, k \in K$ к другой $X_q^*, q \in K$;

в точке оптимума при равнозначных критериях X^0 вычислим величины критериев и относительных оценок:

$$f_k(X^0), k = \overline{1, K}; \lambda_k(X^0), k = \overline{1, K}, \quad (4.45)$$

которые удовлетворяют неравенству (4.43). В других точках $X \in S^0$ меньший из критериев в относительных единицах $\lambda = \min_{k \in K} \lambda_k(X)$ всегда меньше λ^0 . Запоминаются данные λ -задачи (4.37)-(4.38). Эта информация и является основой для дальнейшего изучения множества Парето.

Шаг 2. Выбор приоритетного критерия $q \in K$.

Из теории (см. теорему 1) известно, что в оптимальной точке X^0 всегда имеется два наиболее противоречивых критерия $q \in K$ и $v \in K$, для которых в относительных единицах выполняется точное равенство: $\lambda^0 = \lambda_q(X^0) = \lambda_v(X^0), q, v \in K, X \in S$, а для остальных: $\lambda^0 \leq \lambda_k(X^0), \forall k \in K, q \neq v \neq k$.

Как правило, из этой пары выбирается критерий, который ЛПП хотел бы улучшить, такой критерий называется «приоритетным критерием»: $q \in K$.

Шаг 3. Определяются числовые пределы изменения величины приоритета критерия $q \in K$. Для приоритетного критерия $q \in K$ из матрицы (4.44) определим числовые пределы изменения величины критерия: в натуральных единицах $f_q(X)$ и в относительных единицах $\lambda_q(X)$, которые лежат в пределах:

$$f_k(X^0) \leq f_q(X) \leq f_q(X_q^*), k \in K, \quad (4.46)$$

где $f_q(X_q^*)$ выводится из матрицы уравнения $F(X^*)$ (4.44), все критерии показывают размеры, измеренные в физических единицах, $f_k(X^0), k = \overline{1, K}$ из уравнения (4.45), и, в относительных единицах:

$$\lambda_k(X^0) \leq \lambda_q(X) \leq \lambda_q(X_q^*), k \in K, \quad (4.47)$$

где $\lambda_q(X_q^*)$ выводится из матрицы $\lambda(X^*)$, все критерии показывают размеры, измеренные в относительных единицах (отметим, что $\lambda_q(X_q^*) = 1, \lambda_q(X^0)$).

Выражения (4.46) и (4.47) выдаются на дисплей для анализа.

Шаг 4. Выбор величины приоритетного критерия (Принятие решения). ЛПП проводит анализ результатов расчетов (4.46), выбирает числовую величину $f_q, q \in K$:

$$f_q(X^0) \leq f_q \leq f_q(X_q^*), q \in K. \quad (4.48)$$

Для выбранной величины критерия f_q необходимо определить вектор неизвестных X^{00} , для этого проводим последующие вычисления.

Шаг 5. Расчет относительной оценки:

$$\lambda_q = \frac{f_q - f_q^0}{f_q^* - f_q^0}, \quad (4.49)$$

которая при переходе от точки X^0 к X_q^* , в соответствии с (4.44):

$$\lambda_q(X^0) \leq \lambda_q \leq \lambda_q(X_q^*) = 1.$$

Шаг 6. Вычисление коэффициента линейной аппроксимации. Используя стандартные приемы линейной аппроксимации, вычислим коэффициент пропорциональности ρ между $\lambda_q(X^0), \lambda_q$:

$$\rho = \frac{\lambda_q - \lambda_q(X^0)}{\lambda_q^* - \lambda_q^0}, q \in K,$$

Шаг 7. Вычисление координат приоритетного критерия f_q .



Координаты точки приоритетного критерия X_q лежат в следующих пределах: $X^o \leq X_q \leq X_q^*, q \in K$. Предполагая линейный характер изменения вектора $X_q = \{x_1^q, \dots, x_N^q\}$ определим координаты точки приоритетного критерия с величиной f_q с относительной оценкой λ_q (4.44):

$$\begin{aligned} X_q &= \{x_1^q = x_1^o + \rho(x_q^*(1) - x_1^o), \dots, \\ x_N^q &= x_N^o + \rho(x_q^*(N) - x_N^o)\}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

где $X^o = \{x_1^o, \dots, x_N^o\}$, $X_q^* = \{x_q^*(1), \dots, x_q^*(N)\}$.

Шаг 8. Вычисление основных показателей точки X_q .

Для полученной точки $X_q = \{x_{qj}, j = \overline{1, N}\}$, вычислим:

все критерии в натуральных единицах: $F^q = \{f_k(X_q), k = \overline{1, K}\}$;

все относительные оценки критериев:

$$\lambda^q = \{\lambda_k^q, k = \overline{1, K}\}, \lambda_k^q(x^q) = \frac{f_k(X_q) - f_k^o}{f_k^* - f_k^o}, k = \overline{1, K}; \quad (4.51)$$

минимальную относительную оценку: $\lambda^{oq} = \min(p_k^q \lambda_k(X_q), k = \overline{1, K})$.

Аналогично рассчитывается любая точка по Парето: $X_t^o = \{\lambda_t^o, X_t^o\} \in S^o$.

Анализ результатов. Рассчитанная величина критерия $f_q(X_t^o)$, $q \in K$ обычно не равна заданной f_q . Ошибка выбора $\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q|$ определяется ошибкой линейной аппроксимации.

Результаты исследования симметрии в ВЗМП с заданным приоритетом аналогичны, как и для ВЗМП с равнозначными критериями, но центр симметрии смещен в сторону приоритетного критерия.

Заключение по теории и аксиоматике векторной оптимизации.

Представленная теория, аксиоматика, принципы оптимальности являются дальнейшим развитием аксиоматического подхода, заложенного в знаменитом сочинении «Начала», древнегреческого ученого Евклида, который представил аксиомы для одно мерной математики. Это нашло отражение в теории оптимизации с одним критерием. Аксиоматика (Машунина Ю.К.), изложенная в работе, направлена на системное (с множеством критериев) исследование объектов, процессов инженерных систем.

5. Программное обеспечение и Методология моделирования и принятия оптимального решения выбора параметров сложных инженерных систем

5.1. Программное обеспечение моделирования сложных инженерных систем на базе теории и методов векторной оптимизации

Математические модели структуры материала (2.4)-(2.8) и инженерные системы построены в виде векторной задачи нелинейного программирования (ВЗНП). Представим программное обеспечение моделирования инженерных систем на базе теории и методов решения задач векторной оптимизации, [44].

5.1.1. Разработка программного обеспечения решения ВЗНП

Программное обеспечение решения векторной задачи нелинейного программирования (3.1)-(3.4), на базе которой сформированы модели инженерных систем, реализовано на основе алгоритма решения ВЗНП, изложенного в предыдущих разделах. При решении ВЗНП по каждому критерию использована программа FMINCON(...) в системе MATLAB.

При использовании программы FMINCON(...) необходимо разработать две подпрограммы – функции. Первая функция включает два блока: первый блок предназначен для оценки в точке X критерия $f_k(X) \forall k \in K$; второй блок для расчета первой производной в этой точке $\frac{df_k(X)}{dx} \forall k \in K$. Вторая функция включает те же два блока только для ограничений. Программа FMINCON(...) используется на первом шаге алгоритма (максимизации критериев) и на втором шаге алгоритма (минимизации). Аналогично в соответствии с алгоритмом на 4 и 5 шаге решается λ -задача.

В целом при нелинейных ограничениях программное обеспечение решения ВЗНП включает: $K*2(1 \text{ шаг}) + K*2(2 \text{ шаг}) + 2(\lambda\text{-задача})$ функций. Так как критерии и ограничения

ВЗНП индивидуальны, то для каждой ВЗНП пишется индивидуальное программное обеспечение.

Для решения ВЗНП (3.1)-(3.4) ниже представлена программа, которая, по существу, представляет программу – шаблон для написания и решения других векторных задач нелинейного программирования (3.1)-(3.4) – математических моделей инженерных систем.

5.1.2. Численная реализация векторной задачи нелинейного программирования

Пример 1.

Дано. Рассматривается векторная задача нелинейного (выпуклого) программирования с четырьмя однородными критериями. В качестве критериев используем окружность, а на переменные наложены линейные ограничения. Так как критерии и ограничения симметричны, то ответ очевиден.

$$opt F(X) = \{min F_2(X) = min f_1(X) \equiv (x_1 - 80)^2 + (x_2 - 80)^2, \quad (5.1)$$

$$\min f_2(X) \equiv (x_1 - 80)^2 + (x_2 - 20)^2, \quad (5.2)$$

$$\min f_3(X) \equiv (x_1 - 20)^2 + (x_2 - 20)^2, \quad (5.3)$$

$$\min f_4(X) \equiv (x_1 - 20)^2 + (x_2 - 80)^2, \quad (5.4)$$

$$\text{при ограничениях } 0 \leq x_1 \leq 100, 0 \leq x_2 \leq 100. \quad (5.5)$$

Требуется определить. Разработать программное обеспечение в MATLAB решения векторной задачи нелинейного программирования. Используя программное обеспечение решить задачу (5.1)-(5.5).

4.3. Программное обеспечение решения векторной задачи нелинейного программирования (ВЗНП)

Для решения векторной задачи нелинейного программирования (5.1)-(5.5) - модели инженерной системы разработана программа в системе MATLAB, которая реализует алгоритм решения ВЗНП с равнозначными критериями. Ниже представлен результат решения ВЗНП (5.1)-(5.5), полученный этой программой.

Запись программы в формате MATLAB

```
% Программа "Решение векторной задачи нелинейного программирования":  
function [x,f] = VPNP_2_4Krit_100(x)  
% Автор: Машунин Юрий Константинович (Mashunin Yu. K.)  
% Алгоритм и программа предназначена для использования в образовании и научных  
% исследованиях, для коммерческого использования обращаться: Mashunin@mail.ru  
% Algorithm VPNP: 4Kriteriy + L-zadaha  
% [X,Fval,EXITFLAG,OUTPUT,LAMBDA,GRAD,HESSIAN]=  
%                                     fmincon(FUN,Xo,A,b,Aeq,beq,  
lb,ub,nonlcon,options,P1,P2,...)  
disp('*** Блок Исходных данных. ВЗНП:***')  
disp('opt F(X)={max F1(X)={min f1=(x1-80).^2+(x2-80).^2; '  
disp('                                min f2=(x1-80).^2+(x2-20).^2; '  
disp('                                min f3=(x1-20).^2+(x2-20).^2; '  
disp('                                min f4=(x1-20).^2+(x2-80).^2; '  
disp('                                0<=x1<=100, 0<=x2<=100 ')  
lb=[0. 0.];  
ub=[100. 100.]; Xo=[0. 0.];  
options=optimset('LargeScale','off');  
options=optimset(options,'GradObj','on','GradConst','off');  
A=[1 0;  
   0 1];  
b=[100 100];  
Aeq=[]; beq=[];  
XoK1max=[0. 0.];  
disp('*** Шаг 1. Решение по каждому критерию (наилучшее) ***')%  
[x1max,f1max]= fmincon('VPNP_2_Krit1max',XoK1max,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)  
[f1X1max] = VPNP_2_Krit1min(x1max)  
[f2X1max] = VPNP_2_Krit2min(x1max)  
[f3X1max] = VPNP_2_Krit3min(x1max)  
[f4X1max] = VPNP_2_Krit4min(x1max)  
XoK2max=[0. 0.];  
[x2max,f2max]= fmincon('VPNP_2_Krit2max',XoK2max,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)  
[f1X2max] = VPNP_2_Krit1min(x2max)
```

```
[f2X2max] = VPNP_2_Krit2min(x2max)
[f3X2max] = VPNP_2_Krit3min(x2max)
[f4X2max] = VPNP_2_Krit4min(x2max)
XoK3max=[0. 0.];
[x3max,f3max]= fmincon('VPNP_2_Krit3max',XoK3max,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X3max] = VPNP_2_Krit1min(x3max)
[f2X3max] = VPNP_2_Krit2min(x3max)
[f3X3max] = VPNP_2_Krit3min(x3max)
[f4X3max] = VPNP_2_Krit4min(x3max)
XoK4max=[0. 0.];
[x4max,f4max]= fmincon('VPNP_2_Krit4max',XoK4max,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X4max] = VPNP_2_Krit1min(x4max)
[f2X4max] = VPNP_2_Krit2min(x4max)
[f3X4max] = VPNP_2_Krit3min(x4max)
[f4X4max] = VPNP_2_Krit4min(x4max)
disp('*** Шаг 2. Решение по каждому критерию (наихудшее) ***')%
XoK1min=[0. 0.];
[x1min,f1min]= fmincon('VPNP_2_Krit1min',XoK1min,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X1min] = VPNP_2_Krit1min(x1min)
[f2X1min] = VPNP_2_Krit2min(x1min)
[f3X1min] = VPNP_2_Krit3min(x1min)
[f4X1min] = VPNP_2_Krit4min(x1min)
[x2min,f2min] = fmincon('VPNP_2_Krit2min',Xo,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X2min] = VPNP_2_Krit1min(x2min)
[f2X2min] = VPNP_2_Krit2min(x2min)
[f3X2min] = VPNP_2_Krit3min(x2min)
[f4X2min] = VPNP_2_Krit4min(x2min)
[x3min,f3min] = fmincon('VPNP_2_Krit3min',Xo,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X3min] = VPNP_2_Krit1min(x3min)
[f2X3min] = VPNP_2_Krit2min(x3min)
[f3X3min] = VPNP_2_Krit3min(x3min)
[f4X3min] = VPNP_2_Krit4min(x3min)
[x4min,f4min] = fmincon('VPNP_2_Krit4min',Xo,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'',options)
[f1X4min] = VPNP_2_Krit1min(x4min)
[f2X4min] = VPNP_2_Krit2min(x4min)
[f3X4min] = VPNP_2_Krit3min(x4min)
[f4X4min] = VPNP_2_Krit4min(x4min)
disp('*** Шаг 3. Системный анализ результатов ***')%
disp('Оценка критериев в точках оптимума: X1min,X2min,X3min,X4min')%
F=[f1X1min f2X1min f3X1min f4X1min;
   f1X2min f2X2min f3X2min f4X2min;
   f1X3min f2X3min f3X3min f4X3min;
   f1X4min f2X4min f3X4min f4X4min]
d1=f1X1min-f1X1max
d2=f2X2min-f2X2max
d3=f3X3min-f3X3max
d4=f4X4min-f4X4max
disp('Оценка критериев в относительных единицах: X1min,X2min,X3min,X4min')%
L=[(f1X1min-f1X1max)/d1 (f2X1min-f2X2max)/d2 (f3X1min-f3X3max)/d3 (f4X1min-f4X4max)/d4;
   (f1X2min-f1X1max)/d1 (f2X2min-f2X2max)/d2 (f3X2min-f3X3max)/d3 (f4X2min-f4X4max)/d4;
   (f1X3min-f1X1max)/d1 (f2X3min-f2X2max)/d2 (f3X3min-f3X3max)/d3 (f4X3min-f4X4max)/d4;
   (f1X4min-f1X1max)/d1 (f2X4min-f2X2max)/d2 (f3X4min-f3X3max)/d3 (f4X4min-f4X4max)/d4]
disp('*** Шаг 4. Построение L-задачи ***')%
Ao=[1 0 0;
    0 1 0];
bo=[100 100]; Aeq=[]; beq=[];
Xoo=[0 0 0]
lbo=[0. 0. 0.]
ubo=[100. 100. 1]
disp('*** Шаг 5. Решение L-задачи ***')%
[Xo,Lo]=fmincon('VPNP_2_L',Xoo,Ao,bo,Aeq,beq,lbo,ubo,'VPNP_2_LConst')%,options)
disp('Оценка критериев в точке оптимума Xo')%
```



```
[f1Xo] = VPNP_2_Krit1min(Xo(1:2))
[f2Xo] = VPNP_2_Krit2min(Xo(1:2))
[f3Xo] = VPNP_2_Krit3min(Xo(1:2))
[f4Xo] = VPNP_2_Krit4min(Xo(1:2))
disp('Оценка критериев в точке оптимума Xo в относительных единицах')%
L1Xo=(f1Xo+f1max)/d1
L2Xo=(f2Xo+f2max)/d2
L3Xo=(f3Xo+f3max)/d3
L4Xo=(f4Xo+f4max)/d4
% ****Конец*****
% [Программа "Расчет 1 критер. - max"] файл: VPNP_2_Krit1max
function [f,G] = VPNP_2_Krit1max(x)
f=-(x(1)-80).^2-(x(2)-80).^2; %Расчет функции - критерий 1
G=[-2*(x(1)-80), -2*(x(2)-80)];%Расчет 1 производной критерия 1
% [Программа "Расчет 1 критер. - min"] Файл: VPNP_2_Krit1min
function [f,G] = VPNP_2_Krit1min(x);
f=(x(1)-80).^2+(x(2)-80).^2;
G=[2*(x(1)-80); 2*(x(2)-80)];
% [Программа "Расчет 2 критер. - max"] Файл: VPNP_2_Krit2max
function [f,G] = VPNP_2_Krit2max(x);
f=-(x(1)-80).^2-(x(2)-20).^2;
G=[-2*(x(1)-80); -2*(x(2)-20)];
% [Программа "Расчет критер. 2 - min"] Файл: VPNP_2_Krit2min
function [f,G] =VPNP_2_Krit2min(x);
f=(x(1)-80).^2+(x(2)-20).^2;
G=[2*(x(1)-80); 2*(x(2)-20)];
% [Программа "Расчет 3 критер. - max"] Файл: VPNP_2_Krit3max
function [f,G] = VPNP_2_Krit3max(x);
f=-(x(1)-20).^2-(x(2)-20).^2;
G=[-2*(x(1)-20); -2*(x(2)-20)];
% [Программа "Расчет 3 критер. - min"] Файл: VPNP_2_Krit3min
function [f,G] = VPNP_2_Krit3min(x);
f=(x(1)-20).^2+(x(2)-20).^2;
G=[2*(x(1)-20); 2*(x(2)-20)];
% [Программа "Расчет 4 критер. - max"] Файл:VPNP_2_Krit4max
function [f,G] = VPNP_2_Krit4max(x);
f=-(x(1)-20).^2-(x(2)-80).^2;
G=[-2*(x(1)-20); -2*(x(2)-80)];
% [Программа "Расчет 4 критер. - min"] Файл:VPNP_2_Krit4min
function [f,G] = VPNP_2_Krit4min(x);
f=(x(1)-20).^2+(x(2)-80).^2;
G=[2*(x(1)-20); 2*(x(2)-80)];
%[Программа "Расчет критер. L-задачи"] файл: VPNP_2_L
function [f,G] = VPNP_2_L(x)
f=-x(3);
G=[0; 0; -1];
% [Программа "Расчет ограничений L-задачи"] файл: VPNP_1_LConst
function [c,ceq,DC,DCEq]= VPNP_2_LConst(x)
d1=12800;d2=12800;d3=12800;d4=12800;
f1X1max=12800;f2X2max=12800;f3X3max=12800;f4X4max=12800;
c(1)=(x(1)-80).^2+(x(2)-80).^2/d1+x(3)-f1X1max/d1;
c(2)=(x(1)-80).^2+(x(2)-20).^2/d2+x(3)-f2X2max/d2;
c(3)=(x(1)-20).^2+(x(2)-20).^2/d3+x(3)-f3X3max/d3;
c(4)=(x(1)-20).^2+(x(2)-80).^2/d4+x(3)-f4X4max/d4;
G1=[2*(x(1)-80)/d1, 2*(x(1)-80)/d2, 2*(x(1)-20)/d3, 2*(x(1)-20)/d4;
2*(x(2)-80)/d1, 2*(x(2)-20)/d2, 2*(x(2)-20)/d3, 2*(x(2)-80)/d4;
1.0, 1.0, 1.0, 1.0];
ceq=[]; DCEq=[];
% *****Конец*****
```

5.1.4. Решение векторной задачи нелинейного программирования

Для решения ВЗНП (5.1)-(5.5) использована выше приведенная программа. Решение представлено, как последовательность шагов.

Шаг 1. Решается векторная задача (5.1)-(5.5) на max по каждому критерию отдельно. Результаты решения ВЗМП (5.1)-(5.5) по каждому критерию:



- 1 критерий $X_1^* = \{x_1 = 0, x_2 = 0\}, f_1^* = f_1(X_1^*) = -12800;$ (5.6)
2 критерий $X_2^* = \{x_1 = 0, x_2 = 100\}, f_2^* = f_2(X_2^*) = -12800;$
3 критерий $X_3^* = \{x_1 = 100, x_2 = 100\}, f_3^* = f_3(X_3^*) = -12800;$
4 критерий $X_4^* = \{x_1 = 100, x_2 = 0\}, f_4^* = f_4(X_4^*) = -12800;$

Шаг 2. Решается векторная задача (5.1)-(5.5) на min по каждому критерию отдельно.

Результаты решения ВЗМП (5.1)-(5.5) по каждому критерию:

- 1 критерий $X_1^0 = \{x_1 = 80, x_2 = 80\}, f_1^0 = f_1(X_1^0) = 0;$ (5.7)
2 критерий $X_2^0 = \{x_1 = 80, x_2 = 20\}, f_2^0 = f_2(X_2^0) = 0;$
3 критерий $X_3^0 = \{x_1 = 20, x_2 = 20\}, f_3^0 = f_3(X_3^0) = 0;$
4 критерий $X_4^0 = \{x_1 = 20, x_2 = 80\}, f_4^0 = f_4(X_4^0) = 0;$

Результаты решения ВЗМП (5.1)-(5.5) по каждому критерию (наилучшие, наихудшие) при ограничениях (5.6) представлены на рис. 5.1 в угловых точках.

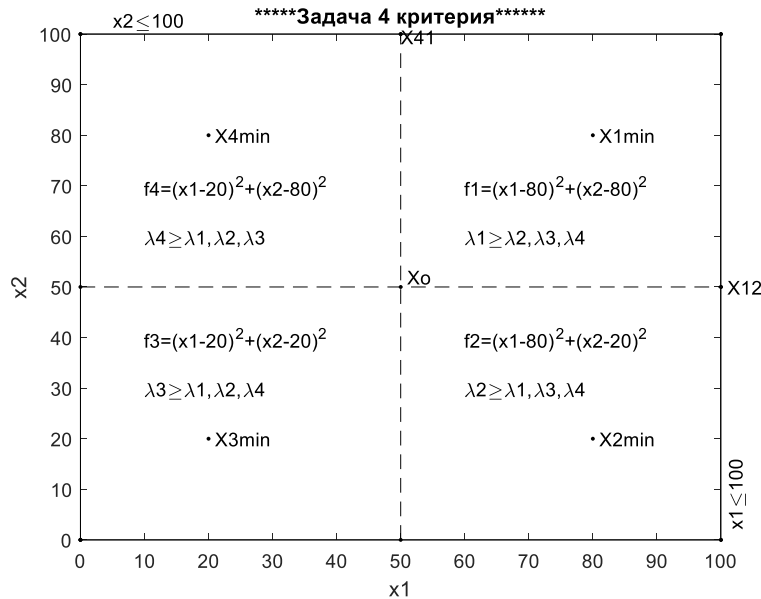


Рис. 5.1. Ограничения ВЗМП (5.1)-(5.5), точки оптимума $X_1^* = X1min, X2min, X3min, X4min$ и относительные оценки

Множество Парето лежит между точками оптимума $X_1^* X_2^* X_3^* X_4^*$, т. е. область допустимых точек S , образованных ограничениями (5.5), совпадает с множеством точек, оптимальных по Парето $S^o, S^o = S$.

Шаг 3. Выполняется системный анализ множества точек Парето.

В точках оптимума $X^* = \{X_k^*, k = \overline{1, K}\}$, определяются величины целевых функций $F(X^*)$ и относительных оценок $\lambda(X^*)$:

$$F(X^*) = \{f_q(X_k^*), q = \overline{1, K}, k = \overline{1, K}\},$$

$$\lambda(X^*) = \{\lambda_q(X_k^*), q = \overline{1, K}, k = \overline{1, K}\},$$

В системе MATLAB в точках оптимума: $X_k^* = \{X1min, X2min, X3min, X4min\}$ вычисление этих функций будет следующим (Результат системного анализа):

$$F(X^*) = \begin{bmatrix} f_1(X_1^*) & f_2(X_1^*) & f_3(X_1^*) & f_4(X_1^*) \\ f_1(X_2^*) & f_2(X_2^*) & f_3(X_2^*) & f_4(X_2^*) \\ f_1(X_3^*) & f_2(X_3^*) & f_3(X_3^*) & f_4(X_3^*) \\ f_1(X_4^*) & f_2(X_4^*) & f_3(X_4^*) & f_4(X_4^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3600 & 7200 & 3600 \\ 3600 & 0 & 3600 & 7200 \\ 7200 & 3600 & 0 & 3600 \\ 3600 & 7200 & 3600 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda(X^*) = \begin{bmatrix} \lambda_1(X_1^*) & \lambda_2(X_1^*) & \lambda_3(X_1^*) & \lambda_4(X_1^*) \\ \lambda_1(X_2^*) & \lambda_2(X_2^*) & \lambda_3(X_2^*) & \lambda_4(X_2^*) \\ \lambda_1(X_3^*) & \lambda_2(X_3^*) & \lambda_3(X_3^*) & \lambda_4(X_3^*) \\ \lambda_1(X_4^*) & \lambda_2(X_4^*) & \lambda_3(X_4^*) & \lambda_4(X_4^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.7188 & 0.4375 & 0.7188 \\ 0.7188 & 1.0 & 0.7188 & 0.4375 \\ 0.4375 & 0.7188 & 1.0 & 0.7188 \\ 0.7188 & 0.4375 & 0.7188 & 1.0 \end{bmatrix}.$$

В точках оптимума $X_k^*, k = \overline{1, K}$ все относительные оценки (нормализованные критерии) равны единице: $\lambda_k(X_k^*) = \frac{f_k(X_k^*) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0} = 1, k = \overline{1, K}, K = 4.$



В точках оптимума $X_k^0, k = \overline{1, K}$ все относительные оценки равны нулю:

$$\lambda_k(X_k^0) = \frac{f_k(X_k^0) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0} = 0, k = \overline{1, K}, K = 4.$$

Отсюда $\forall k \in K, \forall X \in S, 0 \leq \lambda_k(X) \leq 1$.

Шаг 4. Строится λ -задача.

Шаг 5. Решение λ -задачи. Результаты решения λ -задачи:

$X_0 = X^0 = \{x_1 = 50.0, x_2 = 50.0, x_3 = 0.8594\}$ – точка оптимума, где

$x_3 = \lambda^0$; а x_1, x_2 соответствует x_1, x_2 задачи (5.1)-(5.5);

$\lambda_0 = \lambda^0 = 0.8594$ представляет оптимальное значение целевой функции.

Функции $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3(X), \lambda_4(X)$, а также точки оптимума X^0 и λ^0 , которые получены на их пересечении, в трех мерной системе координат x_1, x_2, λ показаны на рис. 5.2.

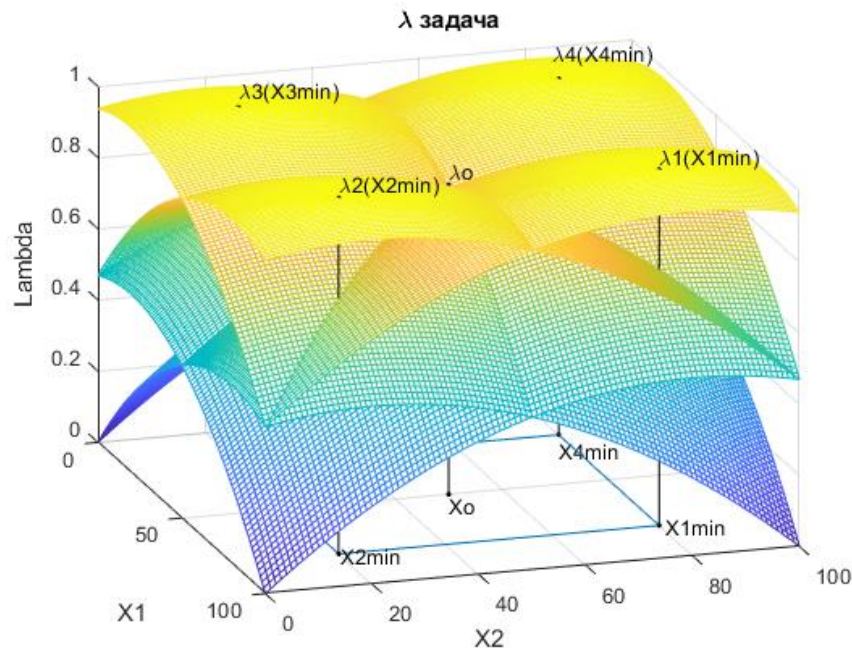


Рис. 5.2. Функции $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3(X), \lambda_4(X)$, точки оптимума X^0 и λ^0 .

На рис. 5.1, 5.2 видно, что область (множество точек) ограниченная точками $S_q = \{X_1^* = X_{1opt} X_{12} X^0 X_{41}\}$ характеризуется тем, что $\lambda_1(X) \geq \lambda_k(X), k = \overline{2, 4}, X \in S_1$, (на рис. 4.1 показано, как $\lambda_1 > \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$), т. е. область $S_{q=1}$ приоритетна по первому критерию. В этой области приоритет первого критерия относительно остальных всегда больше или равен единице:

$$p_k^1(X) = \lambda_1(X) / \lambda_k(X) \geq 1, \forall X \in S_1.$$

Аналогично показаны области (множества точек) приоритетные по соответствующему критерию, в совокупности они дают множество точек, оптимальных по Парето, S^0 , а оно (для данного примера) равно множеству допустимых точек: $S^0 = S_1^0 \cup S_2^0 \cup S_3^0 \cup S_4^0 \cup X^0 = S$.

Если решать задачу (5.1)-(5.5) с двумя критериями, например, третьим и четвертым, то множество точек, оптимальных по Парето, лежит на отрезке $X_3^* X_4^*$, а точка X^{oo} определяет результат решения.

λ^{oo} - максимальный уровень, причем $\lambda^{oo} = \lambda_3(X^{oo}) = \lambda_4(X^{oo}) = 0.7917$ в соответствии с теоремой 1. Множество Парето лежит между точками оптимума $X_1^* X_2^* X_3^* X_4^*$, т. е. область допустимых точек S , образованных ограничениями (4.5), совпадает с множеством точек, оптимальных по Парето S^0 , $S^0 = S$.

5.2. Методология моделирования и принятия оптимального решения выбора параметров сложных инженерных систем (на примере структуры материала) в условиях определенности, неопределенности

В качестве объекта исследования нами рассматриваются «Инженерные системы», к которым относятся «технические системы», «технологические процессы», «материалы», [17, 18]. Исследование инженерной системы выполнено, во-первых, в условиях определенности, когда известны данные о функциональных характеристиках инженерной системы; во-вторых,



в условиях неопределенности, когда известны дискретные значения отдельных характеристик; также известны данные об ограничениях, которые накладываются на функционирование системы. Математический аппарат моделирования инженерной системы базируется на теории и методах векторной оптимизации, которые представлены в третьем разделе. В организационном плане процесс моделирования и симулирования технической системы представлен в виде методологии: «Методология выбора оптимальных параметров инженерных систем в условиях определенности и неопределенности».

5.2.1. Виды задач, возникающих в процессе моделирования и принятия оптимального решения выбора параметров сложных инженерных систем

Задачи, которые возникают в процессе принятия оптимального решения выбора оптимальных параметров сложных инженерных системах на базе векторной оптимизации включает последовательно три вида.

1 вид. Решение векторной задачи математического программирования при равнозначных критериях. Полученный результат является основой для дальнейшего исследования системы. При этом используется метод решения векторной задачи при равнозначных критериях. Если полученный результат удовлетворяет лицу, принимающего решения, (ЛПР - проектировщик), то он берется за основу. Если не удовлетворяет, то переходим ко второму виду (прямая задача) или третьему виду решения векторных задач (Обратная задача).

2 вид. Решение прямой задачи векторной оптимизации, которая состоит в следующем: «Какие будут показатели (характеристики), если изменить параметры сложных технических систем». - Используется метод решения векторной задачи при равнозначных критериях.

3 вид. Решение обратной задач векторной оптимизации, которая состоит в следующем: «Какие будут параметры сложных технических систем при заданных характеристиках». - Используется метод решения векторной задачи при заданном приоритете критерия.

5.2.2. Методология моделирования и выбора оптимальных параметров сложных инженерных систем в условиях определенности, неопределенности

В качестве объекта исследования нами рассматриваются «сложная (многофункциональная) инженерная система», [17, 42, 44]. В организационном плане процесс моделирования и симулирования (the process of modeling and simulation of a engineering system) сложных инженерных систем, включающий три вида выше представленных задач, сформирован в виде методологии.

Методология разделена на две части. Первая часть – «Выбор оптимальных параметров инженерных систем в условиях определенности – равнозначные критерии»: включает два блока, вторая часть – «Выбор оптимальных параметров инженерных систем в условиях неопределенности - с приоритетом одного из критериев»: включает два блока. Каждый блок разделен на ряд этапов.

«Методология выбора оптимальных параметров инженерных систем в условиях определенности и неопределенности на базе многомерной математики».

Часть 1. Выбор оптимальных параметров инженерных систем в условиях определенности – равнозначные критерии.

Блок 1. Формирование технического задания, преобразование условий неопределенности (связанных с экспериментальными данными) в условия определенности, построение математической и численной модели инженерной системы (the process of modeling of a engineering system) включает 4 этапа.

1 этап. Формирование технического задания (исходных данных) для численного моделирования и выбора оптимальных параметров системы. Исходные данные формирует конструктор, который проектирует инженерную систему.

2 этап. Построение математической и численной модели инженерной системы в условиях определенности.

3 этап. Преобразование условий неопределенности в условия определенности и построение математической и численной модели инженерной системы в условиях определенности.



4 этап. Построение агрегированной математической и численной модели инженерной системы в условиях определенности.

Блок 2. *Принятие оптимального решения (выбора оптимальных параметров) в инженерной системе (материал) при равнозначных критериях на базе многомерной математики (the process of simulation of a engineering system)*

5 этап. Решение векторной задачи математического программирования (ВЗМП) - модели инженерной системы при равнозначных критериях (решение прямой задачи).

6 этап. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП при равнозначных критериях в трехмерной системе координат в относительных единицах.

7 этап. Анализ результатов решения Векторной Задачи Математического Программирования при равнозначных критериях - подготовка информации для принятия решений с приоритетом отдельного критерия из всего множества критериев.

Часть 2. Выбор оптимальных параметров инженерных систем в условиях неопределенности - с приоритетом одного из критериев.

Блок 3. *Анализ, сравнение результатов решения ВЗМП при равнозначных критериях сложной инженерной системы (модели структуры материала) и подготовка к выбору оптимальных параметров по приоритетному критерию.*

8 этап. 1. Анализ и сравнение результатов решения векторной задачи с равнозначными критериями с четырьмя и двумя переменными. 2. Вывод из анализа: **Информация об Инженерной Системе** в физических единицах для принятия решений с приоритетом критерия. 3. Подготовка к геометрической интерпретации решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по приоритетному критерию.

9 этап. Геометрическая интерпретация результатов решения при проектировании инженерной системы перехода от двухмерного к N -мерному пространству в относительных единицах.

Блок 4.k1. *Исследование, выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы (структура материала) по первому приоритетному критерию, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП*

4.1.k1. Решение ВЗМП - модели сложной инженерной системы (структуры материала) при заданном приоритете первого критерия в многомерной математике. (решение обратной задачи). 4.2.k1. Анализ результатов решения векторной задачи математического программирования - модели инженерной системы при заданном приоритете первого критерия. 4.3.k1. Геометрическая интерпретация результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по первому приоритетному критерию **в относительных единицах**. 4.4.k1. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП с приоритетом первого критерия – модели структуры материала при проектировании в трехмерной системе координат **в физических единицах**. Остальные три блока сформированы по аналогии

Блок 4.k2. *Исследование, выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы (структура материала) по второму приоритетному критерию, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП*

Блок 4.k3. *Исследование, выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы (структура материала) по третьему приоритетному критерию, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП*

Блок 4.k4. *Исследование, выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы (структура материала) по четвертому приоритетному критерию, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП.*

6. Численная реализация. Выбор оптимальных параметров инженерной системы (материал сложной структуры) в условиях определенности и неопределенности на базе многомерной математики.

Численная реализация выбора оптимальных параметров материала сложной структуры выполняется в соответствии с теоретическими основами многомерной математики, включающей аксиоматику, принципы оптимальности и конструктивные методы многомерной



математики как при равнозначных критериях, так и при заданном приоритете критериев, в соответствии разделом 3.

Методология процесса принятия оптимального решения (выбора оптимальных параметров) инженерной системы, в том числе материала сложной структуры, раздел 5.2.

Рассматривается задача принятия решений в сложной структуре материала, о которой известны: во-первых, данные о функциональной взаимосвязи нескольких характеристик с ее компонентами (*условия определенности*); во-вторых, данные о некотором наборе дискретных значений нескольких характеристик (экспериментальные результаты), во взаимосвязи с дискретными значениями параметров – экспериментальные данные (*условия неопределенности*); в-третьих, ограничений, накладываемых на функционирование материала сложной структуры. Численная задача моделирования материала сложной структуры рассматривается с равнозначными критериями (часть 1) и с заданным приоритетом критерия (Часть 2).

Часть 1. Выбор оптимальных параметров инженерных систем в условиях определенности – равнозначные критерии.

6.1. Блок 1. Формирование технического задания и построение математической и численной модели материала сложной структуры (the process of modeling of the structure (composition) of the material).

Первый этап, а также этап анализа результатов решения, выбора приоритетного критерия и его величины выполняется *конструктором материала сложной структуры*. Остальные этапы выполняются *математиком - программистом*.

6.1.1. 1 этап. Техническое задание: «Выбор оптимальных параметров материала сложной структуры»

Дано. Исследуется структура материала, которая характеризуется четырьмя параметрами: $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$. Значения Y представляют вектор управляемых переменных. Заданы параметры структуры материала, которые изменяются в следующих пределах:

$$21 \leq y_1 \leq 79; 5 \leq y_2 \leq 59; 2.1 \leq y_3 \leq 9.0; 2.2 \leq y_4 \leq 7.0.$$

Функционирование структуры материала определяются четырьмя характеристиками (критериями): $H(Y) = \{h_1(Y), \dots, h_4(Y)\}$, величина оценки которых зависит от параметров $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$.

Условия определенности. Для первой характеристик: $h_1(Y)$ известна функциональная зависимость от параметров $Y = \{y_v, v = \overline{1, V}, V = 4\}$:

$$h_1(Y) = 323.84 - 2.249y_1 - 3.49y_2 + 10.7267y_3 + 13.124y_4 + 0.0968y_1y_2 - 0.062y_1y_3 - 0.169y_1y_4 + 0.0743y_2y_3 - 0.1042y_2y_4 - 0.0036y_3y_4 + 0.0143y_1^2 + 0.0118y_2^2 - 0.2434y_3^2 - 0.5026y_4^2, \quad (6.1)$$

Условия неопределенности. Известны **результаты экспериментальных данных**: для второй, третьей и четвертой характеристики $h_k(Y), k = 2, 3, 4$ для соответствующих величин параметров: $Y = \{y_v = \{y_{vi}, i = \overline{1, M}\}, v = \overline{1, V}\}$.

Числовые значения параметров Y и характеристик $h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)$ представлены в таблице 2.

Таблица 2. Экспериментальные значения параметров y_1, y_2, y_3, y_4 и характеристик структуры материала $h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)$.

y_1	y_2	y_3	y_4	$h_2(Y)$	$h_3(Y)$	$h_4(Y)$
20	0	2	2	1149.6	115.1	24.24
20	0	2	5	1164.0	114.5	27.60
20	0	2	8	1176.0	114.4	28.80
20	0	5	2	1212.0	118.8	30.00
20	0	5	5	1260.0	113.8	31.20
20	0	5	8	1257.6	113.3	32.40
20	0	8	2	1256.4	110.7	33.60
20	0	8	5	1252.8	109.2	34.80
20	0	8	8	1251.6	108.5	34.80
20	30	2	2	2143.2	128.3	19.92



20	30	2	5	2154.0	127.4	21.60
20	30	2	8	2163.6	126.8	25.20
20	30	5	2	2176.8	126.1	29.76
20	30	5	5	2185.2	124.3	33.48
20	30	5	8	2198.4	124.1	37.20
20	30	8	2	2211.6	123.9	39.48
20	30	8	5	2232.0	121.4	42.00
20	30	8	8	2245.2	121.7	49.20
20	60	2	2	2954.4	150.4	15.60
20	60	2	5	2820.0	144.9	18.00
20	60	2	8	2772.0	140.8	21.60
20	60	5	2	2748.0	138.6	24.24
20	60	5	5	2832.0	140.8	28.80
20	60	5	8	2904.0	143.5	32.40
20	60	8	2	3022.8	146.0	35.16
20	60	8	5	3036.0	144.9	39.60
20	60	8	8	3056.4	143.8	44.88
50	0	2	2	3583.2	181.3	11.28
50	0	2	5	3601.2	180.8	14.40
50	0	2	8	3608.4	179.4	16.80
50	0	5	2	3616.8	179.1	21.12
50	0	5	5	3622.8	178.0	22.80
50	0	5	8	3637.2	177.6	27.60
50	0	8	2	3651.6	176.9	30.84
50	0	8	5	3672.0	175.3	36.00
50	0	8	8	3685.2	174.7	40.56
50	30	2	2	1195.2	123.6	52.80
50	30	2	5	1212.0	118.7	60.00
50	30	2	8	1236.0	115.9	64.80
50	30	5	2	1251.6	115.1	68.64
50	30	5	5	1272.0	113.2	75.60
50	30	5	8	1296.0	111.8	82.80
50	30	8	2	1318.8	110.7	88.08
50	30	8	5	1344.0	108.2	97.20
50	30	8	8	1388.4	106.3	107.64
50	60	2	2	2176.8	132.8	40.56
50	60	2	5	2196.0	131.1	45.60
50	60	2	8	2220.0	129.7	52.80
50	60	5	2	2245.2	128.3	60.00
50	60	5	5	2286.0	127.0	67.20
50	60	5	8	2294.4	125.6	73.20
50	60	8	2	2313.6	123.9	79.44
50	60	8	5	2340.0	114.5	85.20
50	60	8	8	2382.0	119.5	99.00
80	0	2	2	2988.0	154.8	31.92
80	0	2	5	3012.0	153.2	36.00
80	0	2	8	3036.0	151.8	43.20
80	0	5	2	3056.4	150.4	51.36
80	0	5	5	3108.0	150.7	61.20
80	0	5	8	3156.0	151.2	72.00
80	0	8	2	3244.8	151.5	82.80
80	0	8	5	3228.0	144.9	86.40
80	0	8	8	3193.2	140.8	90.36
80	30	2	2	3616.8	185.7	23.28



80	30	2	5	3639.6	183.5	30.00
80	30	2	8	3660.0	182.2	36.00
80	30	5	2	3685.2	181.3	42.72
80	30	5	5	3708.0	179.4	48.00
80	30	5	8	3732.0	178.0	54.00
80	30	8	2	3753.6	176.9	62.16
80	30	8	5	3672.0	175.3	73.20
80	30	8	8	3822.0	172.5	81.72
80	60	2	2	1218.0	128.3	87.00
80	60	2	5	1248.0	125.6	94.80
80	60	2	8	1272.0	124.2	103.20
80	60	5	2	1318.8	121.7	116.16
80	60	5	5	1344.0	118.7	126.00
80	60	5	8	1392.0	115.9	136.80
80	60	8	2	1422.0	115.1	145.44
80	60	8	5	1464.0	110.4	156.00
80	60	8	8	1524.0	108.5	174.72
$\min y_i(X), i=1, \dots, 81$				1149.6	92.4	11.3
$\max y_i(X), i=1, \dots, 81$				3822.0	161.5	174.7

В принимаемом решении, величину оценки по первой и третьей характеристики (критерия) желательно, получить как можно выше: $h_1(Y) \rightarrow \max$, $h_3(Y) \rightarrow \max$; второй и четвертой как можно ниже: $h_2(Y) \rightarrow \min$, $h_4(Y) \rightarrow \min$.

Параметры $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ изменяются в следующих пределах:

$$y_1 \in [20.50.80.], y_2 \in [0.30.60.], y_3 \in [2.05.08.0], y_4 \in [2.25.58.8]. \quad (6.3)$$

Химический состав материала изделия определяется (на единицу объема, веса) процентным содержанием некоторого множества компонент материала, которые в сумме равны ста процентам:

$$\text{ограничение } y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 100. \quad (6.4)$$

Требуется. 1). Разработать математическую модель структуры материала в виде векторной задачи математического программирования. 2) Задачу векторной оптимизации решить с равнозначными характеристиками (критериями). 3) Выбрать из всего множества критериев приоритетный критерий. Установить численное значение приоритетного критерия. 4) Решить задачу векторной оптимизации и принять наилучшее (оптимальное) решение с заданным приоритетом критерия. 5) Представить геометрическую интерпретацию результатов решения при проектировании инженерной системы перехода от двухмерного к N-мерному пространству в относительных единицах. 6) Показать геометрическую интерпретацию результатов решения при проектировании инженерной системы перехода от двухмерного к N-мерному пространству в физических единицах.

1а этап. Построение математической модели структуры материала в условиях определенности и неопределенности в общем виде.

Построение математической модели для принятия оптимального управленческого решения структуры материала показано в разделе 2.3. В соответствии с (2.21)-(2.27) представим математическую модель материала в условиях определенности в виде задачи векторной оптимизации:

$$\text{Opt } H(Y) = \{\max H_1(Y) = \{\max h_k(Y), k = \overline{1, K_1^{def}}\}, \quad (6.5)$$

$$\min H_2(Y) = \{\min h_k(Y), k = \overline{1, K_2^{def}}\}, \quad (6.6)$$

$$\text{при ограничениях } G(Y) \leq B, \sum_{v=1}^V y_v(t) = 100\%, \quad (6.7)$$

$$h_k^{min} \leq h_k(Y) \leq h_k^{max}, k = \overline{1, K}, y_j^{min} \leq y_j \leq y_j^{max}, j = \overline{1, N}, \quad (6.8)$$

где $Y = \{y_j, j = \overline{1, N}\}$ - вектор управляемых переменных (конструктивных параметров); $H(Y) = \{H_1(Y) H_2(Y)\}$ - векторный критерий, каждая компонента которого представляет вектор критериев (характеристик) материала, которые функционально зависят Y - значений вектора переменных;



в (6.8) $h_k^{min} \leq h_k(Y) \leq h_k^{max}, k = \overline{1, K}$ – вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование материала;

в (6.8) $y_j^{min} \leq y_j \leq y_j^{max}, j = \overline{1, N}$ – параметрические ограничения.

Предполагается, что функции $h_k(Y), k = \overline{1, K}$ дифференцируемы и выпуклы, $g_i(Y), i = \overline{1, M}$ непрерывны, а заданное ограничениями (6.8) множество допустимых точек S не пусто и представляет собой компакт:

$$S = \{Y \in R^n | G(Y) \leq 0, Y^{min} \leq Y \leq Y^{max}\} \neq \emptyset.$$

6.1.2. 2 этап. Построение численной модели структуры материала в условиях определенности

Построение модели структуры материала в условиях определенности определяется функциональной зависимостью каждой характеристики, ограничений от параметров материала. В нашем примере известны характеристика (6.2), ограничения (6.1). Используя данные (6.1), (6.2) построим численную модель в виде векторной задачи нелинейного программирования (6.5)-(6.8) в условиях определенности:

$$\max h_1(Y) = 323.84 - 2.249y_1 - 3.49y_2 + 10.7267y_3 + 13.124y_4 + 0.0968y_1y_2 - 0.062y_1y_3 - 0.169y_1y_4 + 0.0743y_2y_3 - 0.1042y_2y_4 - 0.0036y_3y_4 + 0.0143y_1^2 + 0.0118y_2^2 - 0.2434y_3^2 - 0.5026y_4^2, \quad (6.9)$$

$$\text{при ограничениях: } y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 100, \quad (6.10)$$

$$21 \leq y_1 \leq 79, 5 \leq y_2 \leq 59, 2.1 \leq y_3 \leq 9.0, 2.2 \leq y_4 \leq 7.0. \quad (6.11)$$

Эти данные в дальнейшем используются при построении общей математической модели материала (в условиях определенности и неопределенности).

6.1.3. 3.1 этап. Преобразование экспериментальных данных (условий неопределенности) в данные с функциональной зависимостью (условия определенности) и построение численной модели

Условия неопределенности характеризуются тем, что исходные данные, характеризующие исследуемого объекта, представлены: а) случайными, б) нечеткими, или, в) не полными данными, т. е. в условиях неопределенности известны лишь конечное множество Y измеренных параметров $y = \overline{1, \bar{Y}}$:

$Y_v = \{y_{iv}, v = \overline{1, \bar{V}}, i = \overline{1, \bar{M}}, \text{ где } v = \overline{1, \bar{V}} - \text{число компонент (параметров), из которых может быть составлен (изготовлен) материал, } i = \overline{1, \bar{M}} - \text{номер и множество данных; и соответствующее множество } K \text{ характеристик:}$

$$h_k(Y_v = \{y_{iv}, v = \overline{1, \bar{V}}, i = \overline{1, \bar{M}}\}), k = \overline{1, \bar{K}}.$$

Поэтому в условиях неопределенности отсутствует достаточная информация о функциональной зависимости каждой характеристики и ограничений от параметров. Информационные данные опций а) и б) преобразуются в числовые данные опции с) и представляются в табличной форме. В работе рассматривается опция с) информация с неполными данными, которые, как правило, **получены в результате эксперимента**.

С учетом измеренных параметров Y_v и соответствующего множества K характеристик: $h_k(Y_v = \{y_{iv}, v = \overline{1, \bar{V}}, i = \overline{1, \bar{M}}\}), k = \overline{1, \bar{K}}$ представим матрицу результатов экспериментальных данных по исследуемому материалу:

$$I = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 = y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{14} & h_2(Y_1), h_3(Y_1), h_4(Y_1) \\ \dots & \dots \\ Y_M = y_{M1}, y_{M2}, y_{M3}, y_{M4} & h_2(Y_M), h_3(Y_M), h_4(Y_M) \end{bmatrix}, \quad (6.12)$$

Представим математическую модель структуры материала в условиях неопределенности в виде векторной задачи математического программирования:

$$\text{Opt } H(X) = \{\max I_1(Y) \equiv \{\max h_k(Y_i, i = \overline{1, \bar{M}})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}, \quad (6.13)$$

$$\min I_2(Y) \equiv \{\min h_k(Y_i, i = \overline{1, \bar{M}})\}^T, k = \overline{1, K_2^{unc}}\}, \quad (6.14)$$

$$\text{at restriction } h_k^{min} \leq h_k(Y) \leq h_k^{max}, k = \overline{1, \bar{K}}, \quad (6.15)$$

$$\sum_{v=1}^{\bar{V}} y_v(t) = 100\%, y_v^{min} \leq y_v \leq y_v^{max}, v = \overline{1, \bar{V}}, \quad (6.16)$$

где $Y = \{y_v, v = \overline{1, \bar{V}}\}$ - вектор управляемых переменных (параметров);

$H(Y) = \{I_1(Y) I_2(Y)\}$ - векторный критерий, каждая компонента которого представляет вектор критериев (выходных характеристик исследуемого объекта). Величина характеристики



(функции) зависит от дискретных значений вектора переменных Y . $I_1(Y) = \overline{1, K_1^{unc}}$, $I_2(Y) = \overline{1, K_2^{unc}}$ (*uncertainty*) – множество критериев *max* и *min* сформированные в условиях неопределенности;

в (6.15) $h_k^{min} \leq h(X) \leq h_k^{max}$, $k = \overline{1, K}$ – вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование исследуемого объекта, $y_v^{min} \leq y_v \leq y_v^{max}$, $v = \overline{1, V}$ – параметрические ограничения исследуемого объекта.

6.1.3. 3.2 этап. Построение численной модели структуры материала в условиях неопределенности

Построение численной модели структуры материала в условиях неопределённости состоит в использовании качественных и количественных описаний материала, полученных экспериментальных данных по принципу “вход-выход” в таблице 1.

Преобразование информации (исходных данных в таблице 1):

$h_2(Y_i, i = \overline{1, M})$, $h_3(Y_i, i = \overline{1, M})$, $h_4(Y_i, i = \overline{1, M})$ в функциональный вид:

$h_2(Y)$, $h_3(Y)$, $h_4(Y)$ осуществляется путем использования математических методов (регрессионного анализа). Исходные данные таблицы 2 сформированы в системе MATLAB в виде матрицы:

$$I = |Y, H| = \{y_{i1}, y_{i2}, y_{i3}, y_{i4}, h_{i2}, h_{i3}, h_{i4}, i = \overline{1, M}\}. \quad (6.17)$$

Для каждого набора экспериментального данных $h_k, k = 2, 3, 4$ строится функция регрессии методом наименьших квадратов $\min \sum_{i=1}^M (y_i - \bar{y}_i)^2$ в системе MATLAB. Для этого формируется полином A_k , определяющий взаимосвязь параметров:

$Y_i = \{y_{i1}, y_{i2}, y_{i3}, y_{i4}\}$ и функции $\bar{y}_{ki} = h(Y_i, A_k), k = 2, 3, 4$.

Результатом является система коэффициентов: $A_k = \{A_{0k}, A_{1k}, \dots, A_{14k}\}$, которые определяют коэффициенты квадратичного полинома:

$$h_k(Y, A) = A_{0k} + A_{1k}y_1 + A_{2k}y_2 + A_{3k}y_3 + A_{4k}y_4 + A_{5k}y_1y_2 + A_{6k}y_1y_3 + A_{7k}y_1y_4 + A_{8k}y_2y_3 + A_{9k}y_2y_4 + A_{10k}y_3y_4 + A_{11k}y_1^2 + A_{12k}y_2^2 + A_{13k}y_3^2 + A_{14k}y_4^2, k = 2, 3, 4. \quad (6.18)$$

Программное обеспечение полиномиальной аппроксимации с четырьмя переменными и четырнадцатью факторами представлено в [44]. В итоге экспериментальные данные таблицы 1 преобразуются систему коэффициентов трех функций вида (6.18) в виде таблицы (Программа: Z_Material_MMTT32_os13_4k):

$$\begin{aligned} A_o &= [323.8408 \ 954.8634 \ 110.02 \ 21.0051 \ \%A_{0k} \quad (6.19) \\ &-2.2495 \ 28.6719 \ 0.9106 \ -0.0101 \ \%A_{1k} \\ &-3.4938 \ 37.0392 \ 0.6206 \ -0.8403 \ \%A_{2k} \\ &10.7267 \ -31.0303 \ -0.4287 \ -0.4314 \ \%A_{3k} \\ &13.1239 \ -54.0031 \ -2.5176 \ 1.1718 \ \%A_{4k} \\ &0.0969 \ -0.9219 \ -0.0151 \ 0.0166 \ \%A_{5k} \\ &-0.0621 \ 0.5644 \ -0.0094 \ 0.0850 \ \%A_{6k} \\ &-0.1696 \ 0.8966 \ 0.0222 \ -0.0001 \ \%A_{7k} \\ &0.0743 \ -0.1540 \ -0.0198 \ 0.0522 \ \%A_{8k} \\ &-0.1042 \ 0.3919 \ 0.0184 \ 0.0003 \ \%A_{9k} \\ &0.0036 \ -0.0135 \ -0.0006 \ 0.0006 \ \%A_{10k} \\ &0.0142 \ 0.0477 \ -0.0004 \ -0.0021 \ \%A_{11k} \\ &0.0117 \ 0.0437 \ -0.0003 \ 0.0035 \ \%A_{12k} \\ &-0.2433 \ 3.8489 \ 0.0390 \ 0.0061 \ \%A_{13k} \\ &-0.5026 \ 3.1748 \ 0.1414 \ -0.0310]; \%A_{14k} \\ R_j &= [0.6115 \ 0.7149 \ 0.6551 \ 0.9017]; \\ RR_j &= [0.3740 \ 0.5111 \ 0.4292 \ 0.8130]; \end{aligned}$$

На основе $A_o(2)$ $A_o(3)$ $A_o(4)$ строятся функции $h_2(Y)$, $h_3(Y)$ и $h_4(Y)$, которые с учетом полученных коэффициентов (6.19) являются **численной моделью структуры материала в условиях неопределенности**:

$$\begin{aligned} Opt \ H(Y) = \{max \ h_3(Y) &\equiv 110.22 + 0.7918y_1 + 1.73y_2 - 0.3713y_3 - 2.20y_4 - 0.0132y_1y_2 - \\ &0.008y_1y_3 + 0.0193y_1y_4 - 0.0172y_2y_3 + 0.0161y_2y_4 - 0.0006y_3y_4 - 0.0004y_1^2 - \\ &0.0002y_2^2 + 0.0335y_3^2 + 0.124y_4^2, \quad (6.20) \end{aligned}$$



$$\min h_2(Y) \equiv 954.86 + 28.67y_1 + 37.03y_2 - 31.03y_3 + 54y_4 - 0.922y_1y_2 - 2y_1y_3 + 0.896y_1y_4 - 0.154y_2y_3 + 0.3919y_2y_4 - 0.0134y_3y_4 + 0.0478y_1^2 + 0.0438y_2^2 + 3.8489y_3^2 + 3.1748y_4^2, \quad (6.21)$$

$$\min h_4(Y) \equiv 21.004 - 0.0097y_1 - 0.841y_2 - 0.4326y_3 + 1.1723y_4 + 0.166y_1y_2 + 0.085y_1y_3 - 0.0001y_1y_4 + 0.0523y_2y_3 + 0.0002y_2y_4 + 0.0006y_3y_4 - 0.0022y_1^2 + 0.0035y_2^2 + 0.006y_3^2 - 0.0311y_4^2, \quad (6.22)$$

$$\text{при ограничениях: } y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 100, \quad (6.23)$$

$$21 \leq y_1 \leq 79, 5 \leq y_2 \leq 59, 2.1 \leq y_3 \leq 9.0, 2.2 \leq y_4 \leq 7.0. \quad (6.24)$$

Минимальные и максимальные значения экспериментальных данных $y_1, \dots, y_4$ представлены в нижней части таблицы 2. Минимальные и максимальные значения функций $h_1(Y), h_3(Y), h_2(Y), h_4(Y)$ незначительно отличаются от экспериментальных данных. Индекс корреляции и коэффициенты детерминации представлены в нижних строках таблицы 2. Результаты регрессионного анализа (6.20)-(6.24) в дальнейшем используются при необходимости построения общей математической модели материала.

6.1.4. 4 этап. Построение агрегированной математической и численной модели структуры материала в условиях определенности

Объединяя математические модели структуры материала в условиях определённости (6.5)-(6.8) и неопределённости (6.13)-(6.16) представим математическую модель материала в условиях определенности и неопределённости в совокупности в виде векторной задачи:

$$\text{Opt } H(Y) = \{\max H_1(Y) = \{\max h_k(Y), k = \overline{1, K_1^{def}}\}, \quad (6.25)$$

$$\max I_1(Y) \equiv \{\max h_k(Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}, \quad (6.26)$$

$$\min H_2(Y) = \{\min h_k(X), k = \overline{1, K_2^{def}}, \quad (6.27)$$

$$\min I_2(Y) \equiv \{\min h_k(Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}, \quad (6.28)$$

при ограничениях

$$h_k^{min} \leq h_k(Y) \leq h_k^{max}, k = \overline{1, K}, y_j^{min} \leq y_j \leq y_j^{max}, j = \overline{1, N}, \quad (6.29)$$

где $Y = \{y_j, j = \overline{1, N}\}$ - вектор управляемых переменных (конструктивных параметров);

$$H_1(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K_1^{def}}\}, H_2(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K_2^{def}}\} -$$

множество функций $\max$ и $\min$ соответственно;

$$I_1(Y) = \{\{h_k(Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}^{\overline{1, N}}, I_2(Y) = \{\{h_k(Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_2^{unc}}\} -$$

множество матриц $\max$ и $\min$ соответственно; (*definiteness*), K_1^{unc}, K_2^{unc} (*uncertainty*) множество критериев $\max$ и $\min$ сформированные в условиях определенности и неопределённости;

Объединяя численные модели структуры материала в условиях определённости (6.9)-(6.11) и неопределённости (6.20)-(6.24) представим числовую модель материала в условиях определенности и неопределённости в совокупности в виде векторной задачи:

$$\text{opt } H(Y) = \{\max H_1(X) = \{\max h_1(Y) \equiv 323.84 - 2.25y_1 - 3.49y_2 + 10.72y_3 + 13.124y_4 + 0.0968y_1y_2 - 0.062y_1y_3 - 0.169y_1y_4 + 0.0743y_2y_3 - 0.1y_2y_4 - 0.0036y_3y_4 + 0.0143y_1^2 + 0.0118y_2^2 - 0.2434y_3^2 - 0.5026y_4^2, \quad (6.30)$$

$$\max h_3(Y) \equiv 110.22 + 0.7918y_1 + 1.73y_2 - 0.3713y_3 - 2.20y_4 - 0.0132y_1y_2 - 0.008y_1y_3 + 0.0193y_1y_4 - 0.0172y_2y_3 + 0.0161y_2y_4 - 0.0006y_3y_4 - 0.0004y_1^2 - 0.0002y_2^2 + 0.0335y_3^2 + 0.124y_4^2, \quad (6.31)$$

$$\min H_2(Y) = \{\min h_2(Y) \equiv 954.86 + 28.67y_1 + 37.03y_2 - 31.03y_3 + 54y_4 - 0.922y_1y_2 - 2y_1y_3 + 0.896y_1y_4 - 0.154y_2y_3 + 0.3919y_2y_4 - 0.0134y_3y_4 + 0.0478y_1^2 + 0.0438y_2^2 + 3.8489y_3^2 + 3.1748y_4^2, \quad (6.32)$$

$$\max h_4(Y) \equiv 21.004 - 0.0097y_1 - 0.841y_2 - 0.4326y_3 + 1.1723y_4 + 0.166y_1y_2 + 0.085y_1y_3 - 0.0001y_1y_4 + 0.0523y_2y_3 + 0.0002y_2y_4 + 0.0006y_3y_4 - 0.0022y_1^2 + 0.0035y_2^2 + 0.006y_3^2 - 0.0311y_4^2, \quad (6.33)$$

$$\text{при ограничениях: } y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 100, \quad (6.34)$$

$$21 \leq y_1 \leq 79, 5 \leq y_2 \leq 59, 2.1 \leq y_3 \leq 9.0, 2.2 \leq y_4 \leq 7.0. \quad (6.35)$$



Векторная задача математического программирования (6.30)-(6.35) представляет численную модель принятия оптимального решения структуры материала в условиях определенности и неопределенности в совокупности.

6.2. Блок 2. Методология процесса принятия оптимального решения (выбора оптимальных параметров) структуры материала на базе векторной задачи (ВЗМП)

6.2.1. 5 этап. Решение ВЗМП - модели структуры материала при равнозначных критериях (решение прямой задачи).

Для решения векторных задач математического программирования (6.30)-(6.35) представлены методы, основанные на аксиоматике и принципа оптимальности 1. Алгоритм представим в виде ряда шагов.

Шаг 1. Решение задачи (6.30)-(6.35) по каждому критерию отдельно, при этом используется функция $fmincon(...)$ системы MATLAB, обращение к функции $fmincon(...)$ рассмотрено в [44]. В результате расчета по каждому критерию получаем точки оптимума: Y_k^* и $h_k^* = h_k(Y_k^*)$, $k = \overline{1, K}$, $K=4$ - величины критериев в этой точке, т. е. наилучшее решение по каждому критерию:

- 1: $Y_1^* = \{y_1 = 46.56, y_2 = 43.23, y_3 = 8.0, y_4 = 2.2\}$, $h_1^* = h_1(Y_1^*) = -387.9$;
- 2: $Y_2^* = \{y_1 = 55.60, y_2 = 34.19, y_3 = 8.0, y_4 = 2.2\}$, $h_2^* = h_2(Y_2^*) = 1361.4$;
- 3: $Y_3^* = \{y_1 = 31.90, y_2 = 59.00, y_3 = 2.1, y_4 = 7.0\}$, $h_3^* = h_3(Y_3^*) = -210.3$;
- 4: $Y_4^* = \{y_1 = 36.70, y_2 = 59.00, y_3 = 2.1, y_4 = 2.2\}$, $h_4^* = h_4(Y_4^*) = 30.714$.

Ограничения (6.34)-(6.35) и точки оптимума $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$ в координатах $\{x_1, x_2\}$ представлены на рис. 6.1.

Шаг 2. Определяем наихудшую величину каждого критерия (антиоптимум): Y_k^0 и $h_k^0 = h_k(Y_k^0)$, $k = \overline{1, K}$, $K=4$. Для чего решается задача (6.30)-(6.35) для каждого критерия $k = \overline{1, K_1}$ на минимум, для каждого критерия $k = \overline{1, K_2}$ на максимум. В результате решения получим: $X_k^0 = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ - точка оптимума по соответствующему критерию, $k = \overline{1, K}$; $f_k^0 = f_k(X_k^0)$ - величина k -го критерия в точке X_k^0 , $k = \overline{1, K}$, (верхний индекс ноль):

- $$\begin{aligned} Y_1^0 &= \{y_1 = 31.9, y_2 = 59.0, y_3 = 2.1, y_4 = 7.00\}, h_1^0 = h_1(Y_1^0) = 296.6; \\ Y_2^0 &= \{y_1 = 31.9, y_2 = 59.0, y_3 = 2.1, y_4 = 7.0\}, h_2^0 = h_2(Y_2^0) = -2458.5; \\ Y_3^0 &= \{y_1 = 78.16, y_2 = 9.02, y_3 = 8, y_4 = 4.81\}, h_3^0 = h_3(Y_3^0) = 169.26; \\ Y_4^0 &= \{y_1 = 62.71, y_2 = 22.9, y_3 = 8, y_4 = 6.39\}, h_4^0 = h_4(Y_4^0) = -73.62. \end{aligned}$$

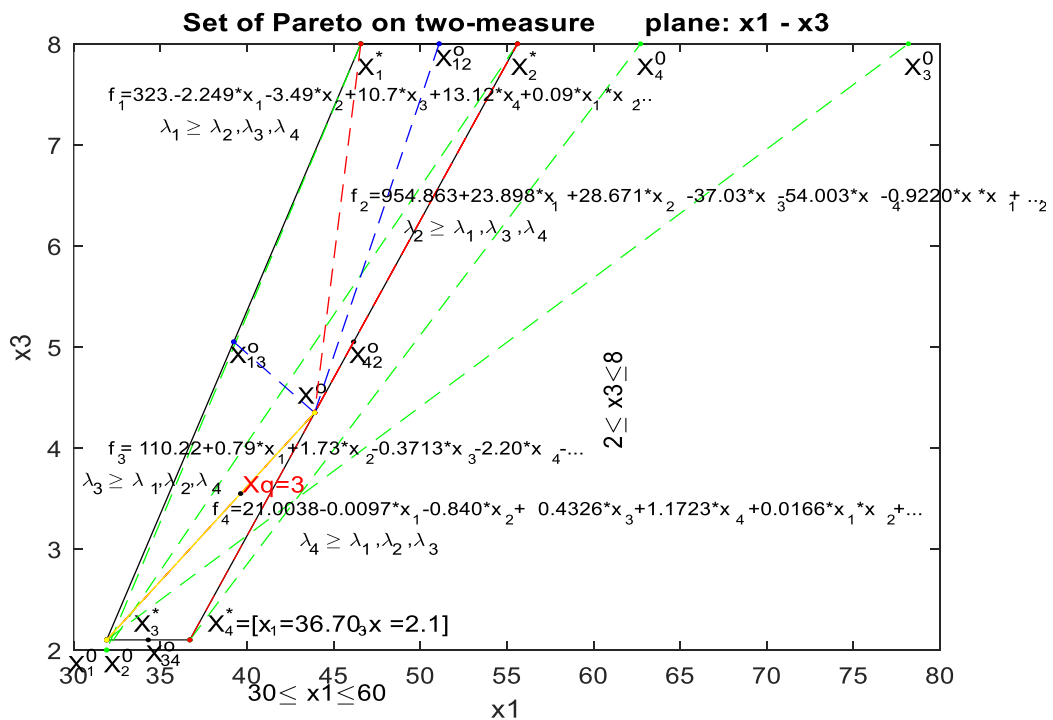


Рис. 1. Допустимое множество точек S в координатах x_1, x_3 . Множество точек, оптимальных по Парето, $S^0 \subset S$, ограничено точками $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$, и локальное S_1^0 между $X_1^*, X_{13}^0, X^0, X_{12}^*, X_1^*$ в двухмерной системе координат $\{x_1, x_3\}$.



Шаг 3. Выполняется системный анализ множества точек, оптимальных по Парето. В точках оптимума $Y^* = \{Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, Y_4^*\}$ определяются величины целевых функций:

$H(Y^*) = \|h_q(Y_k^*)\|_{q=1, \bar{K}}^{k=1, \bar{K}}$, $D = (d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4)^T$ - вектор отклонений по каждому критерию на допустимом множестве S : $d_k = h_k^* - h_k^0$, $k = \bar{1}, \bar{4}$, и матрица относительных оценок: $\lambda(Y^*) = \|\lambda_q(Y_k^*)\|_{q=1, \bar{K}}^{k=1, \bar{K}}$, $\lambda_k(X) = (h_k^* - h_k^0)/d_k$, $d_k = \|91.4; -1097; 41.09; -42.9\|$

$$H(Y^*) = \begin{bmatrix} 388.0 & 1444.2 & 183.9 & 68.5 \\ 382.0 & 1361.4 & 177.3 & 72.1 \\ 296.6 & 2458.5 & 210.4 & 30.2 \\ 330.1 & 2210.9 & 208.0 & 30.7 \end{bmatrix}, \lambda(Y^*) = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.9245 & 0.3560 & 0.1197 \\ 0.9367 & 1.001968 & 0.0363 \\ 0.0 & 0.0 & 1.00 & 1.011 \\ 0.3669 & 0.2257 & 0.9427 & 1.0 \end{bmatrix}. \quad (6.36)$$

Системный анализ величин критериев в относительных оценках показывает, что в точках оптимума $Y^* = \{Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, Y_4^*\}$ (по диагонали) относительная оценка равна единице. Остальные критерии значительно меньше единицы. Требуется найти такую точку (параметры), при которых относительные оценки наиболее близки к единице. На решение этой проблемы формируется λ -задача, шаг 4, 5.

Шаг 4. Построение λ -задачи осуществляется в два этапа: первоначально строится максиминная задача оптимизации с нормализованными критериями:

$$\lambda^0 = \max_{Y \in S} \min_{k \in K} \lambda_k(Y), G(Y) \leq 0, Y \geq 0, \quad (6.36)$$

которая на втором этапе преобразуется в стандартную задачу математического программирования (λ -задача):

$$\lambda^0 = \max \lambda, \quad (6.37)$$

$$\text{с ограничениями } \lambda - \frac{h_1(Y) - h_1^0}{h_1^* - h_1^0} \leq 0, \lambda - \frac{h_3(Y) - h_3^0}{h_3^* - h_3^0} \leq 0, \quad (6.38)$$

$$\lambda - \frac{h_2(Y) - h_2^0}{h_2^* - h_2^0} \leq 0, \lambda - \frac{h_4(Y) - h_4^0}{h_4^* - h_4^0} \leq 0, \quad (6.39)$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 100, \quad (6.40)$$

$$0 \leq \lambda \leq 1, \ 21 \leq y_1 \leq 79, 5 \leq y_2 \leq 59, 2.1 \leq y_3 \leq 9.0, 2.2 \leq y_4 \leq 7.0. \quad (6.41)$$

где вектор неизвестных имеет размерность $N+1$: $Y = \{y_1, \dots, y_N, \lambda\}$; функции $h_1(Y), h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)$ соответствуют (6.30)-(4.35). Подставив числовые значения функций $h_1(Y), h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)$, мы получим λ -задачу:

$$\lambda^0 = \max \lambda, \quad (6.42)$$

$$\text{ограничения } \lambda - \frac{323.84 - 2.249y_1 - 3.49y_2 - \dots - 0.2434y_3^2 - 0.5026y_4^2 - h_1^0}{h_1^* - h_1^0} \leq 0, \quad (6.43)$$

$$\lambda - \frac{110.22 + 0.7918y_1 + 1.73y_2 - \dots + 0.0335y_3^2 + 0.124y_4^2 - h_3^0}{f_3^* - f_3^0} \leq 0, \quad (6.44)$$

$$\lambda - \frac{954.8 + 28.67y_1 + 37y_2 - \dots + 3.8489y_3^2 + 3.1748y_4^2 - h_2^0}{h_2^* - h_2^0} \leq 0, \quad (6.45)$$

$$\lambda - \frac{21 - 0.0097y_1 - 0.841y_2 - \dots + 0.006y_3^2 - 0.0311y_4^2 - h_4^0}{h_4^* - h_4^0} \leq 0, \quad (6.46)$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 100, \quad (6.47)$$

$$0 \leq \lambda \leq 1, \ 21 \leq y_1 \leq 79, 5 \leq y_2 \leq 59, 2.1 \leq y_3 \leq 9.0, 2.2 \leq y_4 \leq 7.0. \quad (6.48)$$

Шаг 5. Решение λ -задачи.

Решение λ -задачи. (6.42)-(6.48) осуществляется обращением к функции $fmincon(\dots)$, [44]: $[Xo, Lo] = fmincon('Z_TehnSist_4Krit_L', X0, Ao, bo, Aeq, beq, lbo, ubo, 'Z_TehnSist_LConst', options)$.

В результате решения ВЗМП (6.30)-(6.35) при равнозначных критериях и соответствующей ей λ -задачи (6.42)-(6.48) получили:

$$X^0 = \{Y^0 = \{y_1 = 43.9, y_2 = 49.54, y_3 = 4.348, y_4 = 2.2, \lambda^0 = 0.6087\}, \quad (6.49)$$

точку оптимума X^0 , которая представляет конструктивные параметры материала при равнозначных критериях (характеристиках, представлена на рис. 1;

$h_k(Y^0)$, $k = \bar{1}, \bar{K}$ - величины критериев (характеристик структуры материала):

$$\{h_1(Y^0) = 364.0, h_2(Y^0) = 1790.7, h_3(Y^0) = 194.3, h_4(Y^0) = 47.5\}; \quad (6.50)$$

$\lambda_k(Y^0)$, $k = \bar{1}, \bar{K}$ - величины относительных оценок

$$\{\lambda_1(Y^0) = 0.7372, \lambda_2(Y^0) = 0.6087, \lambda_3(Y^0) = 0.6087, \lambda_4(Y^0) = 0.6087\}; \quad (6.51)$$



$\lambda^0=0.6087$ – это максимальный нижний уровень среди всех относительных оценок, измеренный в относительных единицах:

$$\lambda^0 = \min (\lambda_1(Y^0), \lambda_2(Y^0), \lambda_3(Y^0), \lambda_4(Y^0)) = 0.6087,$$

λ^0 – называют также гарантированным результатом в относительных единицах.

Гарантированный результат λ^0 показывает, что $\lambda^0=0.6087$ и характеристики материала в относительных единицах $\lambda_k(Y^0)$ и соответственно характеристики структуры материала $h_k(Y^0)$ нельзя улучшить, не ухудшая при этом другие характеристики.

Заметим, что в соответствии с теоремой с 1, в точке X^0 критерии 2, 3 и 4 противоречивы. Это противоречие определяется равенством:

$$\lambda_2(Y^0) = \lambda_3(Y^0) = \lambda_4(Y^0) = \lambda^0 = 0.6087,$$

а остальные критерии неравенством $\{\lambda_2(X^0) = 0.7372\} > \lambda^0$.

Теорема 1 служит основой для определения правильности решения векторной задачи. В векторной задаче математического программирования, как правило, для двух критериев выполняется равенство: $\lambda^0 = \lambda_q(Y^0) = \lambda_p(Y^0)$, $q, p \in K, X \in S$, (в нашем примере такие критерии 2, 3, 4), для других критериев определяется как неравенство.

6.2.2. 6 этап. Геометрической интерпретация результатов решения ВЗМП с 4 параметрами и 4 критериями в двухмерную систему координат (с 2 параметрами) в относительных единицах.

Для геометрической интерпретация результатов решения ВЗМП с 4 параметрами и 4 критериями в двухмерную систему координат (с 2-мя параметрами) в относительных единицах введем изменения. В ВЗМП (6.30)-(6.35) параметры y_1 и y_3 рассматриваются как переменные, параметры y_2 и y_4 рассматриваются как постоянные. Присвоим постоянным параметрам размерность:

$y_2 = 49.5492, y_4 = 2.2$ в соответствии с результатом решения ВЗМП (6.30)-(6.35) при равнозначных критериях, представленных в (6.49).

В итоге ВЗМП (6.30)-(6.35) стала двух мерной.

В результате решения ВЗМП (6.30)-(6.35) с двумя переменными y_1 и y_3 (в обозначения результатов ввели дополнительно «o» $Y1o_{max}$) получили.

1. Координаты точки по первому критерию на максимум:

$$Y1o_{max} = \{x_1 = 46.5676 \quad x_2 = 49.5492 \quad x_3 = 8.0000 \quad x_4 = 2.2000\}. \quad (6.52)$$

Величины четырех критериев в точке $Y1o_{max}$:

$$FY1o_{max} = \{f_1(Y1o_{max}) = 403.6 \quad f_2(Y1o_{max}) = 1430.3 \quad f_3(Y1o_{max}) = 190.2 \quad f_4(Y1o_{max}) = 72.7\}.$$

Величины относительны оценок критериев в точке $X1o_{max}$:

$$LY1o_{max} = \{\lambda_1(Y1o_{max}) = 1.1708 \quad \lambda_2(Y1o_{max}) = 0.9372 \quad \lambda_3(Y1o_{max}) = 0.5098 \quad \lambda_4(Y1o_{max}) = 0.0207\}. \quad (6.53)$$

Координаты точки по первому критерию на минимум:

$$Y1omin = \{31.9000 \quad 49.5492 \quad 2.1000 \quad 2.2000\}.$$

Величины шести критериев в точке $Y1omin$:

$$FY1omin = \{1.0e+03 * 0.3037 \quad 2.2073 \quad 0.1957 \quad 0.0243\}.$$

Величины относительны оценок критериев в точке $Y1omin$:

$$LY1omin = \{0.0774 \quad 0.2290 \quad 0.6441 \quad 1.1503\} \quad (6.54)$$

2. Координаты точки, функции и относительные оценки по второму критерию на максимум и минимум:

$$Y2o_{max} = \{55.6075 \quad 49.5492 \quad 8.0000 \quad 2.2000\}.$$

$$FY2o_{max} = \{1.0e+03 * 0.4320 \quad 1.1936 \quad 0.1909 \quad 0.0842\}.$$

$$LY2o_{max} = \{1.4813 \quad 1.1530 \quad 0.5268 \quad -0.2467\}.$$

$$Y2omin = \{31.9000 \quad 49.5492 \quad 2.1000 \quad 2.2000\}.$$

$$FY2omin = \{1.0e+03 * 0.3037 \quad 2.2073 \quad 0.1957 \quad 0.0243\}.$$

$$LY2omin = \{0.0774 \quad 0.2290 \quad 0.6441 \quad 1.1503\}. \quad (6.55)$$

3. Координаты точки, функции и относительные оценки по третьему критерию на максимум и минимум:

$$Y3o_{max} = \{31.9000 \quad 49.5492 \quad 2.1000 \quad 2.2000\}.$$



$$\begin{aligned} FY3_{\max} &= \{1.0e+03 * 0.3037 \quad 2.2073 \quad 0.1957 \quad 0.0243\}. \\ LY3_{\max} &= \{0.0774 \quad 0.2290 \quad 0.6441 \quad 1.1503\}. \\ Y3_{\min} &= \{78.1673 \quad 49.5492 \quad 8.0000 \quad 2.2000\}. \\ FY3_{\min} &= \{512.9622 \quad 636.7052 \quad 192.3963 \quad 111.3139\}. \\ LY3_{\min} &= \{2.3673 \quad 1.6606 \quad 0.5629 \quad -0.8782\}. \end{aligned} \quad (6.56)$$

4. Координаты точки, функции и относительные оценки по четвертому критерию на максимум и минимум:

$$Y4_{\max} = \{36.7000 \quad 49.5492 \quad 2.1000 \quad 2.2000\}. \quad (6.57)$$

$$\begin{aligned} FY4_{\max} &= \{1.0e+03 * 0.3182 \quad 2.1306 \quad 0.1964 \quad 0.0283\}. \\ LY4_{\max} &= \{0.2363 \quad 0.2989 \quad 0.6603 \quad 1.0562\}. \end{aligned}$$

$$Y4_{\min} = \{62.7123 \quad 49.5492 \quad 8.0000 \quad 2.2000\}. \quad (6.58)$$

$$\begin{aligned} FY4_{\min} &= \{1.0e+03 * 0.4559 \quad 1.0129 \quad 0.1914 \quad 0.0930\}. \\ LY4_{\min} &= \{1.7432 \quad 1.3176 \quad 0.5391 \quad -0.4511\}. \end{aligned} \quad (6.59)$$

Представим в целом результаты решения ВЗМП с двумя переменными параметрами x_1 и x_3 (двухмерная ВЗМП):

$$\begin{aligned} Y &= [Y_{\text{opt}}(1,:) = \{46.5676 \quad 43.2324 \quad 8.0000 \quad 2.2000\}, \lambda_1(Y1_{\max}) = 0.5; \\ Y_{\text{opt}}(2,:) &= \{55.6075 \quad 34.1925 \quad 8.0000 \quad 2.2000\}, \lambda_2(Y2_{\max}) = 0.6087; \\ Y_{\text{opt}}(3,:) &= \{31.9000 \quad 59.0000 \quad 2.1000 \quad 7.0000\}, \lambda_3(Y3_{\max}) = 0.6087; \\ Y_{\text{opt}}(4,:) &= \{36.7000 \quad 59.0000 \quad 2.1000 \quad 2.2000\}, \lambda_4(Y4_{\max}) = 0.7372; \\ Y_o(1:4) &= \{43.9022 \quad 49.5492 \quad 4.3486 \quad 2.200\}, \lambda(Y_o) = \lambda^o = 0.5196. \end{aligned} \quad (6.60)$$

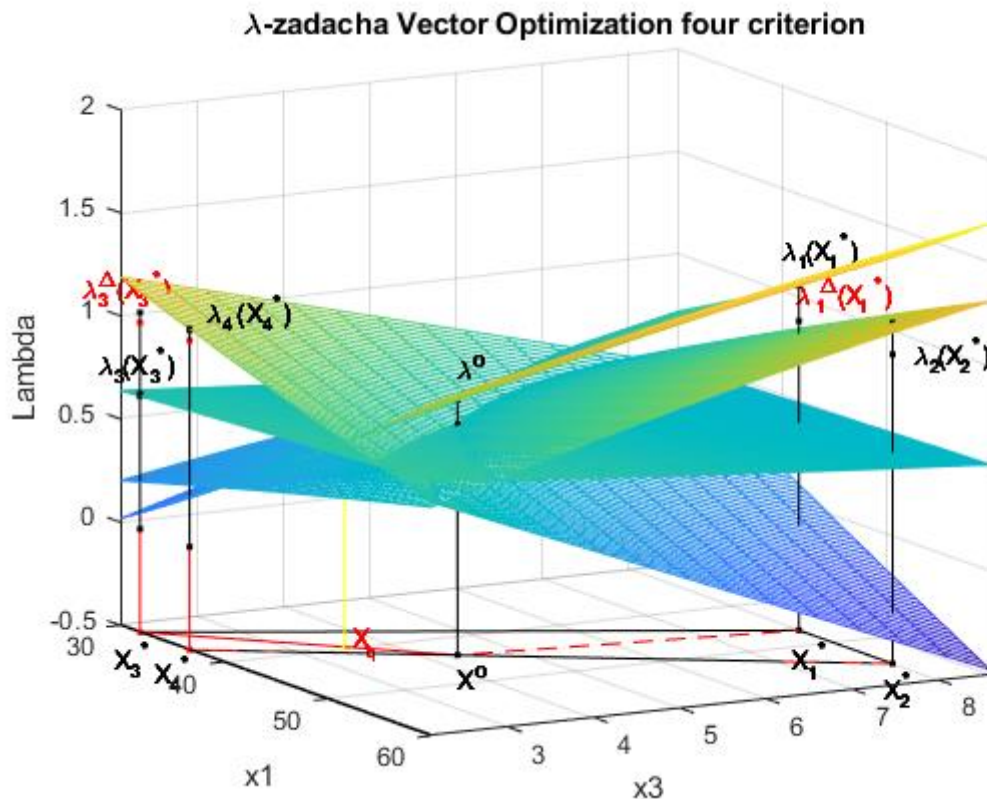


Рис. 6.2. Решение λ -задачи в трехмерной системе координат $x_1 \ x_3 \ (= \ y_1 \ y_3)$, λ

В допустимом множестве точек S , образованных ограничениями (6.47)-(6.48), точки оптимума Y_1^*, Y_2^*, Y, Y_4^* , объединенных в контур, представляют множество точек, оптимальных по Парето, $S^o \subset S$, представлены на рис. 6.1. Координаты этих точек, а также характеристики материала в относительных единицах $\lambda_1(Y), \lambda_2(Y), \lambda_3(Y), \lambda_4(Y)$ показаны на рис. 6.2 в трех мерном пространстве $x_1 \ x_2$ и λ , где третья ось λ - относительная оценка.

4.2.3. 7 этап. Результаты решения Векторной Задачи Математического Программирования при равнозначных критериях - подготовка информации для принятия решений с приоритетом критерия.

В результате решения ВЗМП при равнозначных критериях получили.

Результаты решения Векторной Задачи Математического Программирования (Математическая модель Инженерной Системы - ИС) при равнозначных критериях

1. Критерии (характеристики ИС), параметры в точке оптимума:

Критерий 1: $h_1^* = h_1(Y_1^*) = -387.9$; Параметры: $Y_1^* = \{y_1 = 46.56, y_2 = 43.23, y_3 = 8.0, y_4 = 2.2\}$;

Критерий 2: $h_2^* = h_2(Y_2^*) = 1361.4$; Параметры: $Y_2^* = \{y_1 = 55.60, y_2 = 34.19, y_3 = 8.0, y_4 = 2.2\}$;

Критерий 3: $h_3^* = h_3(Y_3^*) = -210.3$; Параметры: $Y_3^* = \{y_1 = 31.90, y_2 = 59.00, y_3 = 2.1, y_4 = 7.0\}$;

Критерий 4: $h_4^* = h_4(Y_4^*) = 30.714$; Параметры: $Y_4^* = \{y_1 = 36.70, y_2 = 59.00, y_3 = 2.1, y_4 = 2.2\}$;

2. Критерии (характеристики ИС), параметры в точке анти оптимума:

Критерий 1: $h_1^0 = h_1(Y_1^0) = 296.6$; Параметры: $Y_1^0 = \{y_1 = 31.9, y_2 = 59.0, y_3 = 2.1, y_4 = 7.00\}$;

Критерий 2: $h_2^0 = h_2(Y_2^0) = -2458.5$; Параметры: $Y_2^0 = \{y_1 = 31.9, y_2 = 59.0, y_3 = 2.1, y_4 = 7. \}$;

Критерий 3: $h_3^0 = h_3(Y_3^0) = 169.26$; Параметры: $Y_3^0 = \{y_1 = 78.16, y_2 = 9.02, y_3 = 8, y_4 = 4.81\}$;

Критерий 4: $h_4^0 = h_4(Y_4^0) = -73.62$; Параметры: $Y_4^0 = \{y_1 = 62.71, y_2 = 22.9, y_3 = 8, y_4 = 6.39\}$;

3. Критерии (характеристики ИС) в относительных единицах в точке Y^0 :

$\lambda^0 = 0.6087$ – максимальный нижний уровень в относительных единицах

$\lambda_k(Y^0), k = \overline{1, K}$ – величины относительных оценок:

$\{\lambda_1(Y^0) = 0.7372, \lambda_2(Y^0) = 0.6087, \lambda_3(Y^0) = 0.6087, \lambda_4(Y^0) = 0.6087\}$;

Параметры: $X^0 = \{Y^0, \lambda^0\} = \{Y^0 = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2, \lambda^0 = 0.6087\}$.

4. Критерии (характеристики ИС) в физических единицах:

$h_k(Y^0), k = \overline{1, K}$ – величины критериев (характеристик) в физических единицах:

$\{h_1(Y^0) = 364.0, h_2(Y^0) = 1790.7, h_3(Y^0) = 194.3, h_4(Y^0) = 47.5\}$;

5. Информация об ИС в физических единицах для принятия решений с приоритетом критерия:

1. $h_1(Y) \rightarrow \max: h_1^* = h_1(Y_1^*) = -387.9 \leq h_1(Y^0) = 364.0 \leq h_1^0 = h_1(Y_1^0) = 296.6$;

2. $h_2(Y) \rightarrow \min: h_2^* = h_2(Y_2^*) = 1361.4 \leq h_2(Y^0) = 1790.7 \leq h_2^0 = h_2(Y_2^0) = -2458.5$;

3. $h_3(Y) \rightarrow \max: h_3^* = h_3(Y_3^*) = -210.3 \leq h_3(Y^0) = 194.3 \leq h_3^0 = h_3(Y_3^0) = 169.26$;

4. $h_4(Y) \rightarrow \min: h_4^* = h_4(Y_4^*) = 30.714 \leq h_4(Y^0) = 47.5 \leq h_4^0 = h_4(Y_4^0) = -73.62$;

4.2.4. Заключение по результатам решения векторной задачи математического программирования при равнозначных критериях.

Мы представили методологию решения векторной задачи математического программирования при равнозначных критериях (характеристиках) на примере инженерной системы - материалы. В процессе решения задачи системе MATLAB нами представлена геометрическая интерпретация результатов решения в двухмерной системе координат. Результаты решения векторной задачи математического программирования с равнозначными критериями с четырьмя переменными совпадают с результатами решения векторной задачи с двумя переменными. Таким образом, нами подготовлена информация для исследования и выбора оптимального решения при приоритете того или иного критерия (характеристики) инженерной системы. На решение этой проблемы направлена следующая часть работы.

Часть 2. Выбор оптимальных параметров инженерных систем в условиях неопределенности - с приоритетом критерия.

4.3. Блок 3. Анализ, сравнение результатов решения ВЗМП при равнозначных критериях сложной инженерной системы (модели структуры материала) и подготовка к выбору оптимальных параметров по приоритетному критерию.

4.3.1. 8 этап. Анализ и сравнение результатов решения векторной задачи с равнозначными критериями с четырьмя и двумя переменными.

Сравним результаты решения векторной задачи математического программирования с равнозначными критериями (6.42)-(6.48) с четырьмя переменными y_1, y_2, y_3 и y_4 с результатами решения векторной задачи (6.42)-(6.48) с двумя переменными y_1 и y_3 .

Результаты решения четырехмерной ВЗМП (6.42)-(6.48) с переменными координатами $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ представлены в (6.49), (6.50), (6.51), а результаты решения двухмерной ВЗМП с переменными координатами $\{y_1, y_3\}$ представлены в (6.60).

Результаты решения и сравнения исследуемых задач представлены в трехмерной системе координат x_1, x_3 (обозначения: y_1, y_3) и λ на рис. 3.



(Замечание. На рисунках 1, 2, 3, ...: вектор параметров $Y = \{y_1, \dots, y_N, \lambda\}$ заменен на $X = \{x_1, \dots, x_N, \lambda\}$; функции $h_1(Y), h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)$ заменены на функции $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$ в соответствии с программным обеспечением).

На рис. 3 представлены точка оптимума в координатах x_1, x_3 :

$$X^0 = \{Y^0, \lambda^0\} = \{Y^0 = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2, \lambda^0 = 0.6087\}$$

из (87); и относительная оценка:

$$\{\lambda_1(Y^0) = 0.7372, \lambda_2(Y^0) = 0.6087, \lambda_3(Y^0) = 0.6087, \lambda_4(Y^0) = 0.6087\} \text{ из (6.51) в}$$

тех же координатах x_1, x_3 .

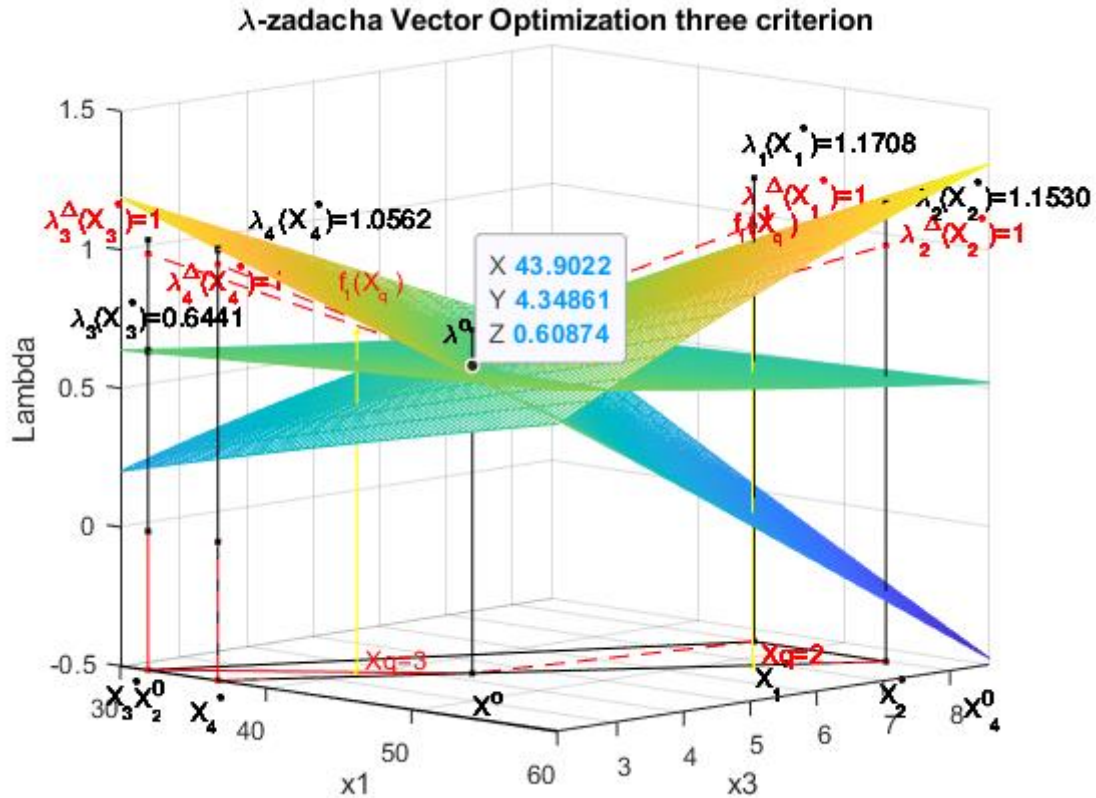


Рис. 3. Решение λ -задачи в трехмерной системе координат $x_1, x_3 (= y_1, y_3)$ и λ

Рассмотрим, например, оптимальную точку X_3^* . Функция $\lambda_3(X)$ сформирована из функции $f_3(X)$ с переменными координатами $\{x_1, x_3\}$, с постоянными координатами $\{x_2=49.54, x_4=2.2\}$, взятые из оптимальной точки X^0 (6.49). В точке X_3^* относительная оценка $\lambda_3(X_3^*) = 0.6441$ – показана на рис. 3 черной точкой. Но мы знаем, что относительная оценка $\lambda_3(X_3^*)$ полученная из функции $f_3(X_3^*)$ на третьем шаге равна единице, обозначим ее как $\lambda_3^\Delta(X_3^*) = 1$ – показана на рис. 3 красной точкой. В итоге:

во-первых, при равнозначных критериях координаты точек оптимума x_1, x_3 :

$$X^0 = \{Y^0, \lambda^0\} = \{Y^0 = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348, \lambda^0 = 0.6087\} - \text{в двухмерной}$$

$$X^0 = \{Y^0, \lambda^0\} = \{Y^0 = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2, \lambda^0 = 0.6087\}$$

четырёхмерной системе совпадают (используя программные возможности системы MATLAB, покажем числовые значения точки оптимума $\{Y^0, \lambda^0\}$ на рис. 3);

во-вторых, в точке оптимума X_3^* оптимальные величины критериев $h_k(Y_k^*), k = 3$ и относительные оценки $\lambda_k(Y_k^*) = 0.6441, k = 3$ и $\lambda_k^\Delta(X_k^*) = 1, k = 3$ не совпадают.

Разность между относительными оценками $\lambda_3^\Delta(X_3^*)=1$ и $\lambda_3(X_3^*)=0.6441$ является ошибкой $\Delta=0.3559$ перехода от четырехмерной (а в общем случае N -мерной) к двухмерной системе измерений. Аналогично на рис. 3 показаны:

точка X_1^* , соответствующие относительные оценки $\lambda_1(X_1^*) = 1.1708, \lambda_1^\Delta(X_1^*) = 1$;

точка X_2^* , соответствующие относительные оценки $\lambda_2(X_2^*) = 1.1530, \lambda_2^\Delta(X_2^*) = 1$;

точка X_4^* , соответствующие относительные оценки $\lambda_4(X_4^*) = 1.0562, \lambda_4^\Delta(X_4^*) = 1$.

4.3.2. Вывод из анализа: **Информация об Инженерной Системе в физических единицах для принятия решений с приоритетом критерия.**

Таким образом, по результатам решения векторной задачи математического программирования при равнозначных критериях мы сформулировали информацию: принятия управленческого решения для улучшения любого критерия (характеристики инженерной системы):

$$h_k(Y_k^*) \leq h_k(Y^0) \leq h_k(Y_k^0), k = \overline{1, K}.$$

Информация об ИС в физических единицах для принятия решений с приоритетом критерия:

1. $h_1(Y) \rightarrow \max: h_1^* = h_1(Y_1^*) = -387.9 \leq h_1(Y^0) = 364.0 \leq h_1^0 = h_1(Y_1^0) = 296.6;$
2. $h_2(Y) \rightarrow \min: h_2^* = h_2(Y_2^*) = 1361.4 \leq h_2(Y^0) = 1790.7 \leq h_2^0 = h_2(Y_2^0) = -2458.5;$
3. $h_3(Y) \rightarrow \max: h_3^* = h_3(Y_3^*) = -210.3 \leq h_3(Y^0) = 194.3 \leq h_3^0 = h_3(Y_3^0) = 169.26;$
4. $h_4(Y) \rightarrow \min: h_4^* = h_4(Y_4^*) = 30.714 \leq h_4(Y^0) = 47.5 \leq h_4^0 = h_4(Y_4^0) = -73.62;$

4.3.3. Подготовка к геометрической интерпретации решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по приоритетному критерию.

При подготовке геометрической интерпретации решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по приоритетному критерию используем рис. 3, удалив функции в относительных единицах $\lambda_1(Y), \lambda_2(Y), \lambda_3(Y), \lambda_4(Y)$ и представим его на рис. 4. На рис. 4 сформируем относительные оценки четырех критериев: $\lambda_k(Y_k^*), \lambda_k^A(X_k^*) = 1, k = \overline{1, K}$.

На третьем шаге решения ВЗМП с равнозначными критериями в (6.36) в точках оптимума $Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, Y_4^*$ получены величины всех относительных оценок:

$$L(Y^*) = \begin{Bmatrix} L(Y_1^*) \\ L(Y_2^*) \\ L(Y_3^*) \\ L(Y_4^*) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0000 & 0.9245 & 0.3560 & 0.1197 \\ 0.9367 & 1.0000 & 0.1968 & 0.0363 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0000 & 1.011 \\ 0.3669 & 0.2257 & 0.9427 & 1.0000 \end{Bmatrix}.$$

Представим из (6.36) величины относительных оценок в точке оптимума, например Y_2^* :

$$L(Y_2^*) = \{\lambda_1(Y_2^*) = 0.9367, \lambda_2(Y_2^*) = 1.0000, \lambda_3(Y_2^*) = 0.1968, \lambda_4(Y_2^*) = 0.0363\}$$

на рис. 4. Линейная функция, соединяющая точки $\lambda^0 = 0.60874$ и $\lambda_2^A(X_2^*) = 1$ в относительных единицах характеризует функцию $f_2(X)$ в относительных единицах в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$. Эта линейная функция представляет геометрическую интерполяцию функций $f_2(X)$ в относительных единицах из N -мерного (4-мерного) в двухмерную систему координат.

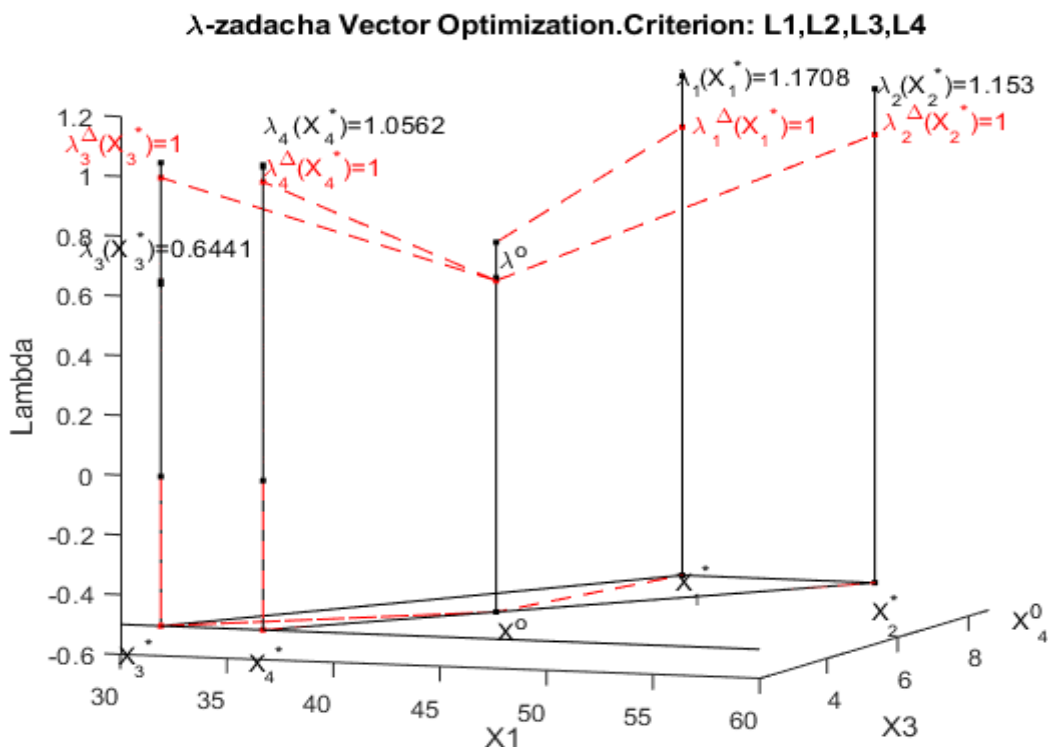


Рис. 4. λ -задача в системе координат $x_1, x_3 (= y_1, y_3)$ и λ . Результаты решения $\lambda_1(Y_1^*) = \lambda_2(Y_2^*) = \lambda_3(Y_3^*) = \lambda_4(Y_4^*) = 1; L(Y_2^*) = \{\lambda_1(Y_2^*), \lambda_2(Y_2^*), \lambda_3(Y_2^*), \lambda_4(Y_2^*)\}$

Аналогично исследуются все функции (критерии) инженерной системы.

В целом на рис. 4 в точке X_2^* показана геометрическая (линейная) интерполяция всех функций (критериев):

$f_1(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_1^A(X_2^*) = 0.9367$;

$f_2(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_2^A(X_2^*) = 1.0$;

$f_3(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_3^A(X_2^*) = 0.1968$;

$f_4(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_4^A(X_2^*) = 0.0363$.

На рис. 4 также показаны координаты точки оптимума:

$$X^0 = \{Y^0, \lambda^0\} = \{Y^0 = \{x_1(X) = 43.9, x_3(Y) = 4.348, \lambda^0(Z) = 0.6087\}$$

и координаты относительной оценки $\lambda_3^A(X_2^*) = 0.1968$:

$$\{Y^0 = \{x_1(X) = 55.6075, x_3(Y) = 8, \lambda_3^A(Z) = 0.1968\}.$$

Результаты решения X^0 и Y^0 показывают, что математические результаты полностью совпадают с геометрическими.

В дальнейшем используем рис. 4 как структуру, на которую наложена информация геометрической интерпретации решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по приоритетному критерию $q \in K$.

4.4. Блок 4.4.1. Исследование, выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы (структура материала) по первому приоритетному критерию, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП.

В разделе представлено решение векторной задачи математического программирования - модели сложной инженерной системы (структуры материала) при заданном **приоритете первого критерия** на базе многомерной математики.

Проведен анализ результатов решения ВЗМП при заданном приоритете первого критерия и представлена геометрическая интерпретация результатов решения при проектировании в трехмерной системе координат **в относительных единицах**.

Представлена геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП с приоритетом первого критерия при проектировании в трехмерной системе координат **в физических единицах**.

4.4.1.k1. Решение ВЗМП - модели сложной инженерной системы (структуры материала) при заданном приоритете первого критерия в многомерной математике. (решение обратной задачи).

Лицом, принимающим решения, как правило, является конструктор системы.

Шаг 1. Решение векторной задачи при равнозначных критериях. Алгоритм решения векторной задачи представлен на блоках 2 – 5. Численные результаты решения векторной задачи при равнозначных критериях представлены в разделе 4.2.3. **7 этап.**

Множество точек оптимальных по Парето $S^0 \subset S$, представленных на рис.1, находится между оптимальными точками $X_1^* X_{13}^0 X_3^* X_{34}^0 X_4^* X_{42}^0 X_2^* X_{21}^0 X_1^*$ (на рисунках вместо Y используется X). Мы проведем анализ множества точек Парето $S^0 \subset S$. Для этой цели мы соединим вспомогательные точки: $X_{13}^0 X_{34}^0 X_{42}^0 X_{21}^0$ с точкой X^0 , которая условно представляет центр множества Парето. В результате получили четыре подмножеств точек $X \in S_q^0 \subset S^0 \subset S$, $q = \overline{1,4}$. Первое подмножество $S_1^0 \subset S^0 \subset S$ выделенное точками $X_1^* X_{13}^0 X^0 X_{12}^0 X_1^*$ характеризуется тем, что относительная оценка $\lambda_1 \geq \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, то есть в поле первого критерия S_1^0 имеет приоритет над остальными. Подобно S_{21}^0 подмножества точек S_2^0, S_3^0, S_4^0 - характеризуется тем, что, где второй, третий и четвертый критерий имеет приоритет над другими соответственно. Множество точек, оптимальных по Парето, будем обозначать $S^0 = S_1^0 \cup S_2^0 \cup S_3^0 \cup S_4^0$. Координаты всех полученных точек и относительные оценки представлены в двумерном пространстве $\{x_1 x_2\}$ на рис. 1. Эти координаты показаны в трех измеренных пространствах $\{x_1 x_2 \lambda\}$ на рис. 2, где третья ось λ - относительная оценка.

Ограничения набора точек, оптимальных по Парето, на рис. 2 он снижен до -0,5. Эта информация также является основой для дальнейшего исследования структуры множества Парето. Лицо, принимающее решения, как правило, является разработчиком инженерной системы.



Если результаты решения векторной задачи с равнозначными критериями не удовлетворяют лицо, принимающее решение, то выбор оптимального решения осуществляется из какого-либо подмножества точек $S_1^0, S_2^0, S_3^0, S_4^0$. Эти подмножества точек Парето показаны на рис. 1 надписью в виде функций $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$.

В данном разделе исследуется подмножество точек с приоритетом первого критерия S_1^0 .

Шаг 2. Выбор приоритетного критерия $q \in K$.

Из теории известно, что в оптимальной точке X^0 всегда имеется два наиболее противоречивых критерия, $q \in K$ и $p \in K$, для которых в относительных единицах выполняется точное равенство:

$$\lambda^0 = \lambda_q(X^0) = \lambda_p(X^0), q, p \in K, X \in S,$$

а для остальных выполняется неравенства:

$$\lambda^0 \leq \lambda_k(X^0), \forall k \in K, q \neq p \neq k.$$

В модели материала (68)-(72) и соответствующей λ -задачи (81)-(86) такими критериями являются второй и третий: $\lambda^0 = \lambda_2(X^0) = \lambda_3(X^0) = 0.6087$, т.е. выполняется числовая симметрия.

Как правило, из этой пары $\lambda^0 = \lambda_2(X^0) = \lambda_3(X^0) = 0.6087$ противоречивых критериев выбирается критерий, который ЛПР хотел бы улучшить. Такой критерий называется «приоритетным критерием», обозначим его $q = 3 \in K$. В данном разделе исследуется первый критерий (функция) $q = 1 \in K$.

Выбор приоритетного критерия:

На дисплей выдается общая информация для принятия решений:

$$\text{Критерии в точке оптимума } X^0: FX_0 = 363.968 \ 1790.681 \ 194.2795 \ 47.5045. \quad (6.61)$$

$$\text{Относительные оценки в } X^0: LX_0 = 0.73718 \ 0.60874 \ 0.60874 \ 0.60874. \quad (6.62)$$

$$\text{Антиоптимум: } Y_1^0 = \{y_1 = 31.9, y_2 = 59, y_3 = 2.1, y_4 = 7.0\}, h_1^0 = h_1(Y_1^0) = 296.6.$$

ВЫВОД: Критерии 1, 2, 3 наиболее противоречивы, из них выбираем приоритетный. В данном разделе исследуется первый критерий (функция) $q = 1 \in K$.

На дисплей выдается сообщение:

$q = \text{input}(\text{'Введите приоритетный критерий (номер) } q = \text{'}) - \text{Ввели критерий } q = 1.$

Шаг 3. Определяются числовые пределы изменения величины приоритета критерия $q = 1 \in K$. Для приоритетного критерия $q = 1 \in K$ определяются изменения числовых пределов в натуральных единицах при переходе из точки оптимума X^0 (6.49) в точку X_q^* , полученную на первом шаге. Данные о критерии $q = 1$ выдаются на экран:

$$f_q(X^0) = 363.9686 \leq f_q(X) \leq 387.9904 = f_q(X_q^*), q \in K. \quad (6.63)$$

В относительных единицах критерий $q = 3$ изменяется в следующих пределах:

$$\lambda_q(X^0) = 0.6087 \leq \lambda_q(X) \leq 1 = \lambda_q(X_q^*), q = 3 \in K.$$

Эти данные анализируются.

Шаг 4. Выбор величины приоритетного критерия $q \in K$. (Decision-making).

На сообщение: «Введите величину приоритетного критерия $f_q =$ » - вводим, например, $f_q = 375$.

Шаг 5. Вычисляется относительная оценка.

Для выбранной величины приоритетного критерия $f_q = 375$ вычисляется относительная оценка $LqXq$:

$$\lambda_q = \frac{f_q - f_q^0}{f_q^* - f_q^0} = \frac{375 - 296.6}{387.9904 - 296.6} = 0.8579,$$

которая при переходе от точки X^0 к точке X_q^* лежит в пределах:

$$0.6087 = \lambda_3(X^0) \leq \lambda_3 = 0.8579 \leq \lambda_3(X_3^*) = 1, q \in K, \quad (6.64)$$

Шаг 6. Вычислим коэффициент линейной аппроксимации

Предполагая линейный характер изменения критерия $f_q(X)$ в (6.63) и соответственно относительной оценки λ_q в (6.64), используя стандартные приемы линейной аппроксимации, вычислим коэффициент пропорциональности между $\lambda_q(X^0)$, λ_q , который назовем ρ :

$$\rho = \frac{\lambda_q - \lambda_q(X^0)}{\lambda_q(X_q^*) - \lambda_q(X^0)} = \frac{0.7489 - 0.6087}{1 - 0.6087} = 0.4592, q = 3 \in K. \quad (6.65)$$



Шаг 7. Вычислим координаты точки приоритета критериев с размерностью f_q .

Предполагая линейный характер изменения вектора $X^q = \{x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4\}$, $q = 3$ определим координаты для точки с $f_q = 375$ с относительной оценкой (80):

$$\begin{aligned} x_{\lambda=0.74}^{q=3} &= \{x_1 = X^o(1) + \rho(X_q^*(1) - X^o(1)), \\ x_2 &= X^o(2) + \rho(X_q^*(2) - X^o(2)), \\ x_3 &= X^o(3) + \rho(X_q^*(3) - X^o(3)), \\ x_4 &= X^o(4) + \rho(X_q^*(4) - X^o(4))\}, \end{aligned} \quad (6.66)$$

где $X^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2\}$,

$X_1^* = \{x_1 = 46.56, x_2 = 43.23, x_3 = 8.0, x_4 = 2.2\}$.

Как результат решения мы получили точку оптимума с заданным приоритетом первого критерия с координатами:

$$X^q = \{x_1 = 45.1262, x_2 = 46.6484, x_3 = 6.0254, x_4 = 2.2000\}. \quad (6.67)$$

Шаг 8. Вычисление главных показателей точки X^q .

Для полученной точки X^q , вычислим:

все критерии в натуральных единицах $f_k(X^q) = \{f_k(X^q), k = \overline{1, K}\}$,

$$f(X^q) = \{f_1(X^q) = 376.6, f_2(X^q) = 1618.4, f_3(X^q) = 189.3, f_4(X^q) = 57.3\}; \quad (6.68)$$

все относительные оценки критериев:

$$\lambda^q = \{\lambda_k^q, k = \overline{1, K}\}, \lambda_k(X^q) = \frac{f_k(X^q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}:$$

$$\lambda_k(X^q) = \{\lambda_1(X^q) = 0.8759, \lambda_2(X^q) = 0.7657, \lambda_3(X^q) = 0.4868, \lambda_4(X^q) = 0.3815\}; \quad (6.69)$$

минимальная относительная оценка: $\min_{k \in K} \lambda_k(X^q) = \min(\lambda_k(X^q)) = 0.3815$.

$$P^q = [p_1^1 = 1.0000, p_2^1 = 1.1438, p_3^1 = 1.7991, p_4^1 = 2.2956];$$

вектор приоритетов $P^q(X) = \{p_k^q = \frac{\lambda_k(X^q)}{\lambda_k(X^q)}, k = \overline{1, K}\}$:

$$\lambda_k(X^q) * P^q = \{p_1^1 * \lambda_1(X^q) = 0.8759, p_2^1 * \lambda_2(X^q) = 0.8759, p_3^1 * \lambda_3(X^q) = 0.8759, p_4^1 * \lambda_4(X^q) = 0.8759\}$$

минимальная относительная оценка:

$$\lambda^{oo} = \min(p_1^3 \lambda_1(X^q), p_2^3 \lambda_2(X^q), p_3^3 \lambda_3(X^q), p_4^3 \lambda_4(X^q)) = 0.7244$$

Аналогично другие точки из области Парето $X_t^o = \{\lambda_t^o, X_t^o\} \in S^o$ могут быть получены.

4.4.2.k1. Анализ результатов решения векторной задачи математического программирования - модели инженерной системы при заданном приоритете первого критерия.

Рассчитанная в (6.68) величина первого критерия при заданном приоритете $f_q(X_t^o) = 376.6, q = 1 \in K, q \in K$ обычно не равна заданной $f_q = 375$. Ошибка выбора $\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q| = |376.6 - 375| = 1.6$ определяется ошибкой линейной аппроксимации: $\Delta f_{q\%} = 0.05\%$.

Если ошибка $\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q| = |376.6 - 375| = 1.6$, измеренная в натуральных единицах или в процентах $\Delta f_{q\%} = \frac{\Delta f_q}{f_q} * 100 = 0.05\%$, больше заданной $\Delta f, \Delta f_q > \Delta f$, то переходим к шагу 2, если $\Delta f_q \leq \Delta f$, то вычисления завершаются. **Конец.**

В процессе моделирования могут быть изменены параметрические ограничения (6.38) и функции, т. е. получено некоторое множество оптимальных решений. Из этого множества оптимальных решений выбираем окончательный вариант (процесс принятия решений). В нашем примере окончательный вариант включает параметры:

$$X^o = \{X^o, \lambda^o\} = \{X^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2\}, \lambda^o = 0.6087\}; \quad (6.70)$$

параметры структуры материала при заданном приоритете критерия:

$$q=1: X^q = \{x_1 = 45.1262, x_2 = 46.6484, x_3 = 6.0254, x_4 = 2.2000\}.$$

4.4.3.k1. Геометрическая интерпретация результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по первому приоритетному критерию в относительных единицах.



Для геометрической интерпретации результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров решения векторной задачи по первому приоритетному критерию в относительных единицах сформируем рис. 5к1.

Аналогично рис. 4, сформируем относительные оценки четырех критериев в точке оптимума Y_k^* $\lambda_k(Y_k^*), k = \overline{1, K}$ (черный цвет) и $\lambda_k^A(X_k^*) = 1, k = \overline{1, K}$ (красный цвет) и представим их рис. 5к1.

λ -задача Векторная оптимизация: $L_1(X), L_2(X), L_3(X), L_4(X)$. Машунин Ю.К.

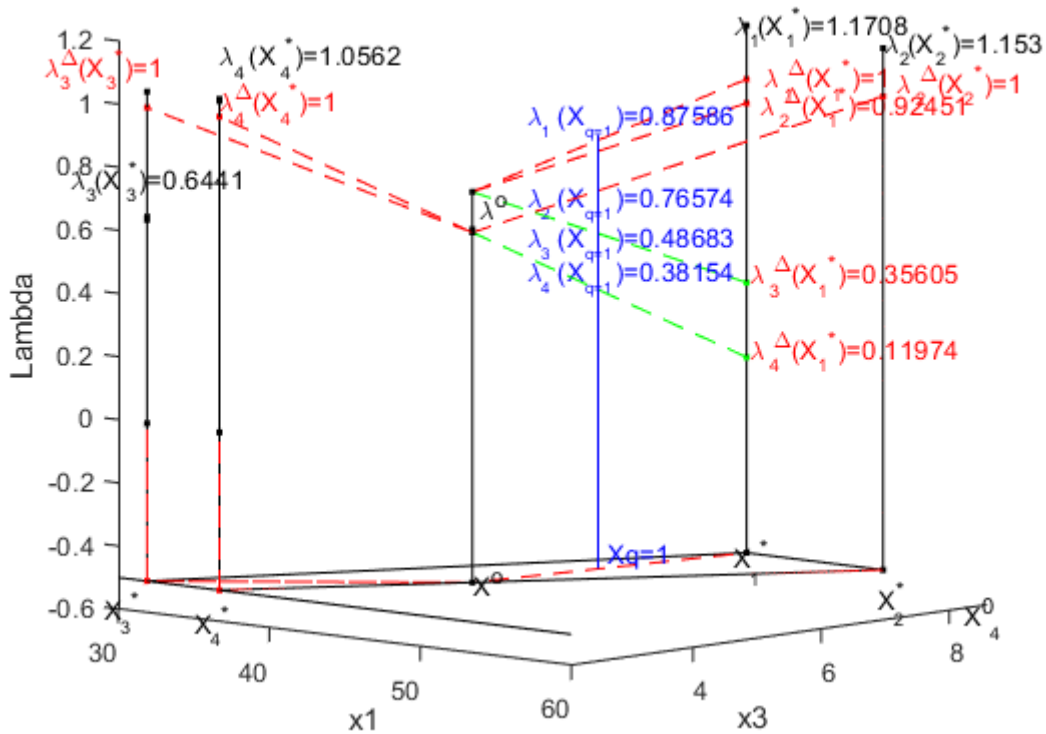


Рис. 5к1. λ -задача в системе координат $x_1 x_3 (= y_1 y_3)$ и λ . Результаты решения:

$\lambda_k^A(X_k^*) = 1, k = \overline{1, K}$; относительные оценки с приоритетом первого критерия в точке оптимума $X_{q=1}$: $\lambda_k(X_{q=1}), k = \overline{1, K}$.

На третьем шаге решения ВЗМП с равнозначными критериями в (6.36) в точках оптимума $Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, Y_4^*$ получены величины всех относительных оценок:

$$L(Y^*) = \begin{bmatrix} L(Y_1^*) \\ L(Y_2^*) \\ L(Y_3^*) \\ L(Y_4^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.9245 & 0.3560 & 0.1197 \\ 0.9367 & 1.0000 & 0.1968 & 0.0363 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0000 & 1.011 \\ 0.3669 & 0.2257 & 0.9427 & 1.0000 \end{bmatrix}.$$

На рис. 5к1 $\lambda_1(Y_1^*) = 1.0000$ обозначена как $\lambda_2^A(X_2^*) = 1$.

Линейная функция, соединяющая точки $\lambda^0 = 0.60874$ и $\lambda_1^A(X_1^*) = 1$ в относительных единицах характеризует функцию $f_1(X)$ в относительных единицах в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$. Эта линейная функция представляет геометрическую интерполяцию функций $f_1(X)$ в относительных единицах из N -мерного (4-мерного) в двухмерную систему координат. Аналогично исследуются все функции (критерии). В целом на рис. 5к1 в точке X_1^* показана геометрическая (линейная) интерполяция всех функций (критериев):

$f_1(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_1^\Delta(X_1^*) = 1.0$;
 $f_2(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_2^\Delta(X_1^*) = 0.92451$;
 $f_3(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_3^\Delta(X_1^*) = 0.35605$;
 $f_4(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_4^\Delta(X_1^*) = 0.11974$.

Относительные оценки с приоритетом первого критерия в точке оптимума $X_{q=1}$

$$\lambda_k(X_{q=1}) = \frac{f_k(X_{q=1}) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}; \quad \lambda_k(X_{q=1}) = \{\lambda_1(X_{q=1}) = 0.87586, \lambda_2(X_{q=1}) = 0.76574, \lambda_3(X_{q=1}) = 0.48683, \lambda_4(X_{q=1}) = 0.38154\};$$

Результаты решения показывают, что математические результаты полностью совпадают с геометрическими.

4.4.4.k1. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП с приоритетом первого критерия – модели структуры материала при проектировании в трехмерной системе координат в физических единицах.

Исходной информацией для геометрической интерпретации результатов решения векторной задачи (ВЗМП) с приоритетом первого критерия являются:

параметры точки оптимума при равнозначных критериях:

$$X^0 = \{X^0, \lambda^0\} = \{Y^0 = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2\}, \lambda^0 = 0.6087\},$$

рассчитанной на пятом шаге алгоритма в двухмерной системе координат x_1, x_2 (см. Рис. 1) и представленной в трехмерной системе координат x_1, x_2 и λ в относительных единицах на рис. 2, 3, 4 при проектировании.

Исследуем и представим параметры последовательно для каждой характеристики структуры материала (критерия): $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$ в **физических единицах**.

1. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП с приоритетом первого критерия – первой характеристики $f_1(X)$ при проектировании в физических единицах.

На Рис. 6.k1 исследованы: точки оптимума $X_1^*, X_{q=1}$, с соответствующими относительными оценками $\lambda_1(X_1^*)$ $\lambda_1(X_{q=1})$, а также линейные функции $\lambda^0 \lambda_1(X_{q=1}) - \lambda_1^\Delta(X_1^*)$ λ^0 в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_1(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Первая характеристика структуры материала $h_1(X)$ (6.30) сформирована в 4.1.4:
 $\max h_1(X) \equiv 323.84 - 2.25y_1 - 3.49y_2 + 10.72y_3 + 13.124y_4 + 0.0968y_1y_2 - 0.062y_1y_3 - 0.169y_1y_4 + 0.0743y_2y_3 - 0.1y_2y_4 - 0.0036y_3y_4 + 0.0143y_1^2 + 0.0118y_2^2 - 0.2434y_3^2 - 0.5026y_4^2,$

Представим геометрическую интерпретацию функции $h_1(Y)$ в физических единицах с переменными координатами $\{y_1, y_3\}$ и с постоянными координатами $\{y_2 = 49.54, y_4 = 2.2\}$ на рис. 6.k1.

Координаты точки и функция первого критерия на **максимум**:

$Y_1^* = \{y_1 = 46.56, y_2 = 43.23, y_3 = 8.0, y_4 = 2.2\}, h_1^* = h_1(Y_1^*) = -387.9$ при расчете по четырем переменным. На рисунке обозначена как $f_1^\Delta(X_1^*) = -387.9$;

$Y_1^* = \{y_1 = 46.5676, y_3 = 8.0\}$ (на рис. 6.k1 обозначена как X_1^*). В двухмерной системе координат y_1, y_3 величина целевой функции равна $h_1^* = f_1(X_1^*) = 403.6$. (Черный цвет). В системе MANLAB обозначено как $h_1^* = Z = 402.666$.

Координаты точки и функция первого критерия на **минимум**:

В точке $X_1^0 = \{x_1 = 31.9, x_3 = 2.1\}$ величина целевой функции $F_1^0 = f_1(X_1^0) = 303.66$.

Величина целевой функции в четырехмерной системе координат $f_1^\Delta(X_1^0) = 296.59$.

Координаты точки и функция первого критерия **при равнозначных критериях**:

Координаты точки $X^0 = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$. Величина целевой функции $f_1(X^0) = 363.96$.



Function $f_1(X) \rightarrow \max$ in Vector Optimization. Машунин Ю.К.

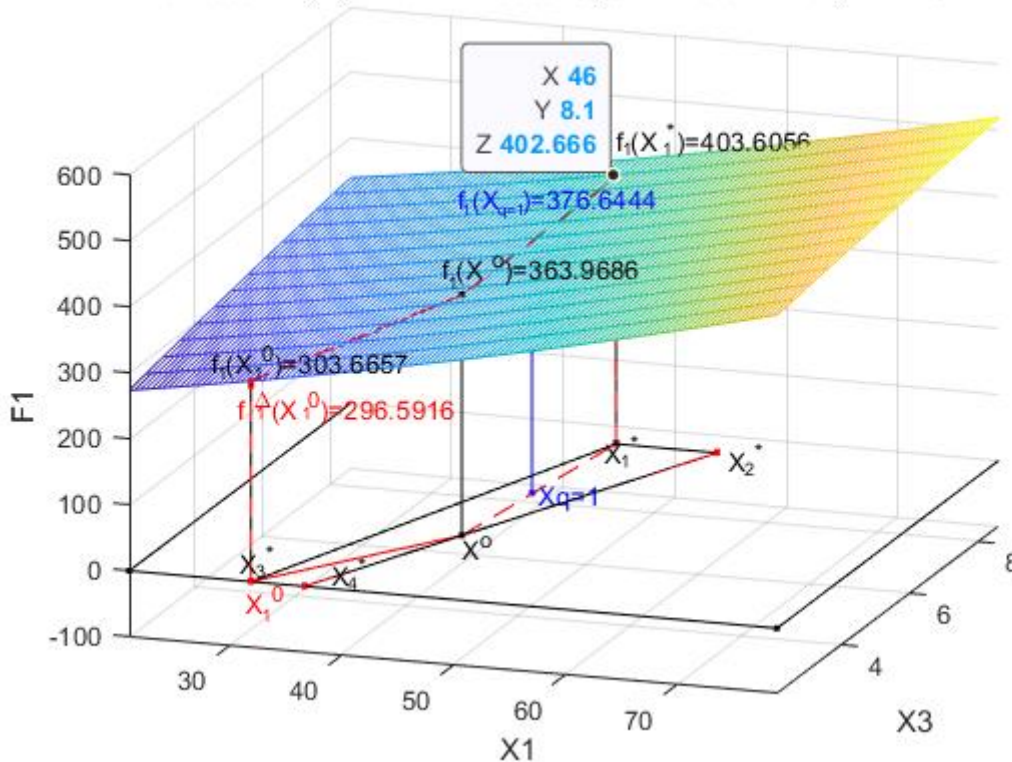


Рис. 6k1. Функция $f_1(X)$ с приоритетом первого критерия в двухмерной системе координат $x_1 x_3$ и геометрическая интерпретация функции $f_1(X)$ в системе координат $x_1 x_2 x_3 x_4$

Относительная оценка с приоритетом первого критерия в точке оптимума $X_{q=1}$:

$\lambda_1(X_{q=1}) = \frac{f_1(X_{q=1}) - f_1^0}{f_1^* - f_1^0} = 0.87586$. В физических единицах величина первого критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=1}$ равна $f_1(X_{q=1}) = 376.64$ близка к заданной $f_1(X_{q=1}) = 375$ (Показана фиолетовым цветом).

Линейная функция, соединяющая точки $f_1(X^0)$ и $f_1^\Delta(X_1^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_1(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

А в целом отрезки $f_1^\Delta(X_1^*) - f_1(X^0) - f_1^\Delta(X_1^0)$ представляют геометрическую интерпретацию функции $f_1(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

2. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – второй характеристики $f_2(X)$ с приоритетом первого критерия - структуры материала при проектировании в физических единицах.

На Рис. 7.k1 исследованы: точки оптимума X_2^* , $X_{q=1}$, с соответствующими относительными оценками $\lambda_2(X_2^*)$, $\lambda_2(X_{q=1})$, а также линейные функции $\lambda^0 \lambda_2(X_{q=1}) - \lambda_2^\Delta(X_2^*)$ λ^0 в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_2(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Вторая характеристика структуры материала $h_2(X)$ (6.32) сформирована в 4.1.4:

$$\min f_2(X) \equiv 795.72 + 23.89x_1 + 30.866x_2 - 25.8586x_3 - 45.0026x_4 - 0.7683x_1x_2 + 0.4703x_1x_3 + 0.7472x_1x_4 - 0.1283x_2x_3 + 0.3266x_2x_4 - 0.0112x_3x_4 + 0.0398x_1^2 + 0.0365x_2^2 + 3.2x_3^2 + 2.6457x_4^2.$$

Представим геометрическую интерпретацию функцию $h_2(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1 x_3\}$ и с постоянными координатами $\{y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки Y^0 (6.49) на рис. 7.k1.

Координаты точки и функция второго критерия на **оптимум (минимум)**:

$$Y_2^* = \{y_1 = 55.60, y_2 = 34.19, y_3 = 8.0, y_4 = 2.2\}, h_2^* = h_2(X_2^*) = 1361.4$$

при расчете по четырем переменным. На рисунке обозначена как $f_2^\Delta(X_2^*) = 1361.41$.

В системе MATLAB обозначено как $h_2^* = Z = 1361.42$.

$Y_2^* = \{x_1 = 55.6, x_3 = 8.0\}$ (на рис. 7.k1 обозначена как X_2^*). В двухмерной системе координат y_1, y_3 величина целевой функции равна $h_2^* = f_2(X_2^*) = 1193.56$. (Черный цвет).

Координаты точки **минимума** (Наихудшее решение – максимальное) в точке $X_2^0 = \{x_1 = 31.9, x_3 = 2.1\}$ величина целевой функции $F_2^0 = f_2(X_2^0) = 2207.2$.

Величина целевой функции в четырехмерной системе координат $f_2^\Delta(X_2^0) = 2458.5$.

Координаты точки и функция второго критерия **при равнозначных критериях**:

Координаты точки $X^0 = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$. Величина целевой функции $f_2(X^0) = 1790.68$.

Относительная оценка с приоритетом первого критерия в точке оптимума $X_{q=1}$ второго критерия: $\lambda_2(X_{q=1}) = \frac{f_2(X_{q=1}) - f_2^0}{f_2^* - f_2^0} = 0.76574$. В физических единицах величина первого критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=1}$ равна $f_2(X_{q=1}) = 1618.43$. (Показана фиолетовым цветом).

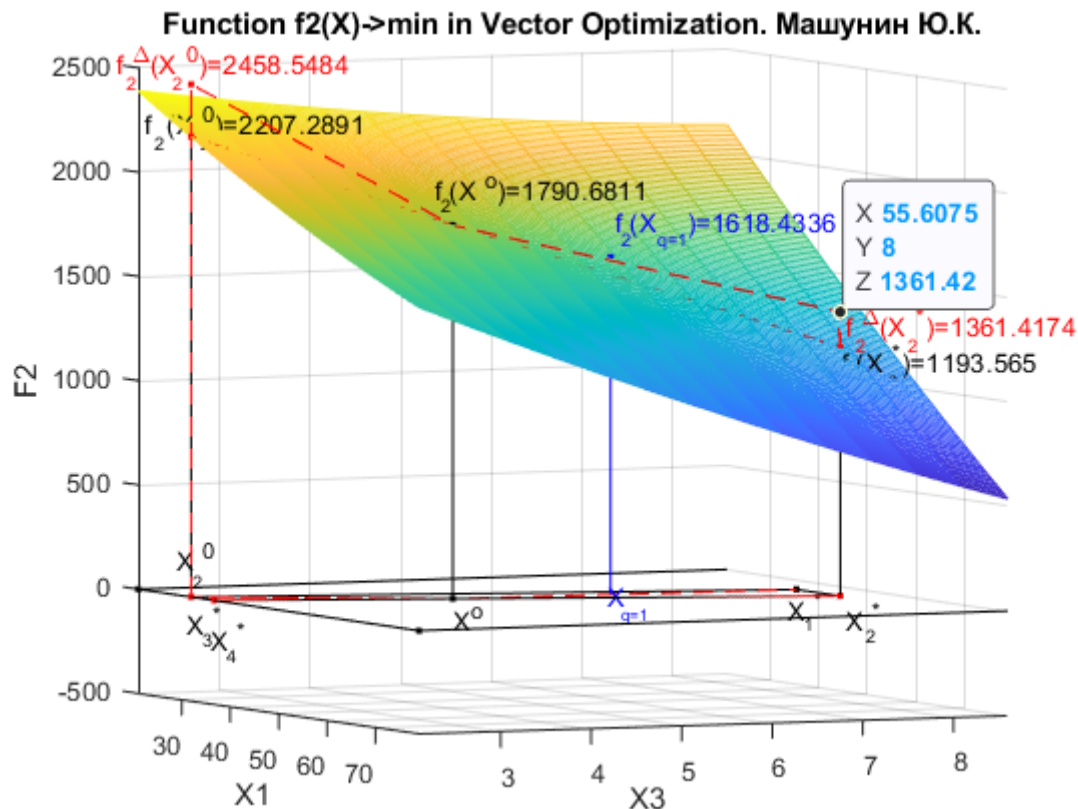


Рис. 7.k1. Функция $f_2(X)$ с приоритетом первого критерия в двухмерной системе координат x_1, x_3 , геометрическая интерпретация функции $f_2(X)$ - координаты x_1, x_2, x_3, x_4

Линейная функция, соединяющая точки $f_2(X^0)$ и $f_2^\Delta(X_2^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_2(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$. А в целом отрезки $f_2^\Delta(X_2^*) - f_2(X^0) - f_2^\Delta(X_2^*)$ представляют геометрическую интерполяцию функции $f_2(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

3. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – третьей характеристики $f_3(X)$ с приоритетом первого критерия - структуры материала при проектировании в физических единицах. На Рис. 8.k1 исследованы: точки оптимума X_3^* , $X_{q=1}$, с соответствующими относительными оценками $\lambda_3(X_3^*)$, $\lambda_3(X_{q=1})$, а также линейные функции $\lambda^0 \lambda_3(X_{q=1}) - \lambda_3^\Delta(X_3^*)$ λ^0 в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_3(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Третья характеристика структуры материала $h_3(X)$ (6.31) сформирована в 4.1.4:

$$\max h_3(Y) \equiv 110.22 + 0.7918y_1 + 1.73y_2 - 0.3713y_3 - 2.20y_4 - 0.0132y_1y_2 - 0.008y_1y_3 + 0.0193y_1y_4 - 0.0172y_2y_3 + 0.0161y_2y_4 - 0.0006y_3y_4 - 0.0004y_1^2 - 0.0002y_2^2 + 0.0335y_3^2 + 0.124y_4^2.$$

Представим геометрическую интерпретацию функции $h_3(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1, x_3\}$ и с постоянными координатами $y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки Y^0 (6.49) на рис. 8.k1.



Координаты точки и функция третьего критерия на **максимум**:

$Y_3^* = \{y_1 = 31.90, y_2 = 59.00, y_3 = 2.1, y_4 = 7.0\}$, $h_3^* = h_3(Y_3^*) = -210.35$ при расчете по четырем переменным. На рис. 8.k1 обозначена как $f_3^\Delta(X_3^*) = -210.35$

$Y_3^* = \{x_1 = 31.9, x_3 = 2.1\}$ (на рис. 8.k1 обозначена как X_3^*). В двухмерной системе координат y_1, y_3 величина целевой функции равна $h_3^* = f_3(X_3^*) = 195.73$. (Черный цвет) Величина целевой функции $F_3^* = 210.3$.

Координаты точки **минимума** $X_3^0 = \{x_1 = 78.16, x_3 = 8.0\}$ (на рис. 8.k1. Величина целевой функции $f_3^0 = 169.26$.

Координаты точки и функция второго критерия **при равнозначных критериях**: Координаты точки $X^0 = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$. Величина целевой функции $f_2(X^0) = 194.27$.

Относительная оценка с приоритетом первого критерия в точке оптимума $X_{q=1}$ третьего критерия: $\lambda_3(X_{q=1}) = \frac{f_3(X_{q=1}) - f_3^0}{f_3^* - f_3^0} = 0.48683$. В физических единицах величина третьего критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=1}$ равна $f_3(X_{q=1}) = 189.2$. (Фиолетовый цвет).

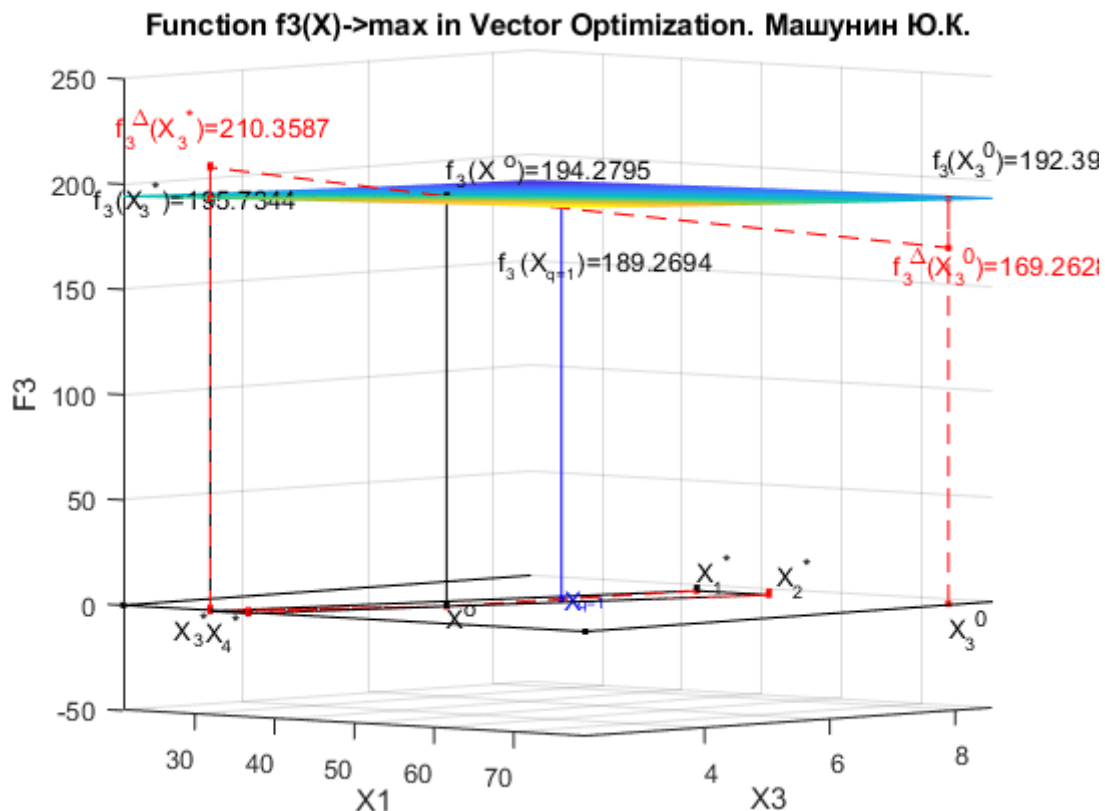


Рис. 8.k1. Функция $f_3(X)$ с приоритетом первого критерия в двухмерной системе координат x_1, x_3 , геометрическая интерпретация функции $f_3(X)$ в системе координат $x_1, \dots, x_4$.

Линейная функция, соединяющая точки $f_3(X^0)$ и $f_3^\Delta(X_3^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_3(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$. А в целом отрезки $f_3^\Delta(X_1^*) - f_3(X^0) - f_3^\Delta(X_3^0)$ представляют геометрическую интерпретацию функции $f_3(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

4. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – четвертой характеристики $f_4(X)$ с приоритетом первого критерия структуры материала при проектировании в физических единицах.

На Рис. 9.k1 исследованы: точки оптимума X_4^* , $X_{q=1}$, с соответствующими относительными оценками $\lambda_4(X_4^*)$, $\lambda_4(X_{q=1})$, а также линейные функции $\lambda^0 \lambda_4(X_{q=1}) - \lambda_4^\Delta(X_4^*)$ λ^0 в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_4(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Четвертая характеристика структуры материала $h_4(X)$ (6.34) сформирована в 4.1.4:

$$\max h_4(Y) \equiv 21.004 - 0.0097y_1 - 0.841y_2 - 0.4326y_3 + 1.1723y_4 + 0.166y_1y_2 + 0.085y_1y_3 - 0.0001y_1y_4 + 0.0523y_2y_3 + 0.0002y_2y_4 + 0.0006y_3y_4 - 0.0022y_1^2 + 0.0035y_2^2 + 0.006y_3^2 - 0.0311y_4^2\}.$$

Представим геометрическую интерпретацию функцию $f_4(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1, x_3\}$ и с постоянными координатами $y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки Y^0 (6.49) на рис. 9.k1.

Координаты точки и функция четвертого критерия на **максимум**:

$Y_4^* = \{y_1 = 36.70, y_2 = 59.00, y_3 = 2.1, y_4 = 2.2\}$, $h_4^* = h_4(Y_4^*) = 30.714$ при расчете по четырем переменным. На рис. 9.k1 обозначена как $f_4^\Delta(X_4^*) = 30.714$

$X_4^* = \{x_1 = 36.70, x_3 = 2.1\}$ (на рис. 9.k1 обозначена как X_4^*). В двухмерной системе координат y_1, y_3 величина целевой функции равна $h_4^* = f_4(X_4^*) = 28.302$. (Черный цвет) Величина целевой функции $F_4^* = 30.714$.

Координаты точки и функция четвертого критерия **минимума** $X_4^0 = \{x_1 = 62.71, x_3 = 8\}$. Величина целевой функции $f_4^0 = f_4(X_4^0) = -73.62$.

Координаты точки $X^0 = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$ (на рис. 9.k1 обозначена как X^0). Величина целевой функции $f_4(X^0) = 47.5$.

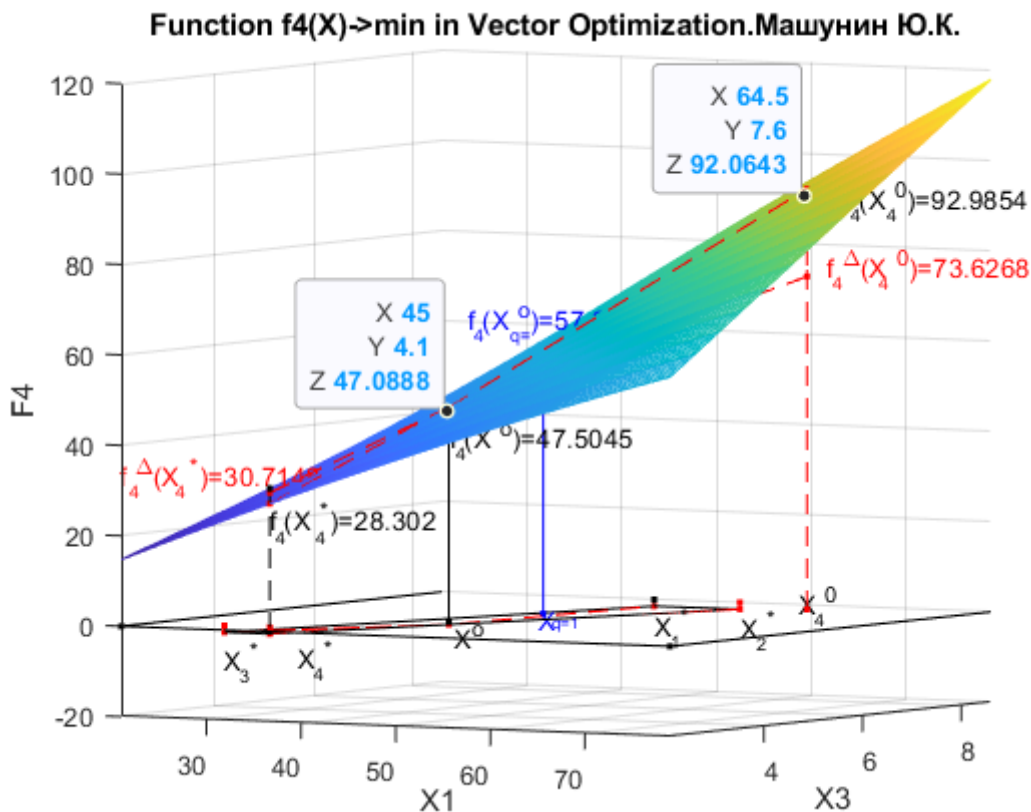


Рис. 9.k1. Функция $f_4(X)$ в двухмерной системе координат x_1, x_3 и геометрическая интерпретация функции $f_4(X)$ с приоритетом первого критерия в системе координат x_1, x_2, x_3, x_4

Относительная оценка с приоритетом первого критерия в точке оптимума $X_{q=1}$ четвертого критерия: $\lambda_4(X_{q=1}) = \frac{f_4(X_{q=1}) - f_4^0}{f_4^* - f_4^0} = 0.38154$. В физических единицах величина четвертого критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=1}$ равна $f_4(X_{q=1}) = 57.254$. (Показана фиолетовым цветом).

Линейная функция, соединяющая точки $f_4(X^0)$ и $f_4^\Delta(X_4^*)$, в физических единицах характеризует функцию $f_4(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$. А в целом отрезки $f_4^\Delta(X_4^*) - f_4(X^0)$ представляют геометрическую интерполяцию функции $f_4(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Заклучение по разделу: критерий k1.



В разделе рассмотрена и решена проблема (фрагмент) разработки и принятия управленческого решения условиях неопределенности в сложной инженерной системы (структуры материала). Проведен анализ результатов решения ВЗМП при заданном приоритете первого критерия, представлена геометрическая интерпретация результатов решения при проектировании в трехмерной системе координат четырех характеристик (критериев), во-первых, в относительных единицах, во-вторых, в физических единицах.

4.4. Блок 4.k2. Исследование, выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы (структура материала) по второму приоритетному критерию, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП.

В разделе представлено решение векторной задачи математического программирования - модели сложной инженерной системы (структуры материала) при заданном **приоритете второго критерия** на базе многомерной математики.

Проведен анализ результатов решения ВЗМП при заданном приоритете второго критерия и представлена геометрическая интерпретация результатов решения при проектировании в трехмерной системе координат **в относительных единицах**.

Представлена геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП с приоритетом второго критерия при проектировании в трехмерной системе координат **в физических единицах**.

4.4.1.k2. Решение ВЗМП - модели сложной инженерной системы (структуры материала) при заданном приоритете второго критерия в многомерной математике. (решение обратной задачи).

Лицом, принимающим решения, как правило, является конструктор системы.

Шаг 1. Решение векторной задачи при равнозначных критериях. Алгоритм решения векторной задачи представлен в блоках 2 – 5. Численные результаты решения векторной задачи представлены в разделе 4.2.3. **7 этап.**

Множество точек оптимальных по Парето $S^o \subset S$, представленных на рис.1, находится между оптимальными точками $X_1^* X_{13}^o X_3^* X_{34}^o X_4^* X_{42}^o X_2^* X_{21}^o X_1^*$ (на рисунках вместо Y используется X). Проведем анализ множества точек Парето $S^o \subset S$. Для этой цели мы соединим вспомогательные точки: $X_{13}^o X_{34}^o X_{42}^o X_{21}^o$ с точкой X^o , которая условно представляет центр множества Парето. В результате получили четыре подмножеств точек $X \in S_q^o \subset S^o \subset S, q = \overline{1,4}$. Первое подмножество $S_1^o \subset S^o \subset S$ выделенное точками $X_1^* X_{13}^o X^o X_{12}^o X_1^*$ характеризуется тем, что относительная оценка $\lambda_1 \geq \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, то есть в поле первого критерия S_1^o имеет приоритет над остальными. Подобно S_1^o подмножества точек S_2^o, S_3^o, S_4^o - характеризуется тем, что, где второй, третий и четвертый критерий имеет приоритет над другими соответственно. Множество точек, оптимальных по Парето, обозначено: $S^o = S_1^o \cup S_2^o \cup S_3^o \cup S_4^o$. Координаты всех полученных точек и относительные оценки представлены в двумерном пространстве $\{x_1 x_3\}$ на рис. 1. Эти координаты показаны в трехмерном пространстве $\{x_1 x_3 \lambda\}$ на рис. 2, где третья ось λ - относительная оценка.

Ограничения набора точек, оптимальных по Парето, на рис. 2 он снижен до -0,5 (чтобы были видимы ограничения). Эта информация также является основой для дальнейшего исследования структуры множества Парето. Лицо, принимающее решения, как правило, является разработчиком инженерной системы.

Если результаты решения векторной задачи с равнозначными критериями не удовлетворяют лицу, принимающее решение, то выбор оптимального решения осуществляется из какого-либо подмножества точек $S_1^o, S_2^o, S_3^o, S_4^o$. Эти подмножества точек Парето показаны на рис. 1 надписью в виде функций $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$.

В данном разделе исследуется подмножество точек с приоритетом второго критерия S_2^o .

Шаг 2. Выбор приоритетного критерия $q \in K$.

Из теории известно, что в оптимальной точке X^o всегда имеется два наиболее противоречивых критерия, $q \in K$ и $p \in K$, для которых в относительных единицах выполняется точное равенство:

$$\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_p(X^o), q, p \in K, X \in S,$$

а для остальных выполняется неравенства:



$$\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), \forall k \in K, q \neq p \neq k.$$

В модели материала (6.30)-(6.35) и соответствующей λ -задачи (6.42)-(6.48) такими критериями являются второй и третий: $\lambda^o = \lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o) = 0.6087$, т.е. выполняется числовая симметрия.

Как правило, из этой пары $\lambda^o = \lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o) = 0.6087$ противоречивых критериев выбирается критерий, который ЛПР хотел бы улучшить. Такой критерий называется «приоритетным критерием», обозначим его $q = 2 \in K$. Этот критерий исследуется во взаимодействии с первым критерием $q = 1 \in K$. Мы исследуем эти два критерия из всего множества критериев $K = 4$, показанных на рис. 3.

Дальнейшие шаги расчета представим на примере второй функции (критерия).

Выбор приоритетного критерия:

На дисплей выдается общая информация для принятия решений:

$$\text{Критерии в точке оптимума } X^o: FX^o = 363.9686 \quad 1790.6811 \quad 194.2795 \quad 47.504. \quad (6.71)$$

$$\text{Относительные оценки в } X^o: LX^o = 0.73718 \quad 0.60874 \quad 0.60874 \quad 0.60874. \quad (6.72)$$

ВЫВОД: Критерии 1, 2, 3 наиболее противоречивы, из них выбираем приоритетный. На дисплей выдается сообщение:

$q = \text{input}(\text{'Введите приоритетный критерий (номер) } q = \text{'}) - \text{Ввели критерий } q = 2.$

Шаг 3. Определяются числовые пределы изменения величины приоритета критерия $q = 2 \in K$. Для приоритетного критерия $q = 2 \in K$ определяются изменения числовых пределов в натуральных единицах при переходе из точки оптимума X^o (6.49) в точку X_q^* , полученную на первом шаге. Данные о критерии $q = 2$ выдаются на экран:

$$f_q(X^o) = 1790.6811 \leq f_q(X) \leq 1361.4174 = f_q(X_q^*), q \in K. \quad (6.73)$$

В относительных единицах критерий $q = 2$ изменяется в следующих пределах:

$$\lambda_q(X^o) = 0.6087 \leq \lambda_q(X) \leq 1 = \lambda_q(X_q^*), q = 2 \in K.$$

Эти данные анализируются.

Шаг 4. Выбор величины приоритетного критерия $q \in K$. (Decision-making).

На сообщение: «Введите величину приоритетного критерия $f_q =$ » - вводим, например, $f_q = 1500$.

Шаг 5. Вычисляется относительная оценка.

Для выбранной величины приоритетного критерия $f_q = 200$ вычисляется относительная оценка:

$$\lambda_q = \frac{f_q - f_q^o}{f_q^* - f_q^o} = \frac{1500 - 1361.4174}{1790.6811 - 1361.4174} = 0.8737,$$

которая при переходе от точки X^o к точке X_q^* лежит в пределах:

$$0.6087 = \lambda_3(X^o) \leq \lambda_3 = 0.8737 \leq \lambda_3(X_3^*) = 1, q \in K, \quad (6.74)$$

Шаг 6. Вычислим коэффициент линейной аппроксимации

Предполагая линейный характер изменения критерия $f_q(X)$ в (6.73) и соответственно относительной оценки λ_q в (6.74), используя стандартные приемы линейной аппроксимации, вычислим коэффициент пропорциональности между $\lambda_q(X^o)$, λ_q , который назовем ρ :

$$\rho = \frac{\lambda_q - \lambda_q(X^o)}{\lambda_q(X_q^*) - \lambda_q(X^o)} = \frac{0.8737 - 0.6087}{1 - 0.6087} = 0.6772, q = 2 \in K. \quad (6.75)$$

Шаг 7. Вычислим координаты точки приоритета критериев для $f_q = 1500$.

Предполагая линейный характер изменения вектора $X^q = \{x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4\}$, $q = 2$ определим координаты для точки с $f_q = 1500$ с относительной оценкой (6.41):

$$\begin{aligned} x_{\lambda=0.74}^{q=3} &= \{x_1 = X^o(1) + \rho(X_q^*(1) - X^o(1)), \\ x_2 &= X^o(2) + \rho(X_q^*(2) - X^o(2)), \\ x_3 &= X^o(3) + \rho(X_q^*(3) - X^o(3)), \\ x_4 &= X^o(4) + \rho(X_q^*(4) - X^o(4))\}, \end{aligned} \quad (6.76)$$

где $X^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2\}$,

$$X_3^* = \{x_1 = 55.6075, x_2 = 34.1925, x_3 = 8.0, x_4 = 2.2\}. \quad (6.77)$$



Как результат решения мы получим точку с координатами:

$$X^q = \{x_1 = 51.8286, x_2 = 39.1502, x_3 = 6.8212, x_4 = 2.2\}.$$

Шаг 8. Вычисление главных показателей точки X^q .

Для полученной точки X^q , вычислим:

все критерии в натуральных единицах $f_k(X^q) = \{f_k(X^q), k = \overline{1, K}\}$,

$$f(X^q) = \{f_1(X^q) = 381.3, f_2(X^q) = 1465.7, f_3(X^q) = 182.1, f_4(X^q) = 64.5\}; \quad (6.78)$$

все относительные оценки критериев:

$$\lambda^q = \{\lambda_k^q, k = \overline{1, K}\}, \lambda_k(X^q) = \frac{f_k(X^q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}:$$

$$\lambda_k(X^q) = \{\lambda_1(X^q) = 0.9267, \lambda_2(X^q) = 0.9049, \lambda_3(X^q) = 0.3121, \lambda_4(X^q) = 0.2126\}; \quad (6.79)$$

минимальная относительная оценка: $\min_{k \in K} \lambda_k(X^q) = \min(\lambda_k(X^q)) = 0.2126$.

Определение приоритетов критерия $P^q(X) = \{p_k^q = \frac{\lambda_q(X^q)}{\lambda_k(X^q)}, k = \overline{1, K}\}$:

$$P^q = [p_1^2 = 0.9766, p_2^2 = 1.0, p_3^2 = 2.8995, p_4^2 = 4.2573];$$

Относительная оценка с учетом вектора приоритетов:

$$\begin{aligned} P^q * \lambda_k(X^q) &= \{p_1^2 * \lambda_1(X^q) = 0.9049, \\ & p_2^2 * \lambda_2(X^q) = 0.9049, \\ & p_3^2 * \lambda_3(X^q) = 0.9049, \\ & p_4^2 * \lambda_4(X^q) = 0.9049\} \end{aligned}$$

минимальная относительная оценка:

$$\lambda^{oo} = \min(p_1^2 \lambda_1(X^q), p_2^2 \lambda_2(X^q), p_3^2 \lambda_3(X^q), p_4^2 \lambda_4(X^q)) = 0.9049$$

Аналогично другие точки из области Парето $X_t^o = \{\lambda_t^o, X_t^o\} \in S^o$ могут быть получены.

4.4.2.k2. Анализ результатов решения векторной задачи математического программирования - модели инженерной системы при заданном приоритете второго критерия.

Рассчитанная в (108) величина первого критерия при заданном приоритете второго критерия $f_q(X_t^o) = 199, q = 3 \in K, q \in K$ обычно не равна заданной $f_q = 200$. Ошибка выбора $\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q| = |199 - 200| = 1.0$ определяется ошибкой линейной аппроксимации: $\Delta f_{q\%} = 0.5\%$.

Если ошибка $\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q| = |199 - 200| = 1.0$, измеренная в натуральных единицах или в процентах $\Delta f_{q\%} = \frac{\Delta f_q}{f_q} * 100 = 0.5\%$, больше заданной $\Delta f, \Delta f_q > \Delta f$, то переходим к шагу 2, если $\Delta f_q \leq \Delta f$, то вычисления завершаются. **Конец.**

В процессе моделирования могут быть изменены параметрические ограничения и функции, т. е. получено некоторое множество оптимальных решений. Из этого множества оптимальных решений выбираем окончательный вариант (процесс принятия решений). В нашем примере окончательный вариант включает параметры:

$$X^o = \{X^o, \lambda^o\} = \{X^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2\}, \lambda^o = 0.6087\}; \quad (6.80)$$

параметры структуры материала при заданном приоритете критерия:

$$q=3: X^q = \{x_1 = 39.63, x_2 = 52.91, x_3 = 3.54, x_4 = 3.907\}.$$

4.4.3.k2. Геометрическая интерпретация результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по второму приоритетному критерию в относительных единицах.

Для геометрической интерпретации результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров решения векторной задачи по второму приоритетному критерию в относительных единицах сформируем рис. 5k2.

Аналогично рис. 4, сформируем относительные оценки четырех критериев в точке оптимума $Y_k^* \quad \lambda_k(Y_k^*), k = \overline{1, K}$ (черный цвет) и $\lambda_k^A(X_k^*) = 1, k = \overline{1, K}$ (красный цвет) и представим их рис. 5k2.



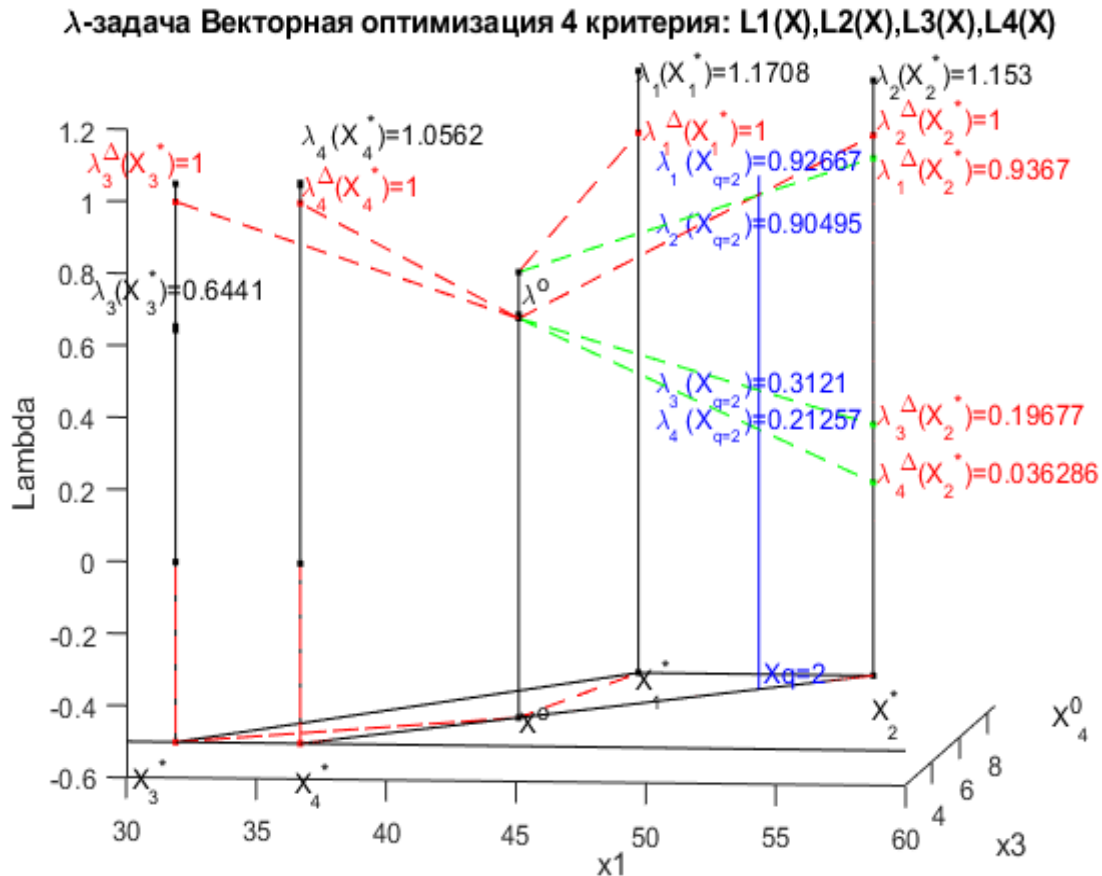


Рис. 5к2. λ -задача в системе координат x_1, x_3 ($= y_1, y_3$) и λ . Результаты решения:

$\lambda_k^A(X_k^*) = 1, k = \overline{1, K}$; относительные оценки с приоритетом второго критерия в точке оптимума $X_{q=2}$: $\lambda_k(X_{q=2}), k = \overline{1, K}$.

На третьем шаге решения ВЗМП с равнозначными критериями в (6.36) в точках оптимума $Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, Y_4^*$ получены величины всех относительных оценок:

$$L(Y^*) = \begin{Bmatrix} L(Y_1^*) \\ L(Y_2^*) \\ L(Y_3^*) \\ L(Y_4^*) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0000 & 0.9245 & 0.3560 & 0.1197 \\ 0.9367 & 1.0000 & 0.1968 & 0.0363 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0000 & 1.011 \\ 0.3669 & 0.2257 & 0.9427 & 1.0000 \end{Bmatrix}.$$

На рис. 5к2 $\lambda_2(Y_2^*) = 1.0000$ обозначена как $\lambda_2^A(X_2^*)=1$.

Линейная функция, соединяющая точки $\lambda^o = 0.60874$ и $\lambda_2^A(X_2^*)=1$ в относительных единицах характеризует функцию $f_2(X)$ в относительных единицах в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$. Эта линейная функция представляет геометрическую интерполяцию функций $f_2(X)$ в относительных единицах из N -мерного (4-мерного) в двухмерную систему координат. Аналогично исследуются все функции (критерии). В целом на рис. 5к2 в точке X_2^* показана геометрическая (линейная) интерполяция всех функций (критериев):

$f_1(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_1^A(X_2^*) = 0.9367$;

$f_2(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_2^A(X_2^*) = 1.0$;

$f_3(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_3^A(X_2^*) = 0.1968$;

$f_4(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_4^A(X_2^*) = 0.0363$.

Относительные оценки с приоритетом второго критерия в точке оптимума $X_{q=2}$

$$\lambda_k(X_{q=2}) = \frac{f_k(X_{q=2}) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}: \lambda_k(X_{q=2}) = \{\lambda_1(X_{q=2}) = 0.92667, \lambda_2(X_{q=2}) = 0.90495, \lambda_3(X_{q=2}) = 0.3121, \lambda_4(X_{q=2}) = 0.21257\};$$

Результаты решения показывают, что математические результаты полностью совпадают с геометрическими.

4.4.3.k2. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП с приоритетом второго критерия – модели структуры материала при проектировании в трехмерной системе координат в физических единицах.

Исходной информацией для геометрической интерпретации результатов решения векторной задачи (ВЗМП) с приоритетом первого критерия являются:

параметры точки оптимума при равнозначных критериях:

$$X^0 = \{X^0, \lambda^0\} = \{Y^0 = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2\}, \lambda^0 = 0.6087\},$$

рассчитанной на пятом шаге алгоритма в двухмерной системе координат x_1, x_2 (см. Рис. 1) и представленной в трехмерной системе координат x_1, x_2 и λ в относительных единицах на рис. 2, 3, 4 при проектировании.

Исследуем и представим параметры последовательно для каждой характеристики структуры материала (критерия): $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$ в **физических единицах**.

1. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – первой характеристики $f_1(X)$ с приоритетом второго критерия при проектировании в физических единицах.

На Рис. 6.k2 исследованы: точки оптимума $X_2^*, X_{q=2}$, с соответствующими относительными оценками $\lambda_2(X_2^*)$ $\lambda_2(X_{q=2})$, а также линейные функции $\lambda^0 \lambda_2(X_{q=2}) - \lambda_2^\Delta(X_2^*)$ λ^0 в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_2(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Первая характеристика структуры материала $h_1(X)$ (6.30) сформирована в 4.1.4:

$$\max h_1(X) \equiv 323.84 - 2.25y_1 - 3.49y_2 + 10.72y_3 + 13.124y_4 + 0.0968y_1y_2 - 0.062y_1y_3 - 0.169y_1y_4 + 0.0743y_2y_3 - 0.1y_2y_4 - 0.0036y_3y_4 + 0.0143y_1^2 + 0.0118y_2^2 - 0.2434y_3^2 - 0.5026y_4^2.$$

Представим геометрическую интерпретацию функции $h_1(Y)$ в физических единицах с переменными координатами $\{y_1, y_3\}$ и с постоянными координатами $\{y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$ на рис. 6.k2.

Координаты точки и функция первого критерия на **максимум**:

$Y_1^* = \{y_1 = 46.56, y_2 = 43.23, y_3 = 8.0, y_4 = 2.2\}, h_1^* = h_1(Y_1^*) = -387.9$ при расчете по четырем переменным. На рисунке обозначена как $f_1^\Delta(X_1^*) = -387.9$;

$Y_1^* = \{y_1 = 46.5676, y_3 = 8.0\}$ (на рис. 6.k1 обозначена как X_1^*). В двухмерной системе координат y_1, y_3 величина целевой функции равна $h_1^* = f_1(X_1^*) = 403.6$. (Черный цвет).

Координаты точки и функция первого критерия на **минимум**:

В точке $X_1^0 = \{x_1 = 31.9, x_3 = 2.1\}$ величина целевой функции $F_1^0 = f_1(X_1^0) = 303.66$.

Величина целевой функции в четырехмерной системе координат $f_1^\Delta(X_1^0) = 296.59$.

Координаты точки и функция первого критерия **при равнозначных критериях**:

Координаты точки $X^0 = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$. Величина целевой функции $f_1(X^0) = 363.96$.



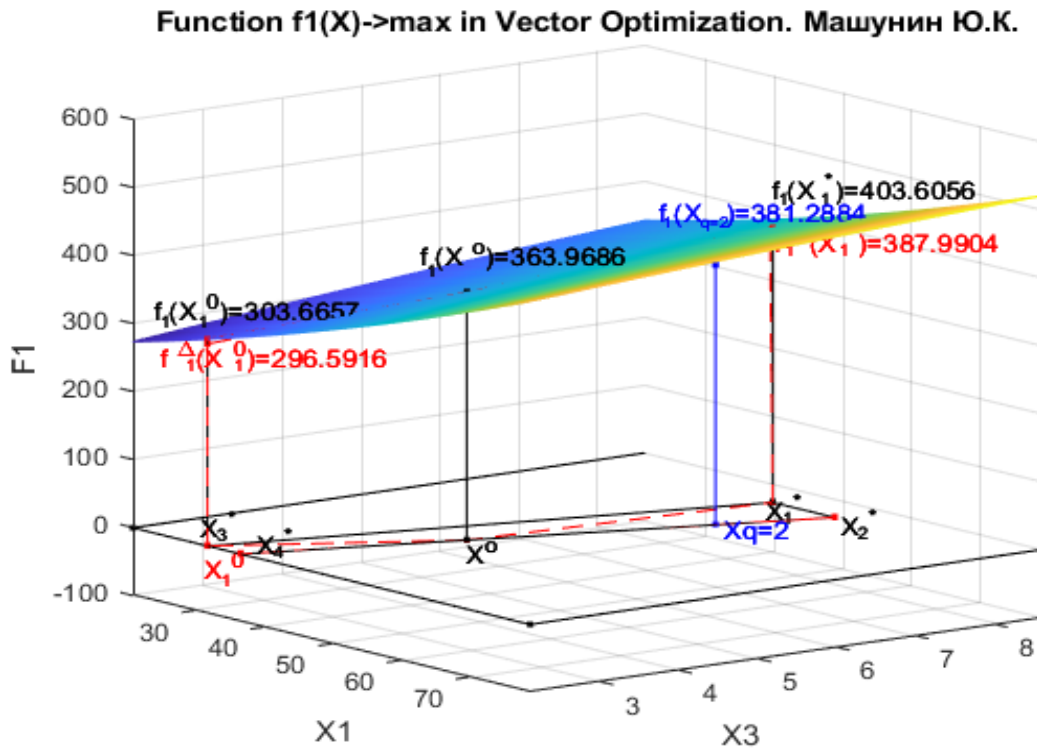


Рис. 6k2. Функция $f_1(X)$ с приоритетом второго критерия в двухмерной системе координат $x_1 x_3$ и геометрическая интерпретация функции $f_1(X)$ в системе координат $x_1 x_2 x_3 x_4$

Относительная оценка с приоритетом второго критерия в точке оптимума $X_{q=2}$:

$\lambda_1(X_{q=2}) = \frac{f_1(X_{q=2}) - f_1^0}{f_1^* - f_1^0} = 0.92667$. В физических единицах величина первого критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=2}$ равна $f_1(X_{q=2}) = 381.28$. (Показана фиолетовым цветом).

Линейная функция, соединяющая точки $f_1(X^0)$ и $f_1^\Delta(X_1^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_1(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

А в целом отрезки $f_1^\Delta(X_1^*) - f_1(X^0) - f_1^\Delta(X_1^0)$ с учетом $f_1(X_{q=2})$ представляют геометрическую интерпретацию функции $f_1(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$ на двухмерное параметров x_1, x_3 .

2. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – второй характеристики $f_2(X)$ с приоритетом второго критерия структуры материала при проектировании в физических единицах.

На Рис. 7.k2 исследованы: точки оптимума X_2^* , $X_{q=2}$, с соответствующими относительными оценками $\lambda_2(X_2^*)$, $\lambda_2(X_{q=2})$, а также линейные функции $\lambda^0 \lambda_2(X_{q=2}) - \lambda_2^\Delta(X_2^*)$ в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_2(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Вторая характеристика структуры материала $h_2(X)$ (6.32) сформирована в 4.1.4:

$$\min f_2(X) \equiv 795.72 + 23.89x_1 + 30.866x_2 - 25.8586x_3 - 45.0026x_4 - 0.7683x_1x_2 + 0.4703x_1x_3 + 0.7472x_1x_4 - 0.1283x_2x_3 + 0.3266x_2x_4 - 0.0112x_3x_4 + 0.0398x_1^2 + 0.0365x_2^2 + 3.2x_3^2 + 2.6457x_4^2.$$

Представим геометрическую интерпретацию функцию $h_2(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1 x_3\}$ и с постоянными координатами $\{y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки Y^0 (6.49) на рис. 7.k2.

Координаты точки и функция второго критерия на **оптимум (минимум)**:

$$Y_2^* = \{y_1 = 55.60, y_2 = 34.19, y_3 = 8.0, y_4 = 2.2\}, h_2^* = h_2(X_2^*) = 1361.4$$

при расчете по четырем переменным. На рисунке обозначена как $f_2^\Delta(X_2^*) = 1361.41$.

$Y_2^* = \{x_1 = 55.6, x_3 = 8.0\}$ (на рис. 7k2 обозначена как X_2^*). В двухмерной системе координат y_1, y_3 величина целевой функции равна $h_2^* = f_2(X_2^*) = 1193.56$. (Черный цвет).

Координаты точки **минимума** (Наихудшее решение – максимальное) в точке $X_2^0 = \{x_1 = 31.9, x_3 = 2.1\}$ величина целевой функции $F_2^0 = f_2(X_2^0) = 2207.2$.

Величина целевой функции в четырехмерной системе координат $f_2^\Delta(X_2^0) = 2458.5$.

Координаты точки и функция второго критерия **при равнозначных критериях**:

Координаты точки $X^0 = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$. Величина целевой функции $f_2(X^0) = 1790.68$.

Относительная оценка с приоритетом второго критерия в точке оптимума $X_{q=2}$ второго критерия: $\lambda_2(X_{q=2}) = \frac{f_2(X_{q=2}) - f_2^0}{f_2^* - f_2^0} = 0.90495$. В физических единицах величина второго критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=2}$ равна $f_2(X_{q=2}) = 1465.7036$. (Показана фиолетовым цветом).

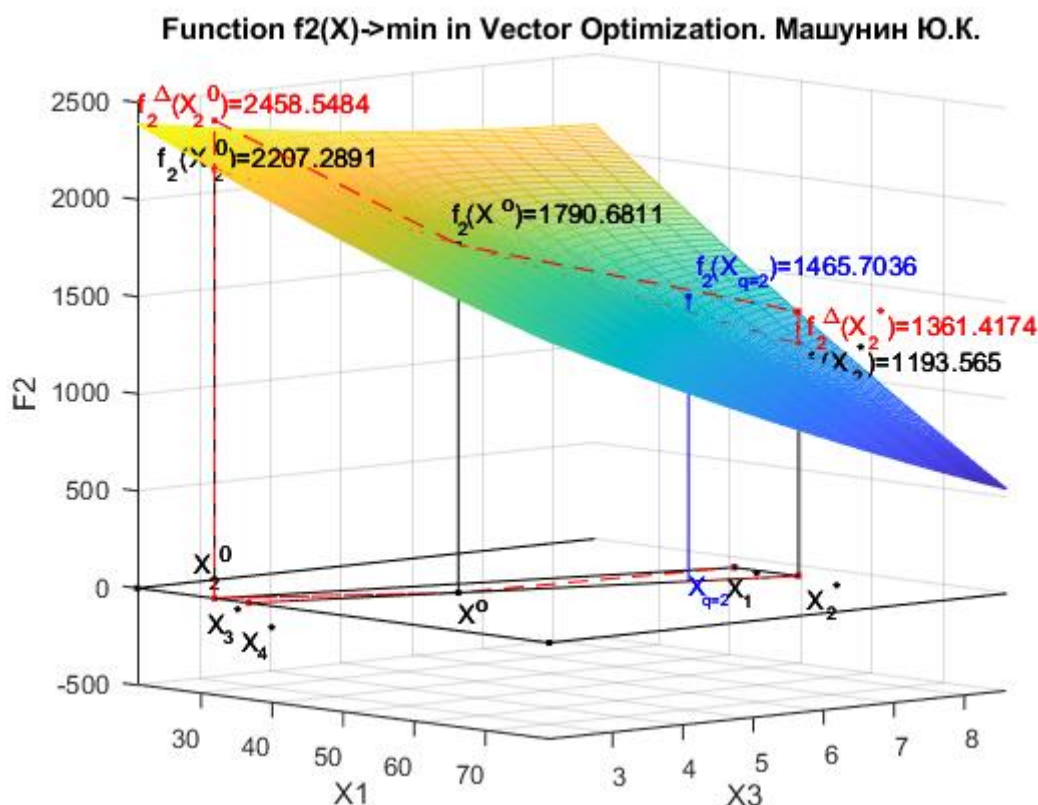


Рис. 9. Функция $f_2(X)$ с приоритетом второго критерия в двухмерной системе координат x_1 x_3 и геометрическая интерпретация функции $f_2(X)$ в системе координат x_1 x_2 x_3 x_4

Линейная функция, соединяющая точки $f_2(X^0)$ и $f_2^\Delta(X_2^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_2(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$. А в целом отрезки $f_2^\Delta(X_2^*) - f_2(X^0) - f_2^\Delta(X_2^0)$ представляют геометрическую интерполяцию функции $f_2(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

3. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – третьей характеристики $f_3(X)$ с приоритетом второго критерия - структуры материала при проектировании в физических единицах.

На Рис. 8.k2 исследованы: точки оптимума X_3^* , $X_{q=2}$, с соответствующими относительными оценками $\lambda_3(X_3^*)$ $\lambda_3(X_{q=2})$, а также линейные функции $\lambda^0 \lambda_3(X_{q=2}) - \lambda_3^\Delta(X_3^*)$ λ^0 в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_3(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Третья характеристика структуры материала $h_3(X)$ (6.31) сформирована в 4.1.4:

$$\max h_3(Y) \equiv 110.22 + 0.7918y_1 + 1.73y_2 - 0.3713y_3 - 2.20y_4 - 0.0132y_1y_2 - 0.008y_1y_3 + 0.0193y_1y_4 - 0.0172y_2y_3 + 0.0161y_2y_4 - 0.0006y_3y_4 - 0.0004y_1^2 - 0.0002y_2^2 + 0.0335y_3^2 + 0.124y_4^2\}.$$

Представим геометрическую интерпретацию функции $h_3(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1, x_3\}$ и с постоянными координатами $y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки Y^0 (6.49) на рис. 8.k2.

Координаты точки и функция третьего критерия на **максимум**:

$Y_3^* = \{y_1 = 31.90, y_2 = 59.00, y_3 = 2.1, y_4 = 7.0\}$, $h_3^* = h_3(Y_3^*) = -210.35$ при расчете по четырем переменным. На рис. 8.k2 обозначена как $f_3^\Delta(X_3^*) = -210.35$

$Y_3^* = \{x_1 = 31.9, x_3 = 2.1\}$ (на рис. 8.k2 обозначена как X_3^*). В двухмерной системе координат y_1, y_3 величина целевой функции равна $h_3^* = f_3(X_3^*) = 195.73$. (Черный цвет) Величина целевой функции $F_3^* = 210.3$. Координаты точки **минимума** $X_3^0 = \{x_1 = 78.16, x_3 = 8.0\}$ (на рис. 8.k2. Величина целевой функции $f_3^0 = 192.39$, $f_3^\Delta(X_3^*) = 169.26$ (красный цвет).

Координаты точки и функция второго критерия **при равнозначных критериях**:

Координаты точки $X^0 = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$. Величина целевой функции $f_3(X^0) = 194.2$.

Function f3(X)->max in Vector Optimization. Машунин Ю.К.

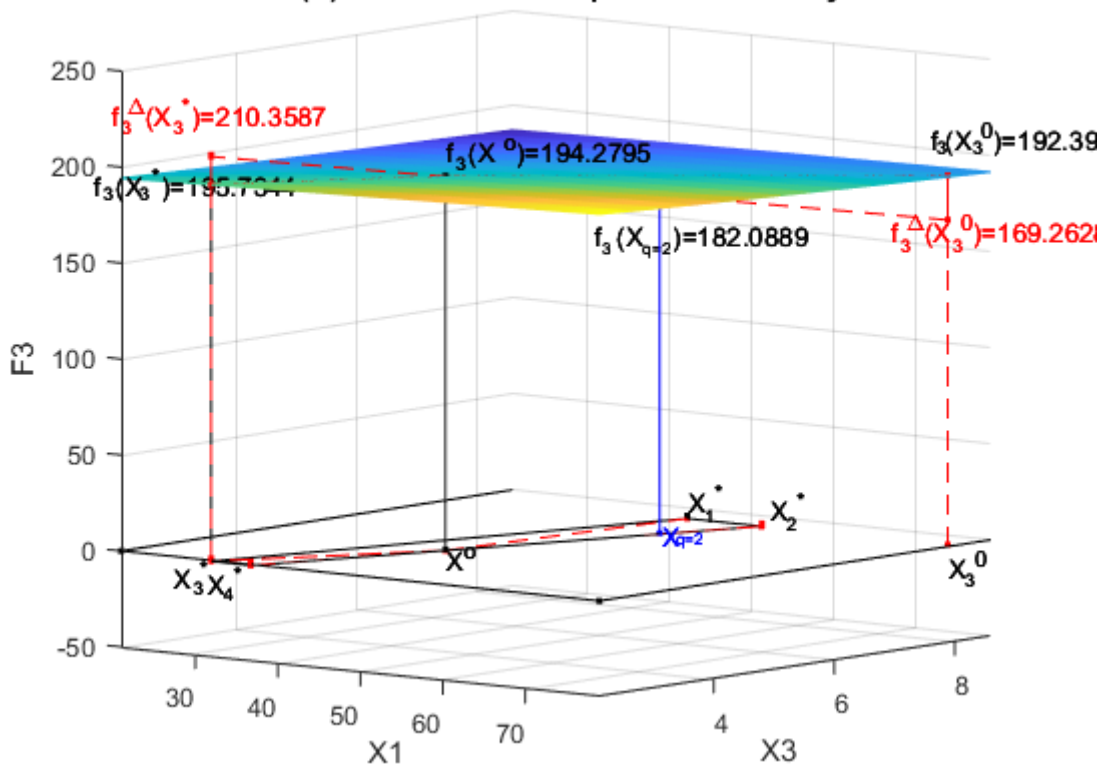


Рис. 8.k2. Функция $f_3(X)$ с приоритетом второго критерия в двухмерной системе координат x_1, x_3 и геометрическая интерпретация функции $f_3(X)$ в системе координат x_1, x_2, x_3, x_4

Относительная оценка с приоритетом первого критерия в точке оптимума $X_{q=1}$ третьего критерия: $\lambda_3(X_{q=2}) = \frac{f_3(X_{q=2}) - f_3^0}{f_3^* - f_3^0} = 0.3121$. В физических единицах величина третьего критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=2}$ равна $f_3(X_{q=2}) = 182.08$. (Показана фиолетовым цветом).

Линейная функция, соединяющая точки $f_3(X^0)$ и $f_3^\Delta(X_3^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_3(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

А в целом отрезки $f_3^\Delta(X_1^*) - f_3(X^0) - f_3^\Delta(X_3^0)$ представляют геометрическую интерполяцию функции $f_3(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

4. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – четвертой характеристики $f_4(X)$ с приоритетом второго критерия - структуры материала при проектировании в физических единицах.

На Рис. 9.k2 исследованы: точки оптимума X_4^* , $X_{q=1}$, с соответствующими относительными оценками $\lambda_4(X_4^*)$, $\lambda_4(X_{q=1})$, а также линейные функции $\lambda^0 \lambda_4(X_{q=1}) - \lambda_4(X_4^*)$ λ^0 в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_4(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Четвертая характеристика структуры материала $h_4(X)$ (6.34) сформирована в 4.1.4:

$$\max h_4(Y) \equiv 21.004 - 0.0097y_1 - 0.841y_2 - 0.4326y_3 + 1.1723y_4 + 0.166y_1y_2 + 0.085y_1y_3 - 0.0001y_1y_4 + 0.0523y_2y_3 + 0.0002y_2y_4 + 0.0006y_3y_4 - 0.0022y_1^2 + 0.0035y_2^2 + 0.006y_3^2 - 0.0311y_4^2\}.$$

Представим геометрическую интерпретацию функцию $f_4(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1, x_3\}$ и с постоянными координатами $y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки Y^0 (6.49) на рис. 9.k2.

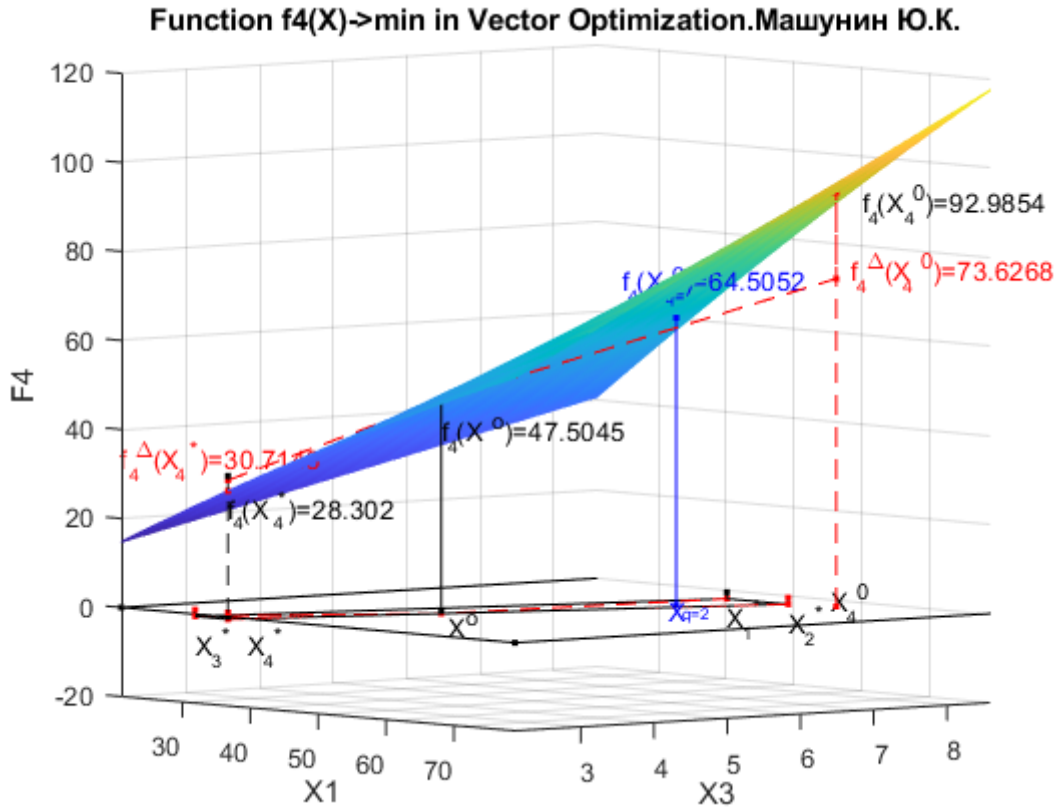


Рис. 9.k2. Функция $f_4(X)$ с приоритетом второго критерия в двухмерной системе координат x_1, x_3 и геометрическая интерпретация функции $f_4(X)$ в системе координат x_1, x_2, x_3, x_4

Координаты точки и функция четвертого критерия на **максимум**:

$Y_4^* = \{y_1 = 36.70, y_2 = 59.00, y_3 = 2.1, y_4 = 2.2\}$, $h_4^* = h_4(Y_4^*) = 30.714$ при расчете по четырем переменным. На рис. 9.k2 обозначена как $f_4^\Delta(X_4^*) = 30.714$

$X_4^* = \{x_1 = 36.70, x_3 = 2.1\}$ (на рис. 9.k2 обозначена как X_4^*). В двухмерной системе координат y_1, y_3 величина целевой функции равна $h_4^* = f_4(X_4^*) = 28.302$. (Черный цвет) Величина целевой функции $F_4^* = 30.714$.

Координаты точки и функция четвертого критерия **минимума**

$X_4^0 = \{x_1 = 62.71, x_3 = 8\}$. Величина целевой функции $f_4^0(X_4^0) = 92.98$, $f_4^\Delta(X_4^0) = 73.62$.

Координаты точки $X^0 = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$ (на рис. 9.k2 обозначена как X^0). Величина целевой функции $f_4(X^0) = 47.504$.

Относительная оценка с приоритетом первого критерия в точке оптимума $X_{q=1}$ четвертого критерия: $\lambda_4(X_{q=2}) = \frac{f_4(X_{q=2}) - f_4^0}{f_4^* - f_4^0} = 0.21257$. В физических единицах величина четвертого критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=2}$ равна $f_4(X_{q=2}) = 64.505$. (Показана фиолетовым цветом).

Линейная функция, соединяющая точки $f_4(X^0)$ и $f_4^\Delta(X_4^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_4(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$. А в целом отрезки $f_4^\Delta(X_4^*) - f_4(X^0) - f_4^\Delta(X_4^0)$ представляют геометрическую интерполяцию функции $f_4(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Заключение по разделу: критерий k2.



В разделе рассмотрена и решена проблема (фрагмент) разработки и принятия управленческого решения условиях неопределенности в сложной инженерной системы (структуры материала). Проведен анализ результатов решения ВЗМП при заданном приоритете второго критерия, представлена геометрическая интерпретация результатов решения при проектировании в трехмерной системе координат четырех характеристик (критериев), во-первых, в относительных единицах, во-вторых, в физических единицах.

4.4. Блок 4.к3. Исследование, выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы (структура материала) с приоритетом третьего критерия, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП.

В разделе представлено решение векторной задачи математического программирования - модели сложной инженерной системы (структуры материала) при заданном **приоритете третьего критерия** на базе многомерной математики.

Проведен анализ результатов решения ВЗМП при заданном приоритете третьего критерия и представлена геометрическая интерпретация результатов решения при проектировании в трехмерной системе координат **в относительных единицах**.

Представлена геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП с приоритетом третьего критерия при проектировании в трехмерной системе координат **в физических единицах**.

4.4.1.к3. Решение ВЗМП - модели сложной инженерной системы (структуры материала) при заданном приоритете третьего критерия в многомерной математике. (решение обратной задачи).

Лицом, принимающим решения, как правило, является конструктор системы.

Шаг 1. Решение векторной задачи при равнозначных критериях. Алгоритм решения векторной задачи представлен на блок 2 – 5. Численные результаты решения векторной задачи представлены в разделе 4.2.3. **7 этап.**

Множество точек оптимальных по Парето $S^o \subset S$, представленных на рис.1, находится между оптимальными точками $X_1^* X_{13}^o X_3^* X_{34}^o X_4^* X_{42}^o X_2^* X_{21}^o X_1^*$ (на рисунках вместо Y используется X). Проведем анализ множества точек Парето $S^o \subset S$. Для этой цели мы соединим вспомогательные точки: $X_{13}^o X_{34}^o X_{42}^o X_{21}^o$ с точкой X^o , которая условно представляет центр множества Парето. В результате получили четыре подмножеств точек $X \in S_q^o \subset S^o \subset S, q = \overline{1,4}$. Первое подмножество $S_1^o \subset S^o \subset S$ выделенное точками $X_1^* X_{13}^o X^o X_{12}^o X_1^*$ характеризуется тем, что относительная оценка $\lambda_1 \geq \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, то есть в поле первого критерия S_1^o имеет приоритет над остальными. Подобно S_{21}^o подмножества точек S_2^o, S_3^o, S_4^o - характеризуется тем, что, где второй, третий и четвертый критерий имеет приоритет над другими соответственно. Множество точек, оптимальных по Парето, будем обозначать $S^o = S_1^o \cup S_2^o \cup S_3^o \cup S_4^o$. Координаты всех полученных точек и относительные оценки представлены в двумерном пространстве $\{x_1 x_2\}$ на рис. 1. Эти координаты показаны в трех измеренных пространствах $\{x_1 x_2 \lambda\}$ на рис. 2, где третья ось λ - относительная оценка.

Ограничения набора точек, оптимальных по Парето, на рис. 2 он снижен до -0,5 (чтобы были видимы ограничения). Эта информация также является основой для дальнейшего исследования структуры множества Парето. Лицо, принимающее решения, как правило, является разработчиком инженерной системы.

Если результаты решения векторной задачи с равнозначными критериями не удовлетворяют лицу, принимающее решение, то выбор оптимального решения осуществляется из какого-либо подмножества точек $S_1^o, S_2^o, S_3^o, S_4^o$. Эти подмножества точек Парето показаны на рис. 1 надписью в виде функций $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$.

В данном разделе исследуется подмножество точек с приоритетом третьего критерия S_3^o .

Шаг 2. Выбор приоритетного критерия $q \in K$.

Из теории известно, что в оптимальной точке X^o всегда имеется два наиболее противоречивых критерия, $q \in K$ и $p \in K$, для которых в относительных единицах выполняется точное равенство:

$$\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_p(X^o), q, p \in K, X \in S,$$

а для остальных выполняется неравенства:



$$\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), \forall k \in K, q \neq p \neq k.$$

В модели материала (6.30)-(6.35) и соответствующей λ -задачи (6.42)-(6.48) такими критериями являются второй и третий: $\lambda^o = \lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o) = 0.6087$, т.е. выполняется числовая симметрия.

Как правило, из этой пары $\lambda^o = \lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o) = 0.6087$ противоречивых критериев выбирается критерий, который ЛПР хотел бы улучшить. Такой критерий называется «приоритетным критерием», обозначим его $q = 3 \in K$. Этот критерий исследуется во взаимодействии с первым критерием $q = 1 \in K$. Мы исследуем эти два критерия из всего множества критериев $K = 4$, показанных на рис. 3.

Дальнейшие шаги расчета представим на примере третьей функции (критерия).

Выбор приоритетного критерия:

На дисплей выдается общая информация для принятия решений:

$$\text{Критерии в точке оптимума } X^o: FX^o = 363.968 \ 1790.681 \ 194.2795 \ 47.5045. \quad (6.81)$$

$$\text{Относительные оценки в } X^o: LX^o = 0.73718 \ 0.60874 \ 0.60874 \ 0.60874. \quad (6.82)$$

$$\text{Антиоптимум: } Y_1^0 = \{y_1 = 31.9, y_2 = 59, y_3 = 2.1, y_4 = 7.0\}, h_1^0 = h_1(Y_1^0) = 296.6.$$

ВЫВОД: Критерии 2, 3, 4 наиболее противоречивы, из них выбираем приоритетный. В данном разделе исследуется третий критерий (функция) $q = 3 \in K$.

На дисплей выдается сообщение:

$q = \text{input}(\text{'Введите приоритетный критерий (номер) } q = \text{'}) - \text{Ввели критерий } q = 3.$

Шаг 3. Определяются числовые пределы изменения величины приоритета критерия $q = 3 \in K$. Для приоритетного критерия $q = 3 \in K$ определяются изменения числовых пределов в натуральных единицах при переходе из точки оптимума X^o (6.49) в точку X_q^* , полученную на первом шаге. Данные о критерии $q = 3$ выдаются на экран:

$$f_q(X^o) = 194.27 \leq f_q(X) \leq 210.35 = f_q(X_q^*), q \in K. \quad (6.83)$$

В относительных единицах критерий $q = 3$ изменяется в следующих пределах:

$$\lambda_q(X^o) = 0.6087 \leq \lambda_q(X) \leq 1 = \lambda_q(X_q^*), q = 3 \in K. \text{ Эти данные анализируются.}$$

Шаг 4. Выбор величины приоритетного критерия $q \in K$. (Decision-making).

На сообщение: «Введите величину приоритетного критерия $f_q =$ » - вводим, например, $f_q = 200$.

Шаг 5. Вычисляется относительная оценка.

Для выбранной величины приоритетного критерия $f_q = 200$ вычисляется относительная оценка: $\lambda_q = \frac{f_q - f_q^0}{f_q^* - f_q^0} = \frac{200 - 194.27}{210.35 - 194.27} = 0.7479$,

которая при переходе от точки X^o к точке X_q^* лежит в пределах:

$$0.6087 = \lambda_3(X^o) \leq \lambda_3 = 0.7489 \leq \lambda_3(X_q^*) = 1, q \in K, \quad (6.84)$$

Шаг 6. Вычислим коэффициент линейной аппроксимации

Предполагая линейный характер изменения критерия $f_q(X)$ в (6.83) и соответственно относительной оценки λ_q в (6.84), используя стандартные приемы линейной аппроксимации, вычислим коэффициент пропорциональности между $\lambda_q(X^o)$, λ_q , который назовем ρ :

$$\rho = \frac{\lambda_q - \lambda_q(X^o)}{\lambda_q(X_q^*) - \lambda_q(X^o)} = \frac{0.7489 - 0.6087}{1 - 0.6087} = 0.3558, q = 3 \in K. \quad (6.85)$$

Шаг 7. Вычислим координаты точки приоритета критериев с размерностью f_q .

Предполагая линейный характер изменения вектора $X^q = \{x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4\}$, $q = 3$ определим координаты для точки с $f_q = 200$ с относительной оценкой (80):

$$\begin{aligned} x_{\lambda=0.74}^{q=3} &= \{x_1 = X^o(1) + \rho(X_q^*(1) - X^o(1)), \\ x_2 &= X^o(2) + \rho(X_q^*(2) - X^o(2)), \\ x_3 &= X^o(3) + \rho(X_q^*(3) - X^o(3)), \\ x_4 &= X^o(4) + \rho(X_q^*(4) - X^o(4))\}, \end{aligned} \quad (6.86)$$

$$\text{где } X^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2\},$$

$$X_q^* = \{x_1 = 31.9, x_2 = 59.00, x_3 = 2.1, x_4 = 7.0\}.$$



Как результат решения мы получим точку с координатами:

$$X^q = \{x_1 = 39.63, x_2 = 52.91, x_3 = 3.54, x_4 = 3.907\}. \quad (6.87)$$

Шаг 8. Вычисление главных показателей точки X^q .

Для полученной точки X^q , вычислим:

$$\text{все критерии в натуральных единицах } f_k(X^q) = \{f_k(X^q), k = \overline{1, K}\}, \\ f(X^q) = \{f_1(X^q) = 344.3, f_2(X^q) = 2000, f_3(X^q) = 199, f_4(X^q) = 41.7\}; \quad (6.88)$$

все относительные оценки критериев:

$$\lambda^q = \{\lambda_k^q, k = \overline{1, K}\}, \lambda_k(X^q) = \frac{f_k(X^q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}: \\ \lambda_k(X^q) = \{\lambda_1(X^q) = 0.5224, \lambda_2(X^q) = 0.418, \lambda_3(X^q) = 0.7244, \lambda_4(X^q) = 0.7446\}; \quad (6.89)$$

минимальная относительная оценка: $\min_{k \in K} \lambda_k(X^q) = \min(\lambda_k(X^q)) = 0.418$.

$$P^q = [p_1^3 = 1.3868, p_2^3 = 1.7333, p_3^3 = 1.0, p_4^3 = 0.973];$$

вектор приоритетов $P^q(X) = \{p_k^q = \frac{\lambda_k(X^q)}{\lambda_k(X^q)}, k = \overline{1, K}\}$:

$$\lambda_k(X^q) * P^q = \{p_1^3 * \lambda_1(X^q) = 0.7244, \\ p_2^3 * \lambda_2(X^q) = 0.7244, \\ p_3^3 * \lambda_3(X^q) = 0.7244, \\ p_4^3 * \lambda_4(X^q) = 0.7244\}$$

минимальная относительная оценка:

$$\lambda^{oo} = \min(p_1^3 \lambda_1(X^q), p_2^3 \lambda_2(X^q), p_3^3 \lambda_3(X^q), p_4^3 \lambda_4(X^q)) = 0.7244$$

Аналогично другие точки из области Парето $X_t^o = \{\lambda_t^o, X_t^o\} \in S^o$ могут быть получены.

4.4.2.k3. Анализ результатов решения векторной задачи математического программирования - модели инженерной системы при заданном приоритете третьего критерия.

Рассчитанная в (6.88) величина третьего критерия при заданном приоритете $f_q(X_t^o) = 199, q = 3 \in K, q \in K$ обычно не равна заданной $f_q = 200$. Ошибка выбора $\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q| = |199 - 200| = 1.0$ определяется ошибкой линейной аппроксимации: $\Delta f_{q\%} = 0.5\%$. Если ошибка $\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q| = |199 - 200| = 1.0$, измеренная в натуральных единицах или в процентах $\Delta f_{q\%} = \frac{\Delta f_q}{f_q} * 100 = 0.5\%$, больше заданной $\Delta f, \Delta f_q > \Delta f$, то переходим к шагу 2, если $\Delta f_q \leq \Delta f$, то вычисления завершаются. **Конец.**

В процессе моделирования могут быть изменены параметрические ограничения и функции, т. е. получено некоторое множество оптимальных решений. Из этого множества оптимальных решений выбираем окончательный вариант (процесс принятия решений). В нашем примере окончательный вариант включает параметры:

$$X^o = \{X^o, \lambda^o\} = \{X^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2\}, \lambda^o = 0.6087\}; \quad (6.90)$$

параметры структуры материала при заданном приоритете критерия:

$$q=3: X^q = \{x_1 = 39.63, x_2 = 52.91, x_3 = 3.54, x_4 = 3.907\}.$$

4.4.3.k3. Геометрическая интерпретация результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по третьему приоритетному критерию в относительных единицах.

Для геометрической интерпретации результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров решения векторной задачи по третьему приоритетному критерию в относительных единицах сформируем рис. 5k3.

Аналогично рис. 4, сформируем относительные оценки четырех критериев в точке оптимума $Y_k^* \lambda_k(Y_k^*), k = \overline{1, K}$ (черный цвет) и $\lambda_k^A(X_k^*) = 1, k = \overline{1, K}$ (красный цвет) и представим их рис. 5k3.



Относительные оценки с приоритетом третьего критерия в точке оптимума $X_{q=3}$
 $\lambda_k(X_{q=3}) = \frac{f_k(X_{q=3}) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}$: $\lambda_k(X_{q=3}) = \{\lambda_1(X_{q=3}) = 0.52235, \lambda_2(X_{q=3}) = 0.41795, \lambda_3(X_{q=3}) = 0.72444, \lambda_4(X_{q=3}) = 0.74456\}$;

Результаты решения показывают, что математические результаты полностью совпадают с геометрическими.

4.4.4.k3. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – модели структуры материала при проектировании с приоритетом третьего критерия в трехмерной системе координат в физических единицах.

Исходной информацией для геометрической интерпретации результатов решения векторной задачи (ВЗМП) с приоритетом третьего критерия являются:

параметры точки оптимума при равнозначных критериях:

$X^0 = \{X^0, \lambda^0\} = \{Y^0 = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2\}, \lambda^0 = 0.6087\}$,

рассчитанной на пятом шаге алгоритма в двухмерной системе координат x_1, x_2 (см. Рис. 1) и представленной в трехмерной системе координат x_1, x_2 и λ в относительных единицах на рис. 2, 3, 4 при проектировании.

Исследуем и представим параметры последовательно для каждой характеристики структуры материала (критерия): $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$ в **физических единицах**.

1. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – первой характеристики $f_1(X)$ с приоритетом третьего критерия при проектировании в физических единицах.

На Рис. 6.k3 исследованы: точки оптимума X_3^* , $X_{q=3}$, с соответствующими относительными оценками $\lambda_1(X_3^*)$, $\lambda_1(X_{q=3})$, а также линейные функции $\lambda^0 \lambda_1(X_{q=3}) - \lambda_1^\Delta(X_3^*)$ в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_1(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Первая характеристика структуры материала $h_1(X)$ (6.30) сформирована в 4.1.4:
 $\max h_1(X) \equiv 323.84 - 2.25y_1 - 3.49y_2 + 10.72y_3 + 13.124y_4 + 0.0968y_1y_2 - 0.062y_1y_3 - 0.169y_1y_4 + 0.0743y_2y_3 - 0.1y_2y_4 - 0.0036y_3y_4 + 0.0143y_1^2 + 0.0118y_2^2 - 0.2434y_3^2 - 0.5026y_4^2$,

Представим геометрическую интерпретацию функции $h_1(Y)$ в физических единицах с переменными координатами $\{y_1, y_3\}$ и с постоянными координатами $\{y_2 = 49.54, y_4 = 2.2\}$ на рис. 6k3.

Координаты точки и функция первого критерия на **максимум**:

$Y_1^* = \{y_1 = 46.56, y_2 = 43.23, y_3 = 8.0, y_4 = 2.2\}, h_1^* = h_1(Y_1^*) = -387.9$ при расчете по четырем переменным. На рисунке обозначена как $f_1^\Delta(X_1^*) = -387.9$;

$Y_1^* = \{y_1 = 46.5676, y_3 = 8.0\}$ (на рис. 6k1 обозначена как X_1^*). В двухмерной системе координат y_1, y_3 величина целевой функции $h_1^* = f_1(X_1^*) = 403.6$. (Черный цвет).

Координаты точки и функция первого критерия на **минимум**:

В точке $X_1^0 = \{x_1 = 31.9, x_3 = 2.1\}$ величина целевой функции $F_1^0 = f_1(X_1^0) = 303.66$.

Величина целевой функции в четырехмерной системе координат $f_1^\Delta(X_1^0) = 296.59$.

Координаты точки и функция первого критерия **при равнозначных критериях**:

Координаты точки $X^0 = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$, целевая функция $f_1(X^0) = 363.96$.



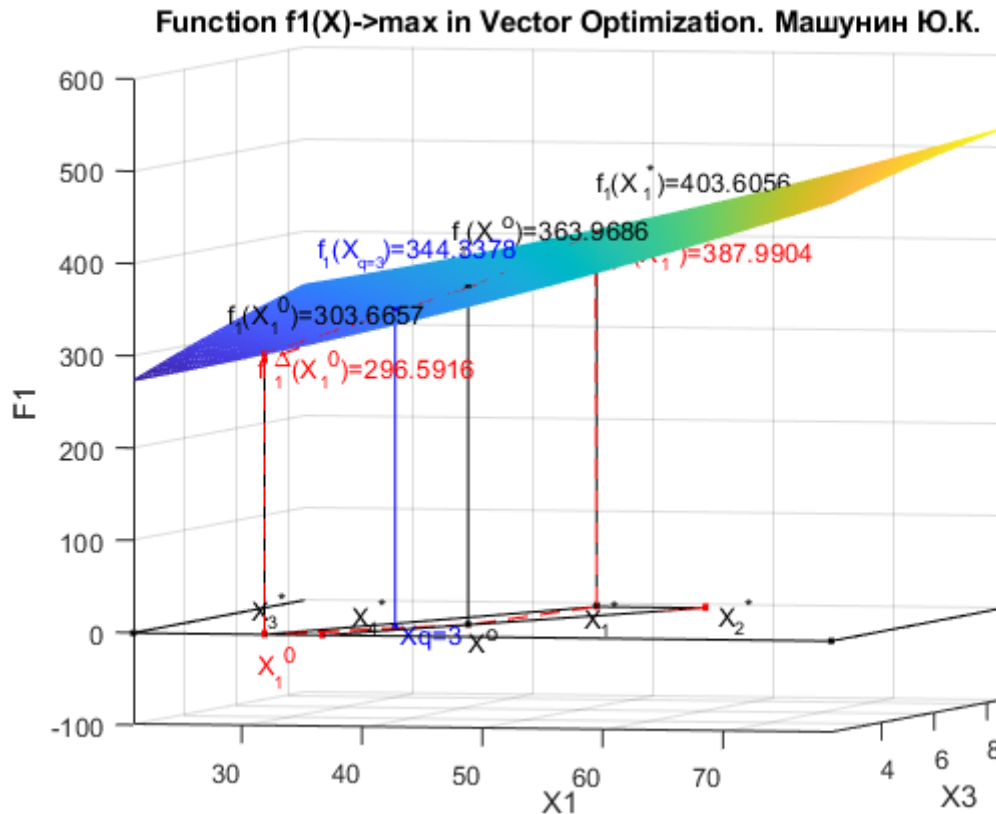


Рис. 6.к3. Функция $f_1(X)$ с приоритетом третьего критерия в двухмерной системе координат $x_1 x_3$ и геометрическая интерпретация функции $f_1(X)$ в системе координат $x_1 x_2 x_3 x_4$

Относительная оценка с приоритетом третьего критерия в точке оптимума $X_{q=3}$:

$\lambda_1(X_{q=3}) = \frac{f_1(X_{q=3}) - f_1^0}{f_1^* - f_1^0} = 0.72444$. В физических единицах величина третьего критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=3}$ равна $f_1(X_{q=3}) = 344.83$ (Фиолетовый цвет).

Линейная функция, соединяющая точки $f_1(X^0)$ и $f_1^\Delta(X_1^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_1(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

А в целом отрезки $f_1^\Delta(X_1^*) - f_1(X^0) - f_1^\Delta(X_1^0)$ представляют геометрическую интерполяцию функции $f_1(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

2. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – второй характеристики $f_2(X)$ с приоритетом третьего критерия структуры материала при проектировании в физических единицах.

На Рис. 7.к3 исследованы: точки оптимума X_2^* , $X_{q=3}$, и относительными оценками $\lambda_2(X_2^*)$ $\lambda_2(X_{q=3})$; функции $\lambda^0 \lambda_2(X_{q=3}) - \lambda_2^\Delta(X_2^*) \lambda^0$ в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_2(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Вторая характеристика структуры материала $h_2(X)$ (6.32) сформирована в 4.1.4:

$$\min f_2(X) \equiv 795.72 + 23.89x_1 + 30.866x_2 - 25.8586x_3 - 45.0026x_4 - 0.7683x_1x_2 + 0.4703x_1x_3 + 0.7472x_1x_4 - 0.1283x_2x_3 + 0.3266x_2x_4 - 0.0112x_3x_4 + 0.0398x_1^2 + 0.0365x_2^2 + 3.2x_3^2 + 2.6457x_4^2.$$

Представим геометрическую интерпретацию функцию $h_2(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1 x_3\}$ и с постоянными координатами $\{y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки Y^0 на рис. 7.к3.

Координаты точки и функция второго критерия на **оптимум (минимум)**:

$$Y_2^* = \{y_1 = 55.60, y_2 = 34.19, y_3 = 8.0, y_4 = 2.2\}, h_2^* = h_2(X_2^*) = 1361.4$$

при расчете по четырем переменным. На рисунке обозначена как $f_2^\Delta(X_2^*) = 1361.41$.

$Y_2^* = \{x_1 = 55.6, x_3 = 8.0\}$ (на рис. 7к3 обозначена как X_2^*). В двухмерной системе координат y_1, y_3 величина целевой функции равна $h_2^* = f_2(X_2^*) = 1193.56$. (Черный цвет).

Координаты точки **минимума** (Наихудшее решение – максимальное) в точке $X_2^0 = \{x_1 = 31.9, x_3 = 2.1\}$ величина целевой функции $F_2^0 = f_2(X_2^0) = 2207.2$.

Величина целевой функции в четырехмерной системе координат $f_2^\Delta(X_2^0) = 2458.5$.



Координаты точки и функция второго критерия **при равнозначных критериях**:
Координаты точки $X^0 = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.34\}$. Величина целевой функции $f_2(X^0) = 1790.6$.

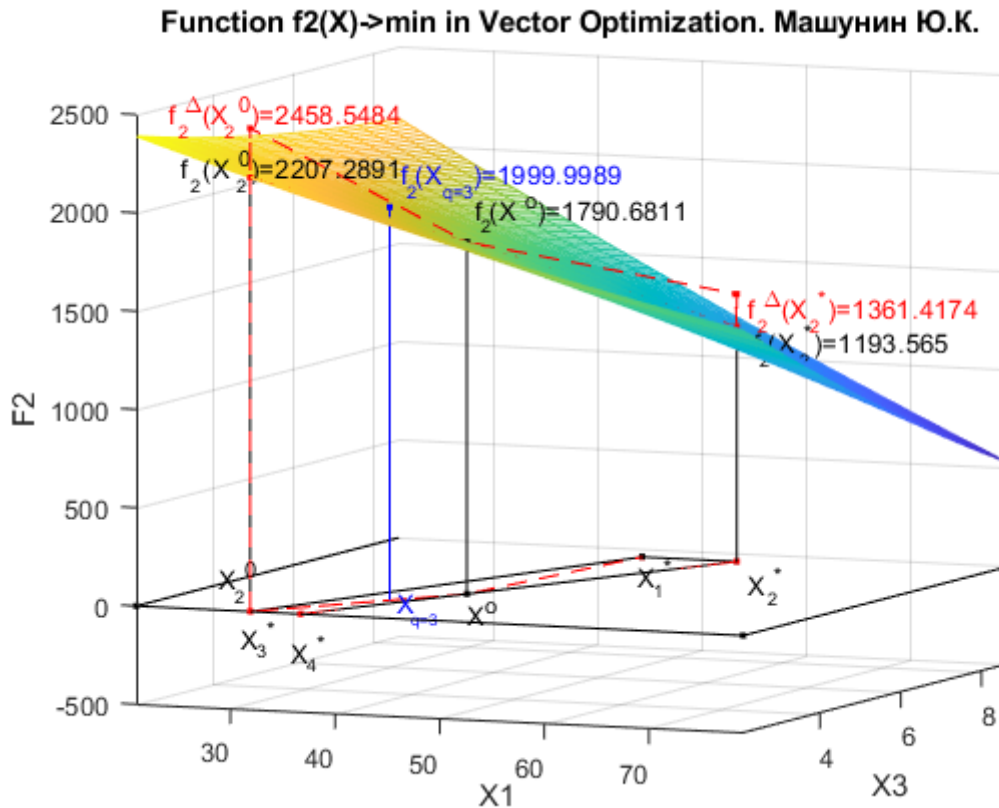


Рис. 7.k3. Функция $f_2(X)$ с приоритетом третьего критерия в двухмерной системе координат $x_1 x_3$ и геометрическая интерпретация функции $f_2(X)$ в системе координат $x_1 x_2 x_3 x_4$

Относительная оценка с приоритетом первого критерия в точке оптимума $X_{q=1}$ второго критерия: $\lambda_2(X_{q=3}) = \frac{f_2(X_{q=3}) - f_2^0}{f_2^* - f_2^0} = 0.41795$. В физических единицах величина первого критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=1}$ равна $f_2(X_{q=3}) = 1999.99$. (Показана фиолетовым цветом).

Линейная функция, соединяющая точки $f_2(X^0)$ и $f_2^\Delta(X_2^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_2(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$. А в целом отрезки $f_2^\Delta(X_2^*) - f_2(X^0) - f_2^\Delta(X_2^0)$ представляют геометрическую интерполяцию функции $f_2(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

3. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – третьей характеристики $f_3(X)$ с приоритетом третьего критерия структуры материала при проектировании в физических единицах.

На Рис. 8.k3 исследованы: точки оптимума X_3^* , $X_{q=2}$, с соответствующими относительными оценками $\lambda_3(X_3^*)$, $\lambda_3(X_{q=3})$, а также линейные функции $\lambda^0 \lambda_3(X_{q=3}) - \lambda_3^\Delta(X_3^*)$ в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_3(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Третья характеристика структуры материала $h_3(X)$ (6.31) сформирована в 4.1.4:

$$\max h_3(Y) \equiv 110.22 + 0.7918y_1 + 1.73y_2 - 0.3713y_3 - 2.20y_4 - 0.0132y_1y_2 - 0.008y_1y_3 + 0.0193y_1y_4 - 0.0172y_2y_3 + 0.0161y_2y_4 - 0.0006y_3y_4 - 0.0004y_1^2 - 0.0002y_2^2 + 0.0335y_3^2 + 0.124y_4^2\}.$$

Представим геометрическую интерпретацию функции $h_3(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1 x_3\}$ и с постоянными координатами $y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки Y^0 (79) на рис. 8.k3.

Координаты точки и функция третьего критерия на **максимум**:

$Y_3^* = \{y_1 = 31.90, y_2 = 59.00, y_3 = 2.1, y_4 = 7.0\}$, $h_3^* = h_3(Y_3^*) = -210.35$ при расчете по четырем переменным. На рис. 8.k3 обозначена как $f_3^\Delta(X_3^*) = -210.35$

$Y_3^* = \{x_1 = 31.9, x_3 = 2.1\}$ (на рис. 8.k3 обозначена как X_3^*). В двухмерной системе координат y_1, y_3 величина целевой функции равна $h_3^* = f_3(X_3^*) = 195.73$. (Черный цвет) Величина целевой функции $F_3^* = 210.3$.

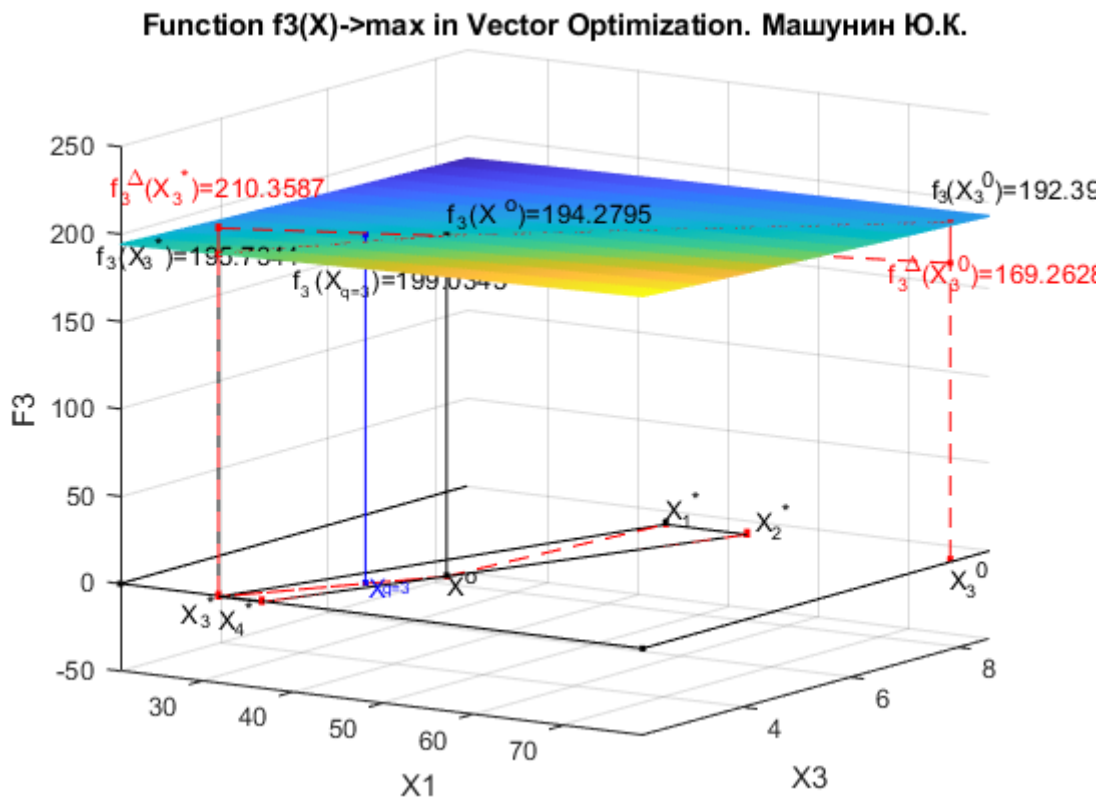


Рис. 8.k3. Функция $f_3(X)$ с приоритетом третьего критерия в двухмерной системе координат $x_1 x_3$ и геометрическая интерпретация функции $f_3(X)$ в системе координат $x_1 x_2 x_3 x_4$

Координаты точки **минимума** $X_3^0 = \{x_1 = 78.16, x_3 = 8.0\}$ (на рис. 8.k3. Величина целевой функции $f_3^0 = 192.39$, $f_3^\Delta(X_3^*) = 169.26$ (красный цвет).

Координаты точки и функция третьего критерия **при равнозначных критериях**:

Координаты точки $X^0 = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$. Величина целевой функции $f_3(X^0) = 194.27$.

Относительная оценка с приоритетом первого критерия в точке оптимума $X_{q=3}$ третьего критерия: $\lambda_3(X_{q=3}) = \frac{f_3(X_{q=3}) - f_3^0}{f_3^* - f_3^0} = 0.72444$. В физических единицах величина третьего критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=3}$ равна $f_3(X_{q=3}) = 199.08$ – близка к исследуемой величине $f_3(X) = 200$. (Показана фиолетовым цветом).

Линейная функция, соединяющая точки $f_3(X^0)$ и $f_3^\Delta(X_3^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_3(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

А в целом отрезки $f_3^\Delta(X_1^*) - f_3(X^0) - f_3^\Delta(X_3^0)$ представляют геометрическую интерпретацию функции $f_3(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

4. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – четвертой характеристики $f_4(X)$ с приоритетом третьего критерия структуры материала при проектировании в физических единицах.

На Рис. 9.k3 исследованы: точки оптимума X_4^* , $X_{q=3}$, с соответствующими относительными оценками $\lambda_4(X_4^*)$, $\lambda_4(X_{q=3})$, а также линейные функции $\lambda^0 \lambda_4(X_{q=3}) - \lambda_4^\Delta(X_4^*)$ λ^0 в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_4(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Четвертая характеристика структуры материала $h_4(X)$ (6.34) сформирована в 4.1.4:

$$\max h_4(Y) \equiv 21.004 - 0.0097y_1 - 0.841y_2 - 0.4326y_3 + 1.1723y_4 + 0.166y_1y_2 + 0.085y_1y_3 - 0.0001y_1y_4 + 0.0523y_2y_3 + 0.0002y_2y_4 + 0.0006y_3y_4 - 0.0022y_1^2 + 0.0035y_2^2 + 0.006y_3^2 - 0.0311y_4^2\}.$$

Представим геометрическую интерпретацию функцию $f_4(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1, x_3\}$ и с постоянными координатами $y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки Y^0 на рис. 9.k3.

Координаты точки и функция четвертого критерия на **максимум**:

$Y_4^* = \{y_1 = 36.70, y_2 = 59.00, y_3 = 2.1, y_4 = 2.2\}$, $h_4^* = h_4(Y_4^*) = 30.714$ при расчете по четырем переменным. На рис. 9.k3 обозначена как $f_4^\Delta(X_4^*) = 30.714$

$X_4^* = \{x_1 = 36.70, x_3 = 2.1\}$ (на рис. 9.k3 обозначена как X_4^*). В двухмерной системе координат y_1, y_3 величина целевой функции равна $h_4^* = f_4(X_4^*) = 28.302$. (Черный цвет) Величина целевой функции $F_4^* = 30.714$.

Координаты точки и функция четвертого критерия **минимума** $X_4^0 = \{x_1 = 62.71, x_3 = 8\}$. Величина целевой функции $f_4^0 = f_4(X_4^0) = -73.62$.

Координаты точки $X^0 = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$ (на рис. 9.k3 обозначена как X^0). Величина целевой функции $f_4(X^0) = 47.5$.

Относительная оценка с приоритетом третьего критерия в точке оптимума $X_{q=3}$ четвертого критерия: $\lambda_4(X_{q=3}) = \frac{f_4(X_{q=3}) - f_4^0}{f_4^* - f_4^0} = 0.74456$. В физических единицах величина четвертого критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=1}$ равна $f_4(X_{q=1}) = 57.254$. (Показана фиолетовым цветом).

Координаты точки **максимума** $X_4^* = \{x_1 = 36.70, x_3 = 2.1\}$ (на рис. 11 обозначена как $X_{4\text{max}}$). Величина целевой функции $F_4^* = FX_{4\text{max}} = 30.714$.

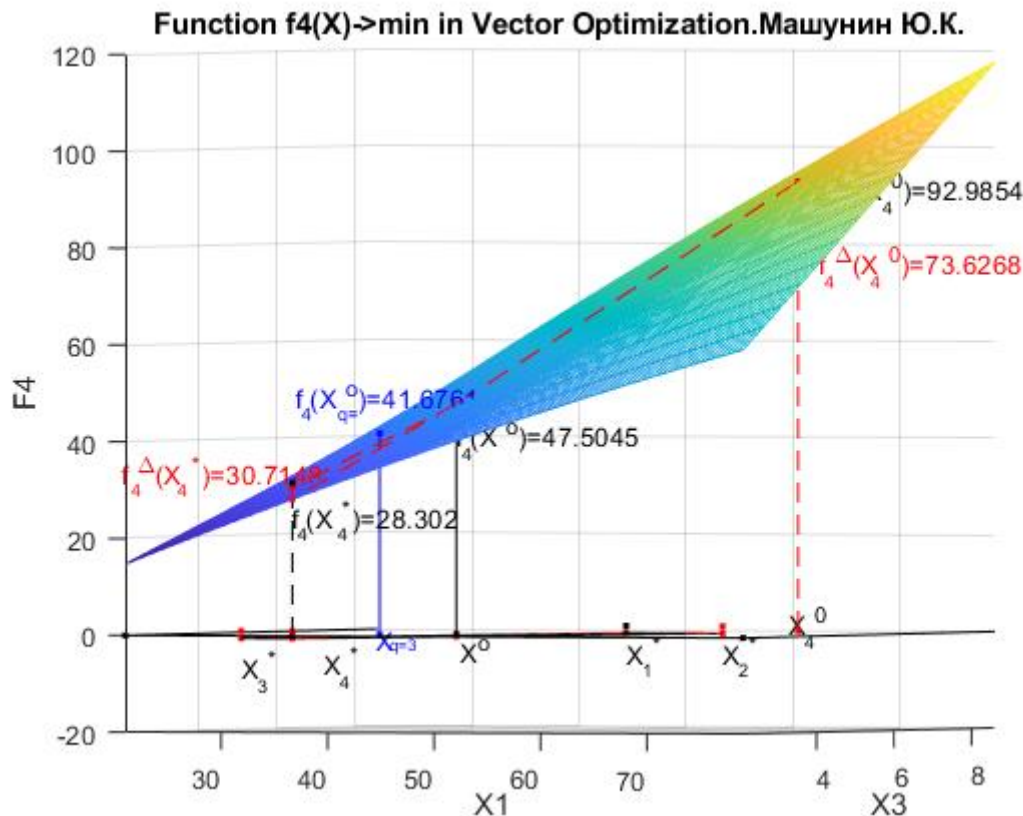


Рис. 9.k3. Функция $f_4(X)$ с приоритетом третьего критерия в двухмерной системе координат x_1, x_3 и геометрическая интерпретация функции $f_4(X)$ в системе координат x_1, x_2, x_3, x_4

Заключение по разделу: критерий k3.

В разделе рассмотрена и решена проблема (фрагмент) разработки и принятия управленческого решения условиях неопределенности в сложной инженерной системы (структуры материала). Проведен анализ результатов решения ВЗМП при заданном приоритете третьего критерия, представлена геометрическая интерпретация результатов решения при проектировании в трехмерной системе координат четырех характеристик (критериев), как в относительных единицах, так и в физических единицах.

4.4. Блок 4.k4. Исследование, выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы (структура материала) по четвертому приоритетному критерию, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП.

В разделе представлено решение векторной задачи математического программирования - модели сложной инженерной системы (структуры материала) при заданном **приоритете четвертого критерия** на базе многомерной математики.

Проведен анализ результатов решения ВЗМП при заданном приоритете четвертого критерия и представлена геометрическая интерпретация результатов решения при проектировании в трехмерной системе координат **в относительных единицах**.

Представлена геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП с приоритетом четвертого критерия при проектировании в трехмерной системе координат **в физических единицах**.

4.4.1.k4. Решение ВЗМП - модели сложной инженерной системы (структуры материала) при заданном приоритете четвертого критерия в многомерной математике. (решение обратной задачи).

Лицом, принимающим решения, как правило, является конструктор системы.

Шаг 1. Решение векторной задачи при равнозначных критериях. Алгоритм решения векторной задачи представлен на блок 2 – 5, 6 этап. Численные результаты решения векторной задачи представлены выше.

Множество точек оптимальных по Парето $S^0 \subset S$, представленных на рис.1, находится между оптимальными точками $X_1^* X_{13}^0 X_3^* X_{34}^0 X_4^* X_{42}^0 X_{21}^0 X_1^*$ (на рисунках вместо Y используется X). Мы проведем анализ множества точек Парето $S^0 \subset S$. Для этой цели мы соединим вспомогательные точки: $X_{13}^0 X_{34}^0 X_{42}^0 X_{21}^0$ с точкой X^0 , которая условно представляет центр множества Парето. В результате получили четыре подмножества точек $X \in S_q^0 \subset S^0 \subset S, q = \overline{1,4}$. Первое подмножество $S_1^0 \subset S^0 \subset S$ выделенное точками $X_1^* X_{13}^0 X^0 X_{12}^0 X_1^*$ характеризуется тем, что относительная оценка $\lambda_1 \geq \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, то есть в поле первого критерия S_1^0 имеет приоритет над остальными. Подобно S_{21}^0 подмножества точек S_2^0, S_3^0, S_4^0 - характеризуется тем, что, где второй, третий и четвертый критерий имеет приоритет над другими соответственно. Множество точек, оптимальных по Парето, будем обозначать $S^0 = S_1^0 \cup S_2^0 \cup S_3^0 \cup S_4^0$. Координаты всех полученных точек и относительные оценки представлены в двумерном пространстве $\{x_1 x_2\}$ на рис. 1. Эти координаты показаны в трех измеренных пространствах $\{x_1 x_2 \lambda\}$ на рис. 2, где третья ось λ - относительная оценка.

Ограничения набора точек, оптимальных по Парето, на рис. 2 он снижен до -0,5 (чтобы были видимы ограничения). Эта информация также является основой для дальнейшего исследования структуры множества Парето. Лицо, принимающее решения, как правило, является разработчиком инженерной системы.

Если результаты решения векторной задачи с равнозначными критериями не удовлетворяют лицу, принимающее решение, то выбор оптимального решения осуществляется из какого-либо подмножества точек $S_1^0, S_2^0, S_3^0, S_4^0$. Эти подмножества точек Парето показаны на рис. 1 надписью в виде функций $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$.

Шаг 2. Выбор приоритетного критерия $q \in K$.

Из теории известно, что в оптимальной точке X^0 всегда имеется два наиболее противоречивых критерия, $q \in K$ и $p \in K$, для которых в относительных единицах выполняется точное равенство:

$$\lambda^0 = \lambda_q(X^0) = \lambda_p(X^0), q, p \in K, X \in S,$$

а для остальных выполняется неравенства:

$$\lambda^0 \leq \lambda_k(X^0), \forall k \in K, q \neq p \neq k.$$

В модели материала (6.30)-(6.35) и соответствующей λ -задачи (6.42)-(6.48) такими критериями являются второй и третий: $\lambda^0 = \lambda_2(X^0) = \lambda_3(X^0) = 0.6087$, т.е. выполняется числовая симметрия.

Как правило, из этой пары $\lambda^0 = \lambda_2(X^0) = \lambda_3(X^0) = 0.6087$ противоречивых критериев выбирается критерий, который ЛПР хотел бы улучшить. Такой критерий называется «приоритетным критерием», обозначим его $q = 4 \in K$. Этот критерий исследуется во



взаимодействии с четвертым критерием $q = 4 \in K$. Мы исследуем эти два критерия из всего множества критериев $K = 4$, показанных на рис. 3.

Дальнейшие шаги расчета представим на примере четвертой функции (критерия).

Выбор приоритетного критерия:

На дисплей выдается общая информация для принятия решений:

Решение на $\max (f_4(X) - \min) f_4(X) = 30.7$. Наихудшее решение: $f_4(X) = 73.6$.

Критерий $f_4\max=30.7148$ Точка $x_4\max= \{36.7 \ 59 \ 2.1 \ 2.2\}$.

Критерий в точке оптимума X^0 : $FX_0=363.968 \ 1790.681 \ 194.2795 \ 47.5045$ (6.91)

Относительные оценки в X^0 : $LX_0=0.73718 \ 0.60874 \ 0.60874 \ 0.60874$ (6.92)

Антиоптимум: $Y_1^0 = \{y_1 = 31.9, y_2 = 59, y_3 = 2.1, y_4 = 7.0\}, h_1^0 = h_1(Y_1^0) = 296.6$.

ВЫВОД: Критерии 1, 2, 3 наиболее противоречивы, из них выбираем приоритетный. В данном разделе исследуется четвертый критерий (функция) $q = 4 \in K$.

На дисплей выдается сообщение:

$q=\text{input('Введите приоритетный критерий (номер) } q=')$ – Ввели критерий $q=4$.

Шаг 3. Определяются числовые пределы изменения величины приоритета критерия $q = 4 \in K$. Для приоритетного критерия $q = 4 \in K$ определяются изменения числовых пределов в натуральных единицах при переходе из точки оптимума X^0 (6.49) в точку X_q^* , полученную на первом шаге. Данные о критерии $q=4$ выдаются на экран:

$$f_q(X^0) = 47.5045 \leq f_q(X) \leq 30.7148.35 = f_q(X_q^*), q \in K. \quad (6.93)$$

В относительных единицах критерий $q=4$ изменяется в следующих пределах:

$$\lambda_q(X^0) = 0.6087 \leq \lambda_q(X) \leq 1 = \lambda_q(X_q^*), q = 4 \in K. \text{ Эти данные анализируются.}$$

Шаг 4. Выбор величины приоритетного критерия $q \in K$. (Decision-making).

На сообщение: «Введите величину приоритетного критерия $f_q=$ » - вводим, например, $f_q=40$.

Шаг 5. Вычисляется относительная оценка.

Для выбранной величины приоритетного критерия $f_q = 40$ вычисляется относительная оценка: $\lambda_q = \frac{f_q - f_q^0}{f_q^* - f_q^0} = \frac{40 - 73.6}{30.71 - 73.6} = 0.7836$,

которая при переходе от точки X^0 к точке X_q^* лежит в пределах:

$$0.6087 = \lambda_4(X^0) \leq \lambda_4 = 0.7836 \leq \lambda_4(X_q^*) = 1, q \in K, \quad (6.94)$$

Шаг 6. Вычислим коэффициент линейной аппроксимации.

Предполагая линейный характер изменения критерия $f_q(X)$ в (6.93) и соответственно относительной оценки λ_q в (6.94), используя стандартные приемы линейной аппроксимации, вычислим коэффициент пропорциональности между $\lambda_q(X^0)$, λ_q , который назовем ρ :

$$\rho = \frac{\lambda_q - \lambda_q(X^0)}{\lambda_q(X_q^*) - \lambda_q(X^0)} = \frac{0.7836 - 0.6087}{1 - 0.6087} = 0.4470, q = 4 \in K. \quad (6.95)$$

Шаг 7. Вычислим координаты точки приоритета критериев с размерностью f_q .

Предполагая линейный характер изменения вектора $X^q = \{x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4\}$, $q = 3$ определим координаты для точки с $f_q = 40$ с относительной оценкой (80):

$$\begin{aligned} x_{\lambda=0.74}^{q=3} &= \{x_1 = X^0(1) + \rho(X_q^*(1) - X^0(1)), \\ x_2 &= X^0(2) + \rho(X_q^*(2) - X^0(2)), \\ x_3 &= X^0(3) + \rho(X_q^*(3) - X^0(3)), \\ x_4 &= X^0(4) + \rho(X_q^*(4) - X^0(4))\}, \end{aligned} \quad (6.96)$$

где $X^0 = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2\}$,

$$X_4^* = \{x_1 = 43.9022, x_2 = 49.5492, x_3 = 4.3486, x_4 = 2.2\}.$$

Как результат решения мы получим точку с координатами:

$$X^q = \{x_1 = 40.6830, x_2 = 53.7734, x_3 = 3.3435, x_4 = 2.2\}.$$

Шаг 8. Вычисление главных показателей точки X^q .

Для полученной точки X^q , вычислим:

$$\text{все критерии в натуральных единицах } f_k(X^q) = \{f_k(X^q), k = \overline{1, K}\},$$



$$f(X^q) = \{f_1(X^q) = 351.0, f_2(X^q) = 1963.8, f_3(X^q) = 200.1, f_4(X^q) = 40.2\};$$

все относительные оценки критериев:

$$\lambda^q = \{\lambda_k^q, k = \overline{1, K}\}, \lambda_k(X^q) = \frac{f_k(X^q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K};$$

$$\lambda_k(X^q) = \{\lambda_1(X^q) = 0.5950, \lambda_2(X^q) = 0.4508, \lambda_3(X^q) = 0.7504, \lambda_4(X^q) = 0.7800\};$$

$$\text{минимальная относительная оценка: } \min \lambda(X^q) = \min_{k \in K} (\lambda_k(X^q)) = 0.4508.$$

$$P^q = [p_1^4 = 1.3109, p_2^4 = 1.7297, p_3^4 = 1.0394, p_4^4 = 1.0];$$

$$\text{вектор приоритетов } P^q(X) = \{p_k^q = \frac{\lambda_k(X^q)}{\lambda_k(X^q)}, k = \overline{1, K}\};$$

$$\begin{aligned} \lambda_k(X^q) * P^q &= \{p_1^4 * \lambda_1(X^q) = 0.78, \\ p_2^4 * \lambda_2(X^q) &= 0.78, \\ p_3^4 * \lambda_3(X^q) &= 0.78, \\ p_4^4 * \lambda_4(X^q) &= 0.78\} \end{aligned}$$

минимальная относительная оценка:

$$\lambda^{oo} = \min(p_1^4 \lambda_1(X^q), p_2^4 \lambda_2(X^q), p_3^4 \lambda_3(X^q), p_4^4 \lambda_4(X^q)) = 0.78$$

Аналогично другие точки из области Парето $X_t^o = \{\lambda_t^o, X_t^o\} \in S^o$ могут быть получены.

4.4.2.k4. Анализ результатов решения векторной задачи математического программирования - модели инженерной системы при заданном приоритете критерия.

Рассчитанная величина $f_q(X_t^o) = 40.2, q = 4 \in K, q \in K$ обычно не равна заданной $f_q = 40$. Ошибка выбора $\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q| = |40.2 - 40| = 0.20$ определяется ошибкой линейной аппроксимации: $\Delta f_{q\%} = 0.5\%$.

Если ошибка $\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q| = |40.2 - 40| = 0.20$, измеренная в натуральных единицах или в процентах $\Delta f_{q\%} = \frac{\Delta f_q}{f_q} * 100 = 0.5\%$, больше заданной $\Delta f, \Delta f_q > \Delta f$, то переходим к шагу 2, если $\Delta f_q \leq \Delta f$, то вычисления завершаются. **Конец.**

В процессе моделирования могут быть изменены параметрические ограничения (6.38) и функции, т. е. получено некоторое множество оптимальных решений. Из этого множества оптимальных решений выбираем окончательный вариант (процесс принятия решений). В нашем примере окончательный вариант включает параметры:

$$X^o = \{X^o, \lambda^o\} = \{X^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2\}, \lambda^o = 0.6087\};$$

параметры структуры материала при заданном приоритете критерия:

$$q=4: X^q = \{x_1 = 40.6830, x_2 = 53.7734, x_3 = 3.3435, x_4 = 2.2\}.$$

4.4.3.k4. Геометрическая интерпретация результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по четвертому приоритетному критерию в относительных единицах.

Для геометрической интерпретации результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров решения векторной задачи по четвертому приоритетному критерию в относительных единицах сформируем рис. 5k3.

Аналогично рис. 4, сформируем относительные оценки четырех критериев в точке оптимума $Y_k^* \lambda_k(Y_k^*), k = \overline{1, K}$ (черный цвет) и $\lambda_k^A(X_k^*) = 1, k = \overline{1, K}$ (красный цвет) и представим их рис. 5k3.

На третьем шаге решения ВЗМП с равнозначными критериями в (6.36) в точках оптимума $Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, Y_4^*$ получены величины всех относительных оценок:

$$L(Y^*) = \begin{Bmatrix} L(Y_1^*) \\ L(Y_2^*) \\ L(Y_3^*) \\ L(Y_4^*) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0000 & 0.9245 & 0.3560 & 0.1197 \\ 0.9367 & 1.0000 & 0.1968 & 0.0363 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0000 & 1.011 \\ 0.3669 & 0.2257 & 0.9427 & 1.0000 \end{Bmatrix}$$

Линейная функция, соединяющая точки $\lambda^o = 0.60874$ и $\lambda_4^A(X_4^*)=1$ в относительных единицах характеризует функцию $f_4(X)$ в относительных единицах в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$. Эта линейная функция представляет геометрическую интерпретацию функций $f_4(X)$ в относительных единицах из N-мерного (4-мерного) в двухмерную систему координат. Аналогично исследуются все функции (критерии).



В целом на рис. 5k4 в точке X_4^* показана геометрическая (линейная) интерполяция всех функций (критериев):

$f_1(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_1^A(X_4^*) = 0.36093$;

$f_2(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_2^A(X_4^*) = 0.2257$;

$f_3(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_3^A(X_4^*) = 0.94268$;

$f_4(X)$ и соответствующая относительная оценки $\lambda_4^A(X_4^*) = 1.0$.

Результаты решения показывают, что математические результаты полностью совпадают с геометрическими.

λ -задача Векторная оптимизация: $L1(X), L2(X), L3(X), L4(X)$. Машунин Ю.К.

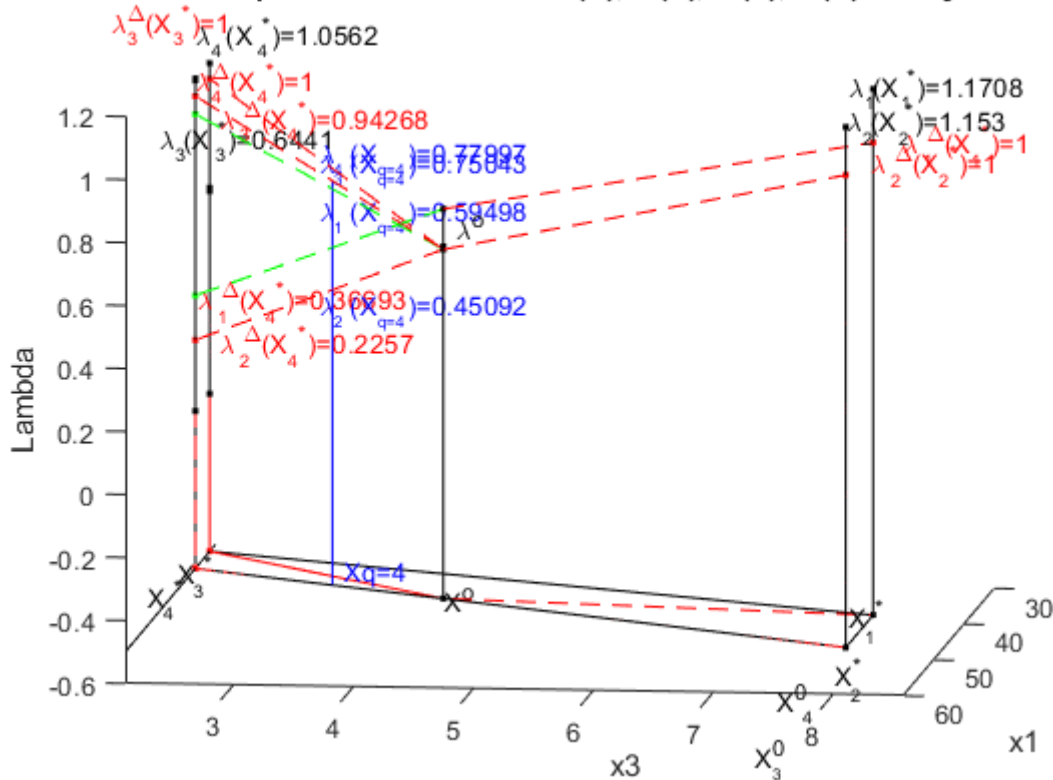


Рис. 5k3. λ -задача в системе координат $x_1 x_3 (= y_1 y_3)$ и λ . Результаты решения:

$\lambda_k^A(X_k^*) = 1, k = \overline{1, K}$; относительные оценки с приоритетом четвертого критерия в точке оптимума $X_{q=4}$: $\lambda_k(X_{q=4}), k = \overline{1, K}$.

4.4.4. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП с приоритетом четвертого критерия – модели структуры материала при проектировании в трехмерной системе координат в физических единицах.

Исходной информацией для геометрической интерпретации результатов решения векторной задачи (ВЗМП) с приоритетом первого критерия являются:

параметры точки оптимума при равнозначных критериях:

$X^o = \{X^o, \lambda^o\} = \{Y^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2\}, \lambda^o = 0.6087\}$,

рассчитанной на пятом шаге алгоритма в двухмерной системе координат x_1, x_2 (см. Рис.

1) и представленной в трехмерной системе координат x_1, x_2 и λ в относительных единицах на рис. 2, 3, 4 при проектировании.

Исследуем и представим параметры последовательно для каждой характеристики структуры материала (критерия): $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$ в физических единицах.

1. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – первой характеристики $f_1(X)$ с приоритетом четвертого критерия при проектировании в физических единицах.

На Рис. 6.k4 исследованы: точки оптимума X_4^* , $X_{q=4}$, с соответствующими относительными оценками $\lambda_4(X_4^*)$ $\lambda_1(X_{q=4})$, а также линейные функции $\lambda^o \lambda_1(X_{q=4}) - \lambda_1^A(X_4^*)$ λ^o в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_1(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

$$\max h_1(X) \equiv 323.84 - 2.25y_1 - 3.49y_2 + 10.72y_3 + 13.124y_4 + 0.0968y_1y_2 - 0.062y_1y_3 - 0.169y_1y_4 + 0.0743y_2y_3 - 0.1y_2y_4 - 0.0036y_3y_4 + 0.0143y_1^2 + 0.0118y_2^2 - 0.2434y_3^2 - 0.5026y_4^2.$$

Представим геометрическую интерпретацию функции $h_1(Y)$ в физических единицах с переменными координатами $\{y_1, y_3\}$ и с постоянными координатами $\{y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки Y^0 (87) на рис. 6k4.

Координаты точки и функция первого критерия на **максимум**:

$Y_1^* = \{y_1 = 46.56, y_2 = 43.23, y_3 = 8.0, y_4 = 2.2\}$, $h_1^* = h_1(Y_1^*) = -387.99$ при расчете по четырем переменным. На рисунке обозначена как $f_1^\Delta(X_1^*) = -387.99$;

$Y_1^* = \{y_1 = 46.5676, y_3 = 8.0\}$ (на рис. 6k4 обозначена как X_1^*). В двухмерной системе координат y_1, y_3 величина целевой функции равна $h_1^* = f_1(X_1^*) = 403.605$ (Черный цвет).

Координаты точки и функция первого критерия на **минимум**:

В точке $X_1^0 = \{x_1 = 31.9, x_3 = 2.1\}$ величина целевой функции $F_1^0 = f_1(X_1^0) = 303.66$.

Величина целевой функции в четырехмерной системе координат $f_1^\Delta(X_1^0) = 296.59$.

Координаты точки и функция первого критерия **при равнозначных критериях**:

Координаты точки $X^0 = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$. Величина целевой функции $f_1(X^0) = 363.96$.

Относительная оценка с приоритетом четвертого критерия в точке оптимума $X_{q=4}$:
 $\lambda_1(X_{q=4}) = \frac{f_1(X_{q=4}) - f_1^0}{f_1^* - f_1^0} = 0.59498$. В физических единицах величина первого критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=4}$ равна $f_1(X_{q=4}) = 350.97$. (Показана фиолетовым цветом).

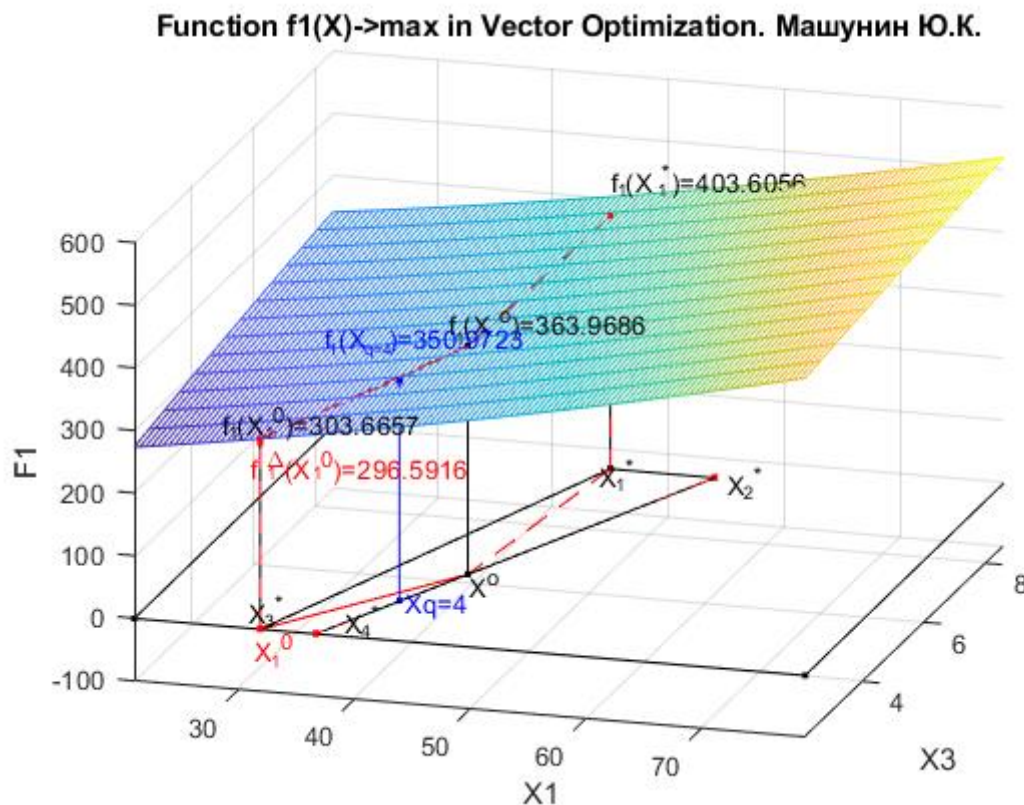


Рис. 6k4. Функция $f_1(X)$ с приоритетом четвертого критерия в двухмерной системе координат x_1, x_3 и геометрическая интерпретация функции $f_1(X)$ в системе координат x_1, x_2, x_3, x_4

Линейная функция, соединяющая точки $f_1(X^0)$ и $f_1^\Delta(X_1^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_1(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

А в целом отрезки $f_1^\Delta(X_1^*) - f_1(X^0) - f_1^\Delta(X_1^0)$ с учетом $f_1(X_{q=4})$ представляют геометрическую интерпретацию функции $f_1(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

2. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – второй характеристики $f_2(X)$ с приоритетом четвертого критерия - модели структуры материала при проектировании в физических единицах.

На Рис. 7.k4 исследованы: точки оптимума X_2^* , $X_{q=4}$, с соответствующими относительными оценками $\lambda_2(X_2^*)$, $\lambda_2(X_{q=4})$, а также линейные функции $\lambda^0 \lambda_2(X_{q=4}) - \lambda_2^\Delta(X_2^*)$ в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_2(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Вторая характеристика структуры материала $h_2(X)$ (70) сформирована в 4.1.4:

$$\min f_2(X) \equiv 795.72 + 23.89x_1 + 30.866x_2 - 25.8586x_3 - 45.0026x_4 - 0.7683x_1x_2 + 0.4703x_1x_3 + 0.7472x_1x_4 - 0.1283x_2x_3 + 0.3266x_2x_4 - 0.0112x_3x_4 + 0.0398x_1^2 + 0.0365x_2^2 + 3.2x_3^2 + 2.6457x_4^2.$$

Представим геометрическую интерпретацию функции $h_2(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1, x_3\}$ и с постоянными координатами $\{y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки Y^0 (89) на рис. 7.k4.

Координаты точки и функция второго критерия на **оптимум (минимум)**:

$$Y_2^* = \{y_1 = 55.60, y_2 = 34.19, y_3 = 8.0, y_4 = 2.2\}, h_2^* = h_2(X_2^*) = 1361.4$$

при расчете по четырем переменным. На рисунке обозначена как $f_2^\Delta(X_2^*) = 1361.41$.

$Y_2^* = \{x_1 = 55.6, x_3 = 8.0\}$ (на рис. 7.k4 обозначена как X_2^*). В двухмерной системе координат y_1, y_3 величина целевой функции равна $h_2^* = f_2(X_2^*) = 1193.56$. (Черный цвет).

Координаты точки **минимума** (Наихудшее решение – максимальное) в точке $X_2^0 = \{x_1 = 31.9, x_3 = 2.1\}$ величина целевой функции $F_2^0 = f_2(X_2^0) = 2207.2$.

Величина целевой функции в четырехмерной системе координат $f_2^\Delta(X_2^0) = 2458.5$.

Координаты точки и функция второго критерия **при равнозначных критериях**:

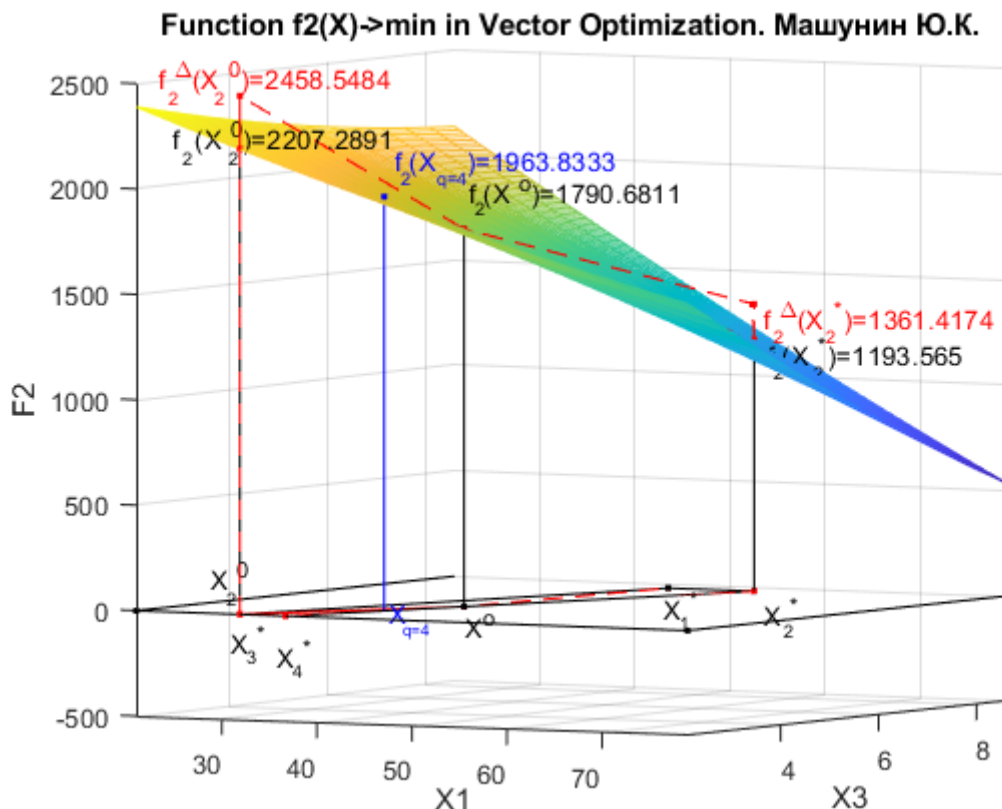


Рис. 7.k4. Функция $f_2(X)$ с приоритетом четвертого критерия в двухмерной системе координат x_1, x_3 и геометрическая интерпретация функции $f_2(X)$ в системе координат x_1, x_2, x_3, x_4

Координаты точки $X^0 = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$. Величина целевой функции $f_2(X^0) = 1790.68$.

Относительная оценка с приоритетом первого критерия в точке оптимума $X_{q=1}$ второго критерия: $\lambda_2(X_{q=4}) = \frac{f_2(X_{q=2}) - f_2^0}{f_2^* - f_2^0} = 0.45092$. В физических единицах величина второго

критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=4}$ равна $f_2(X_{q=4}) = 1963.83$. (Показана фиолетовым цветом). Линейная функция, соединяющая точки $f_2(X^0)$ и $f_2^{\Delta}(X_2^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_2(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$. А в целом отрезки $f_2^{\Delta}(X_2^*) - f_2(X^0) - f_2^{\Delta}(X_2^0)$ с учетом $f_2(X_{q=4})$ представляют геометрическую интерпретацию функции $f_2(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

3. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – третьей характеристики $f_3(X)$ с приоритетом четвертого критерия - модели структуры материала при проектировании в физических единицах.

На Рис. 8.k4 исследованы: точки оптимума X_3^* , $X_{q=4}$, с соответствующими относительными оценками $\lambda_3(X_3^*)$, $\lambda_3(X_{q=4})$, а также линейные функции $\lambda^0 \lambda_3(X_{q=4}) - \lambda_3^{\Delta}(X_3^*)$ λ^0 в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_3(X)$ с приоритетом четвертого критерия в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Третья характеристика структуры материала $h_3(X)$ (69) сформирована в 4.1.4:

$$\max h_3(Y) \equiv 110.22 + 0.7918y_1 + 1.73y_2 - 0.3713y_3 - 2.20y_4 - 0.0132y_1y_2 - 0.008y_1y_3 + 0.0193y_1y_4 - 0.0172y_2y_3 + 0.0161y_2y_4 - 0.0006y_3y_4 - 0.0004y_1^2 - 0.0002y_2^2 + 0.0335y_3^2 + 0.124y_4^2.$$

Представим геометрическую интерпретацию функции $h_3(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1, x_3\}$ и с постоянными координатами $y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки Y^0 (79) на рис. 8.k4.

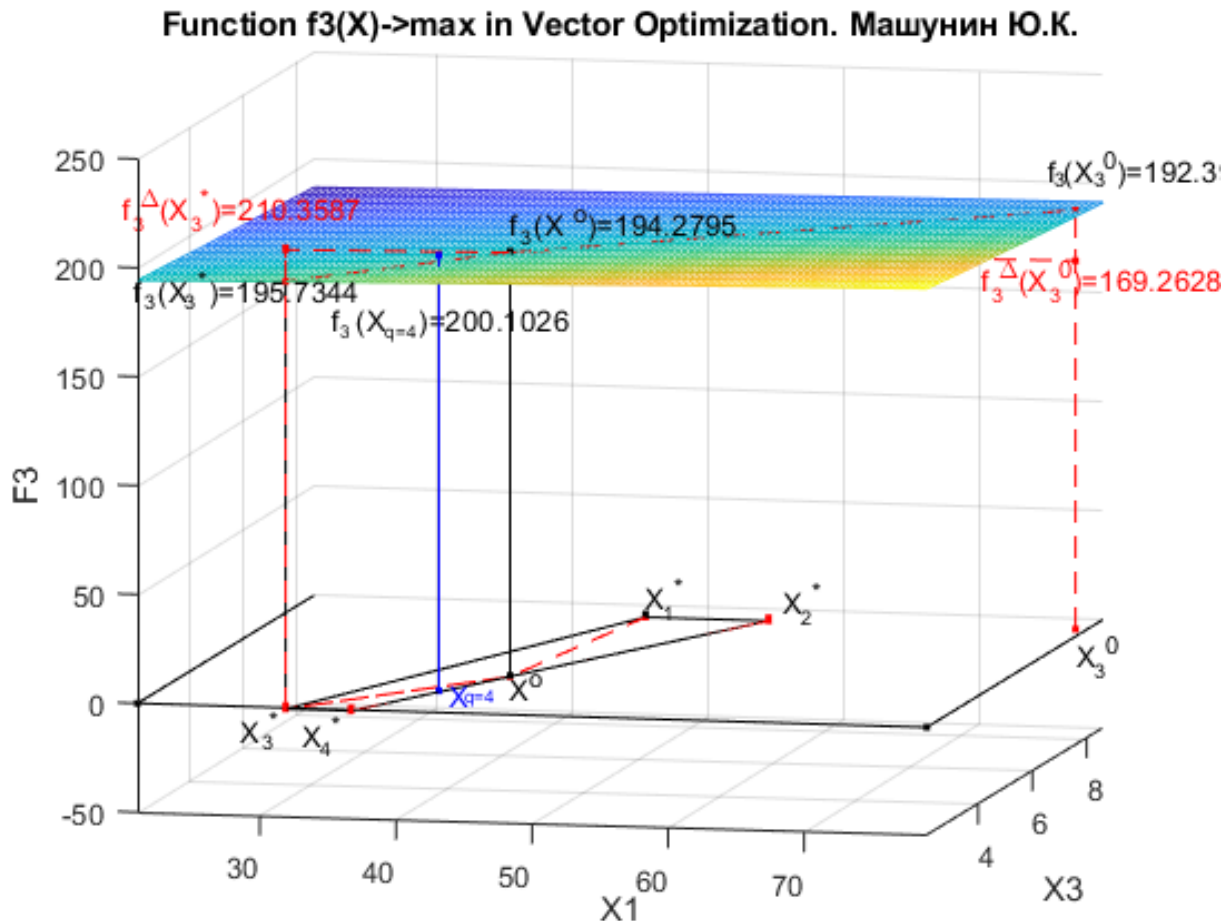


Рис. 8.k4. Функция $f_3(X)$ с приоритетом четвертого критерия в двухмерной системе координат x_1, x_3 и геометрическая интерпретация функции $f_3(X)$ в системе координат x_1, x_2, x_3, x_4

Координаты точки и функция третьего критерия на **максимум**:

$Y_3^* = \{y_1 = 31.90, y_2 = 59.00, y_3 = 2.1, y_4 = 7.0\}$, $h_3^* = h_3(Y_3^*) = -210.35$ при расчете по четырем переменным. На рис. 8.k4 обозначена как $f_3^\Delta(X_3^*) = -210.35$

$Y_3^* = \{x_1 = 31.9, x_3 = 2.1\}$ (на рис. 8.k4 обозначена как X_3^*). В двухмерной системе координат y_1, y_3 величина целевой функции равна $h_3^* = f_3(X_3^*) = 195.73$. (Черный цвет) Величина целевой функции $F_3^* = 210.3$.

Координаты точки **минимума** $X_3^0 = \{x_1 = 78.16, x_3 = 8.0\}$ (на рис. 8.k4. Величина целевой функции $f_3^0 = 169.26$.

Координаты точки $X^0 = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$. Величина целевой функции $f_3(X^0) = 194.27$.

Координаты точки и функция второго критерия **при равнозначных критериях**:

Координаты точки $X^0 = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$. Величина целевой функции $f_2(X^0) = 194.27$.

Относительная оценка с приоритетом четвертого критерия в точке оптимума $X_{q=4}$ третьего критерия: $\lambda_3(X_{q=4}) = \frac{f_3(X_{q=4}) - f_3^0}{f_3^* - f_3^0} = 0.75043$. В физических единицах величина третьего критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=4}$ равна $f_3(X_{q=4}) = 200.1026$. Линейная функция, соединяющая точки $f_3(X^0)$ и $f_3^\Delta(X_3^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_3(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

А в целом отрезки $f_3^\Delta(X_1^*) - f_3(X^0) - f_3^\Delta(X_3^0)$ представляют геометрическую интерпретацию функции $f_3(X)$ с учетом $f_3(X_{q=4}) = 200.1$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

4. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – четвертой характеристики $f_4(X)$ с приоритетом четвертого критерия – модели структуры материала при проектировании в физических единицах.

На Рис. 9.k4 исследованы: точки оптимума X_4^* , $X_{q=4}$, с соответствующими относительными оценками $\lambda_4(X_4^*)$ $\lambda_4(X_{q=4})$, а также линейные функции $\lambda^0 \lambda_4(X_{q=4}) - \lambda_4^\Delta(X_4^*)$ λ^0 в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_4(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Четвертая характеристика структуры материала $h_4(X)$ (71) сформирована в 4.1.4:

$$\max h_4(Y) \equiv 21.004 - 0.0097y_1 - 0.841y_2 - 0.4326y_3 + 1.1723y_4 + 0.166y_1y_2 + 0.085y_1y_3 - 0.0001y_1y_4 + 0.0523y_2y_3 + 0.0002y_2y_4 + 0.0006y_3y_4 - 0.0022y_1^2 + 0.0035y_2^2 + 0.006y_3^2 - 0.0311y_4^2\}.$$

Представим геометрическую интерпретацию функцию $f_4(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1, x_3\}$ и с постоянными координатами $y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки Y^0 (99) на рис. 9.k4.

Координаты точки и функция четвертого критерия на **максимум**:

$Y_4^* = \{y_1 = 36.70, y_2 = 59.00, y_3 = 2.1, y_4 = 2.2\}$, $h_4^* = h_4(Y_4^*) = 30.714$ при расчете по четырем переменным. На рис. 9.k4 обозначена как $f_4^\Delta(X_4^*) = 30.714$

$X_4^* = \{x_1 = 36.70, x_3 = 2.1\}$ (на рис. 9.k4 обозначена как X_4^*). В двухмерной системе координат y_1, y_3 величина целевой функции равна $h_4^* = f_4(X_4^*) = 28.302$. (Черный цвет) Величина целевой функции $F_4^* = 30.714$.

Координаты точки и функция четвертого критерия **минимума** $X_4^0 = \{x_1 = 62.71, x_3 = 8\}$. Величина целевой функции $f_4^0 = f_4(X_4^0) = -73.62$.

Координаты точки $X^0 = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$ (на рис. 9.k4 обозначена как X^0). Величина целевой функции $f_4(X^0) = 47.5$.

Относительная оценка с приоритетом четвертого критерия в точке оптимума $X_{q=4}$ четвертого критерия: $\lambda_4(X_{q=1}) = \frac{f_4(X_{q=1}) - f_4^0}{f_4^* - f_4^0} = 0.77997$. В физических единицах величина четвертого критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=4}$ равна $f_4(X_{q=4}) = 40.15$ – близка к исследуемой величине $f_4(X) = 40$. (Показана фиолетовым цветом).



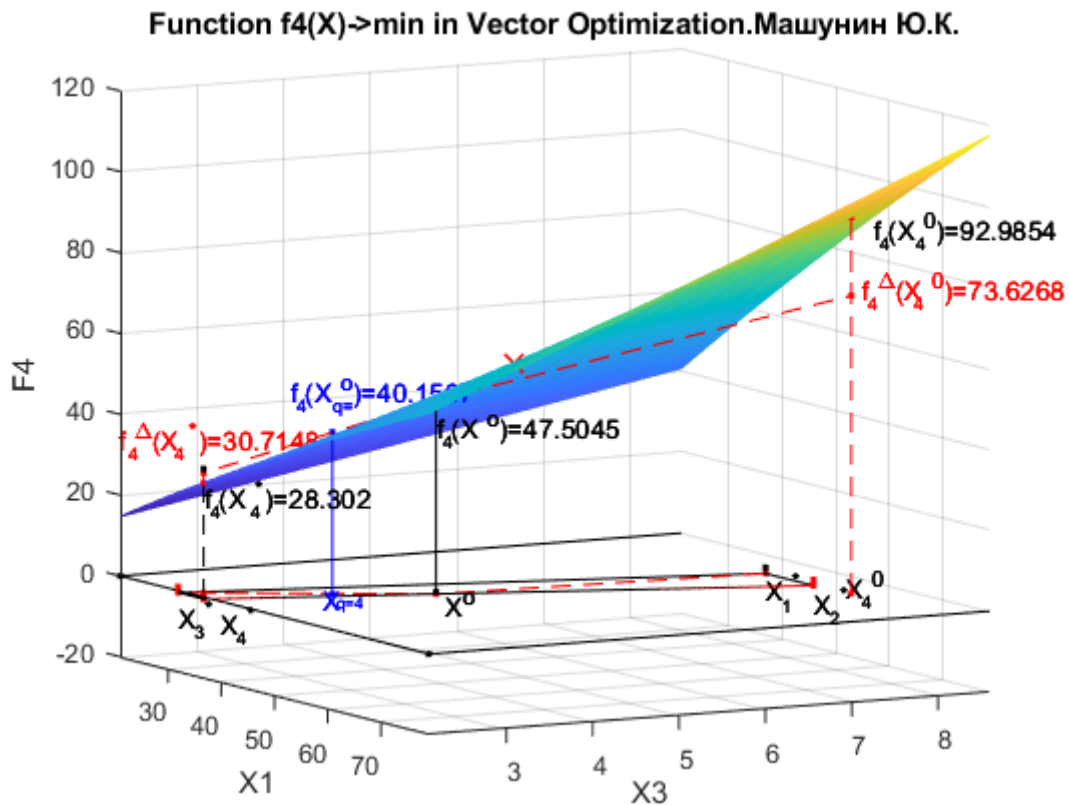


Рис. 9.k4. Функция $f_4(X)$ с приоритетом четвертого критерия в двухмерной системе координат $x_1 x_3$ и геометрическая интерпретация функции $f_4(X)$ в системе координат $x_1 x_2 x_3 x_4$

Линейная функция, соединяющая точки $f_4(X^0)$ и $f_4^{\Delta}(X_4^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_4(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$. А в целом отрезки $f_4^{\Delta}(X_4^*) - f_4(X^0) - f_4^{\Delta}(X_4^0)$ совместно с $f_4(X_{q=4}) = 40.15$ представляют геометрическую интерполяцию функции $f_4(X)$ в четырехмерном измерении параметров $x_1, \dots, x_4$.

Заключение по разделу: критерий k4.

В разделе рассмотрена и решена проблема (фрагмент) разработки и принятия управленческого решения условиях неопределенности в сложной инженерной системы (структуры материала). Проведен анализ результатов решения ВЗМП при заданном приоритете четвертого критерия, представлена геометрическая интерпретация результатов решения при проектировании в трехмерной системе координат четырех характеристик (критериев), во-первых, в относительных единицах, во-вторых, в физических единицах.

4. Сравнение прикладных методов многомерной математики с методами искусственного интеллекта.

Оценим прикладные методы многомерной математики - {аксиоматика Машунина Ю.К., принципы оптимальности и методы решения векторных задач математического (выпуклого) программирования}, представленные в третьем и четвертом разделе данной работы, и сравним их с методами искусственного интеллекта. Используя теорию векторной оптимизации, мы получили для инженерной системы (в частности, технической системы, структуры материала):

точки оптимума - $X^0 = (x_j^0, j = \overline{1, N})$;

характеристики (критерии) - $F(X^0) = \{f_k(X^0), k = \overline{1, K}\}$;

относительные оценки - $\lambda(X^0) = \{\lambda_k(X^0), k = \overline{1, K}\}$, которые лежат в пределах $\{0 \leq \lambda_k(X^0) \leq 1 (100\%), k = \overline{1, K}\}$, и легко переводится в натуральные (физические) данные.

Может ли эти результаты получить искусственный интеллект, функционирующий, как правило, по принципу перебора. Ответим: «Нет». Искусственный интеллект может получить только приблизительный результат, который задал человек, но чем этот результат лучше других результатов также должен оценить человек на основе интуиции.

Таким образом, разработанная теория векторной оптимизации может являться математическим аппаратом вычислительного интеллекта искусственного интеллекта.

Заключение

Проблема разработки математических методов многомерной математики в приложении к векторной задаче оптимизации и принятия оптимального решения на их основе в сложной технической системе по некоторому набору функциональных характеристик и экспериментальных данных является одной из важнейших задач системного анализа и проектирования инженерно-технических систем. В работе разработана методология автоматизации проектирования путем: построения математической модели инженерной системы в условиях определенности и неопределенности; разработки методов решения векторной задачи. Представлено построение математической и численной модели выбора оптимальных параметров сложной инженерной системы - материала сложной структуры и их реализация по множеству характеристик Первый этап, а также этап анализа результата решения и выбора приоритетного критерия и его величины выполняется **конструктором материала**.

Список литературы:

1. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И. В. Виноградов. –М.: Советская Энциклопедия. Т.1 А - Г. 1977. 1152 с.
2. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И. В. Виноградов. –М.: Советская Энциклопедия. Т.3 Коо -Од - М. 1982. 1184 с.
3. Pareto V. Cours d'Economie Politique. Lausanne: Rouge, 1896.
4. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. - М.: Мир, 1964, 837 с.
5. Гермейер Ю.Б. Игры с не противоположными интересами. – М.: Наука, 1976, 326 стр.
6. Зак Ю.А. Многоэтапные процессы принятия решений в задаче векторной оптимизации // АиТ. 1976. № 6, С. 41-45.
7. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе В.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Физматиз. 1961. 268 с.
8. Красовский Н.Н., Красовский А.Н., Третьяков В.У. Управление динамической системой. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. 195 с.
9. Прядкин Л.Л., Гончаров А.Л., Бойчук В.Г. Автоматизация управления технологическими процессами в прокатном производстве на базе микропроцессорной технике. – М.: ЦНИИТЭИ приборостроения, 1986. 136 с.
10. Ю.Н. Киселёв, С.Н. Аввакумов, М.В. Орлов. Оптимальное управление. Линейная теория и приложения. – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, 2007. – 270 с. ISBN 5-89407-288-3.
11. Добрынина И.С., Карпов И.И., Черноусько Ф.Л. Метод декомпозиции в задачах управления системой твердых тел // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1995. № 2.
12. Краснощеков П.С., Морозов В.В., Федоров В. В. Последовательное агрегирование в задачах внутреннего проектирования технических систем// Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1979. N 5.
13. Михайлович В. С., Волкович В. П. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. М.: Наука, 1982, 285 с.
14. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука. 1982. 256 с.
15. Машунин Ю.К. Методы и модели векторной оптимизации. - М.: Наука, 1986. 141 с.
16. Машунин Ю. К., Левицкий В. Л. Методы векторной оптимизации в анализе и синтезе технических систем: монография. - Владивосток: ДВГАЭУ, 1996. 131 с.
17. Машунин Ю.К. Решение композиционных и декомпозиционных задач синтеза сложных технических систем методами векторной оптимизации//Изв. РАН. ТиСУ. 1999. №3. С. 88-93. Yu. K. Mashunin, "Solving composition and decomposition problems of synthesis of complex engineering systems by vector optimization methods," Comput. Syst. Sci. Int. 38, 421 (1999). (Scopus).



18. Машунин Ю.К., Машунин К.Ю. Моделирование технических систем в условиях неопределенности и принятие оптимального решения //Изв. РАН. ТиСУ. 2013. №4. С. 19-35.
Mashunin K. Yu., and Mashunin Yu. K. Simulation Engineering Systems under Uncertainty and Optimal Decision Making. Journal of Comput. Syst. Sci. Int. Vol. 52. No. 4. 2013. 519-534. (Scopus)
19. Машунин Ю.К. Теория управления. Математический аппарат управления в экономических системах. – М.: Логос. 2013. 448 с. (Новая университетская библиотека)
20. Mashunin Yu.K. Mashunin K.Yu. Modeling of technical systems on the basis of vector optimization (1. At equivalent criteria) / International Journal of Engineering Sciences & Research Technology. 3(9): September, 2014. P. 84-96 .
21. Mashunin Yu.K. Mashunin K.Yu. Modeling of technical systems on the basis of vector optimization (2. with a Criterion Priority) / International Journal of Engineering Sciences & Research Technology. 3(10): October, 2014. P. 224-240.
22. Yu. K. Mashunin, K. Yu. Mashunin. Simulation and Optimal Decision Making the Design of Technical Systems // American Journal of Modeling and Optimization. 2015. Vol. 3. No 3, 56-67.
23. Yu. K. Mashunin, K. Yu. Mashunin. Simulation and Optimal Decision Making the Design of Technical Systems (2. The Decision with a Criterion Priority) // American Journal of Modeling and Optimization. 2016. Vol. 4. No 2, 51-66.
24. Yu. K. Mashunin, "Methodology of the Choice of Optimum Parameters of Technological Process on Experimental to Data. «American Journal of Modeling and Optimization, vol. 7, no. 1 (2019): 20-28. Doi: 10.12691/ajmo-7-1-4.
25. Yu. K. Mashunin. Vector optimization in the system optimal Decision Making the Design in economic and technical systems // International Journal of Emerging Trends & Technology in Computer Science. 2017. Vol. 7. No 1, 42-57.
26. Mashunin, Yu. K, Optimal designing in the interrelation technical system – Materials (Theory) // Mathematical methods in engineering and technology: proceedings of international. Science. Conf.: 12 tons 4 /under General Ed. A. A. Bolshakova. –SPb.: Publishing house of Polytechnical Institute. Un-t, 2018. P. 40-46.
27. Yu. K. Mashunin. Concept of Technical Systems Optimum Designing (Mathematical and Organizational Statement)// International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2017 Proceedings 8076394. Saint Petersburg. Russia/ WOS: 000414282400287 ISBN:978-1-5090-5648-4. (Web of science)
28. Yu. K. Mashunin. Optimum Designing of the Technical Systems Concept (Numerical Realization) // International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2017 Proceedings 8076395. Saint Petersburg. Russia/ WOS: 000414282400288 ISBN:978-1-5090-5648-4. (Web of science)
29. Mashunin K. Yu., and Mashunin Yu. K. Vector Optimization with Equivalent and Priority Criteria. Journal of Comput. Syst. Sci. Int., 2017, Vol. 56. No. 6. pp. 975-996. <https://rdcu.be/bhZ8i> (Scopus).
30. Mathematical Apparatus of Optimal Decision-Making Based on Vector Optimization," Appl. Syst. Innov. 2019, 2, 32. <https://doi.org/10.3390/asi2040032> (Scopus)
31. Mashunin Yu.K. Theory and Methods Vector Optimization (Volume One), Cambridge Scholars Publishing. 2020, 183 p. ISBN (10): 1-5275-4831-7
32. Торгашов А.Ю., Кривошеев В.П., Машунин Ю.К., Холланд Ч.Д. Расчет и многокритериальная оптимизация статических режимов массообменных процессов на примере абсорбции в производстве газоразделения // Изв. ВУЗов. Нефть и газ, 2001, №3, с. 82-86.
33. Mashunin Yu.K. Theory, Applied Mathematics and Software for Optimal Decision Making on a set of Criteria in Engineering Systems, monograph: monograph / Yu.K. Mashunin. Moscow : RuScience, 2024. – 260 с. ISBN 978-5-466-05940-3.
34. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения: Пер. с англ./Под ред. И. Ф. Шахнова. - М.: Радио и связь, 1981. 560 с.
35. J. Johannes. Vector Optimization: Theory, Applications, and Extensions. New York, Berlin, Heidelberg. Springer-Verlag. 2010. 460 p.



36. Qamrul Hasan Ansari, Jen-Chih Yao. Recent Developments in Vector Optimization. Springer Heidelberg Dordrecht. New York. London. 2010. 550 p.
37. Nakayama Hirotaka, Yun Yeboon, Yoon Min. Sequential Approximate Multiobjective Optimization Using Computational Intelligence. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. 2009. 197 p.
38. Shankar R. Decision Making in the Manufacturing Environment: Using Graft Theory and fuzzy Multiple Attribute Decision Making Methods. Springer; 2007. 373 p.
39. Cooke T., Lingard H., Blismas N. The development and evaluation of a decision support tool for health and safety in construction design // Engineering, Construction and Architectural Management. 2008. V. 15. №4. P. 336-351.
40. Левицкий В. Л. Математическое моделирование и оптимизация магнитоэлектрических линейных индукторных двигателей постоянного тока. Диссертация канд. Техн. Наук, Новосибирск. НЭТИ. 1990. 163 с.
41. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И. В. Виноградов. –М.: Советская Энциклопедия. Т.4 Ок-Сло. 1984. 1216 с.
42. Mashunin Yu.K. Theory and Methods Vector Optimization (Volume Two), Cambridge Scholars Publishing. 2021, 270 p. ISBN (10): 1-5275-7413-X ISBN (13): 978-1-5275-7413-7
43. Yury Mashunin. Digital Transformation of Optimal Decision making in Economic and Engineering Systems Based and Methods of Vector Optimization, Modern Intelligent Times. 2024, 1-57 p. ISSN 2957-7942 (Online) DOI: 10.53964/mit.2023007
44. Mashunin Yu.K. Modeling, simulation, making optimal decision in engineering and production systems based on vector optimization: monograph / Yu.K. Mashunin. Moscow : RuScience, 2024. – 368 с. ISBN 978-5-466-08001-8.

