

Малёв Николай Анатольевич  
к.т.н., доцент кафедры «Приборостроение и мехатроника»  
ФГБОУ ВО «КГЭУ», г. Казань

Ланин Илья Вадимович  
магистрант кафедры «Приборостроение и мехатроника»  
ФГБОУ ВО «КГЭУ», г. Казань

## СИНТЕЗ ЦИФРОВОГО БИХ-ФИЛЬТРА СИСТЕМЫ КОНТРОЛЯ ТЕМПЕРАТУРЫ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТАСТИНА

**Аннотация.** В работе рассматриваются элементы теории, посвященные дискретной аппроксимации методом Тастина. Произведен синтез аналоговых фильтров-прототипов, из полученных фильтров выбрана наилучшая структура и для неё проведена дискретная аппроксимация. Показаны результаты моделирования измерительной системы и приведен анализ результатов моделирования.

**Ключевые слова:** цифровой фильтр, БИХ-фильтр, дискретная аппроксимация, синтез.

В работе исследуется система автоматического контроля и регистрации температуры, измерительный канал которой построен по принципу астатического следящего уравнивания [1]. В целях обеспечения требуемых быстродействия и точности измерений производится синтез аналогового корректирующего фильтра-прототипа с применением метода последовательной коррекции на основе критерия динамической точности при воспроизведении гармонического задающего воздействия [2]. Дискретная аппроксимация синтезированного фильтра осуществляется с помощью билинейного преобразования (формула трапеций), известного в зарубежной литературе как метод Тастина [3]. Данный метод менее ресурсоемкий и обеспечивает большую



скорость вычислений по сравнению с методами точной дискретизации. Несмотря на получение приближенной дискретной модели, метод позволяет сохранить все свойства исходной аналоговой модели, и, при правильно выбранном периоде дискретности  $T$  не приводит к неустойчивым решениям [3, 4]. Графическая интерпретация метода показана на рисунке 1.

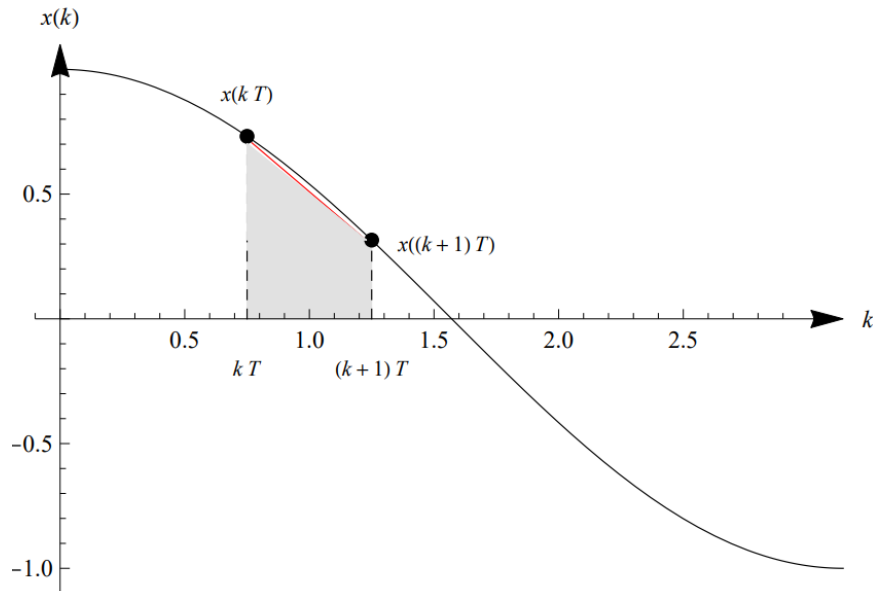


Рисунок 1 - Графическая интерпретация метода Тастина

Из анализа рисунка 1 можно заключить, что точность аппроксимации методом Тастина значительно выше по сравнению с методом Эйлера (формула прямоугольников).

Аппроксимация в соответствии с методом Тастина предполагает замену оператора Лапласа согласно выражению

$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}. \quad (1)$$

С применением замены (1) соответствующая запись уравнения состояния

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t)$$

может быть представлена в виде

$$\frac{z-1}{z+1} x(t) = \frac{T}{2} \mathbf{A}x(t) + \frac{T}{2} \mathbf{B}u(t).$$

Переходя к разностным уравнениям, запишем



$$x[k+1] - x[k] = \frac{T}{2} \mathbf{A} (x[k+1] + x[k]) + \frac{T}{2} \mathbf{B} (u[k+1] + u[k])$$

или, используя единичную матрицу  $I$ ,

$$\left( I - \frac{T}{2} \mathbf{A} \right) x[k+1] = \left( I + \frac{T}{2} \mathbf{A} \right) x[k] + \frac{T}{2} \mathbf{B} (u[k+1] + u[k]).$$

После некоторых преобразований окончательно получим

$$\left( I - \frac{T}{2} \mathbf{A} \right) x[k+1] = \underbrace{\left( I - \frac{T}{2} \mathbf{A} \right)^{-1} \left( I + \frac{T}{2} \mathbf{A} \right)}_{\mathbf{A}} x[k] + \underbrace{\left( I - \frac{T}{2} \mathbf{A} \right)^{-1} \frac{T}{2} \mathbf{B}}_{\mathbf{B}} (u[k+1] + u[k]).$$

В результате выполнения процедуры синтеза аналогового фильтра-регулятора измерительного канала (ФРИК) получены следующие передаточные функции:

1) передаточная функция интегро-дифференцирующего ФРИК

$$W_{\text{фрик}}(s) = \frac{K_{\text{фрик}}(T_2s+1)(T_3s+1)}{(T_1s+1)(T_4s+1)} = \frac{3,388(0,064s+1)(0,0056s+1)}{(2,05s+1)(0,0014s+1)}.$$

2) интегро-дифференцирующий ФРИК с корректирующим устройством в виде форсирующего звена на выходе

$$\begin{aligned} W_{\text{фрик}}(s) &= \frac{K_{\text{фрик}}(T_2s+1)(T_3s+1)}{(T_1s+1)(T_4s+1)} \cdot \frac{T_{\text{кy1}}s+1}{T_{\text{кy2}}s+1} = \\ &= \frac{3,388(0,064s+1)(0,0056s+1)}{(2,05s+1)(0,0014s+1)} \cdot \frac{0,22s+1}{0,0001s+1}; \end{aligned}$$

3) передаточная функция ФРИК, полученная аналитическим способом [см. 4] с передаточной функцией

$$\begin{aligned} W_{\text{фрик}}(s) &= \frac{b_4s^4 + b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s}{d_4s^4 + d_3s^3 + d_2s^2 + d_1s} = \\ &= \frac{0,003468 s^4 + 0,924 s^3 + 122,6 s^2 + 1777 s}{0,00948 s^4 + 6,323 s^3 + 1056 s^2 + 526,3 s}; \end{aligned}$$

4) передаточная функция ФРИК из п.3 с корректирующим устройством



$$W_{\text{фрик}}(s) = \frac{b_4 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s}{d_4 s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s} \cdot \frac{T_{\text{кy1}} s + 1}{T_{\text{кy2}} s + 1} =$$

$$= \frac{0,003468 s^4 + 0,924 s^3 + 122,6 s^2 + 1777 s}{0,00948 s^4 + 6,323 s^3 + 1056 s^2 + 526,3 s} \cdot \frac{0,22 s + 1}{0,0001 s + 1}$$

Результаты моделирования измерительной системы представлены на рисунке 2.

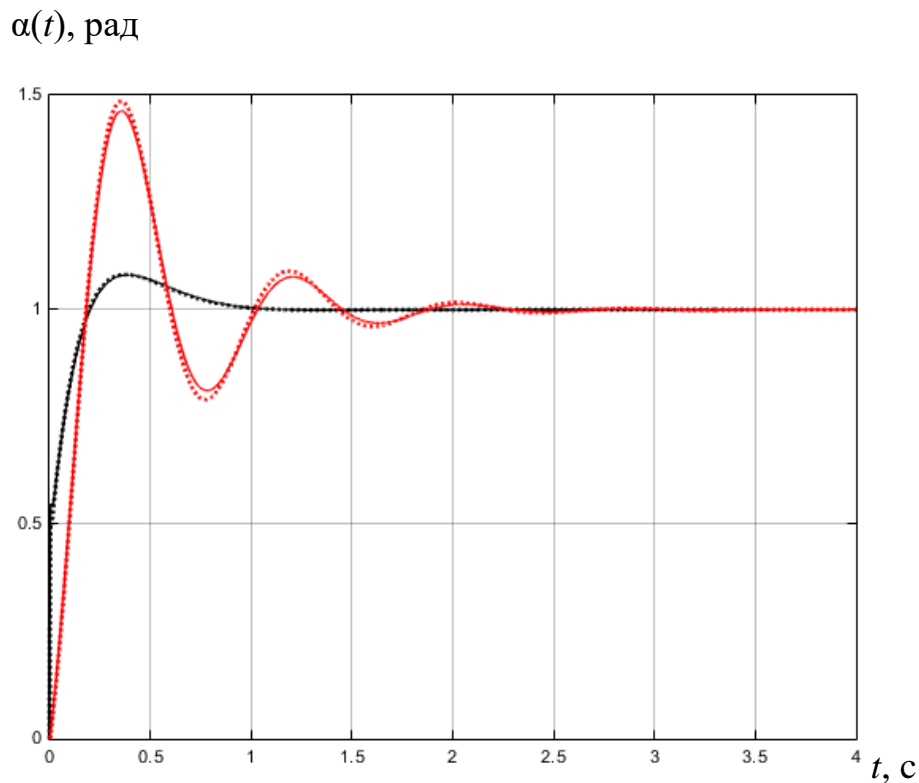


Рисунок 2 - Переходные характеристики измерительной системы

Из анализа графиков видно, что наиболее предпочтительными являются варианты структуры ФРИК с применением дифференцирующего контура. При этом измерительная система обрабатывает ступенчатое воздействие  $\alpha_3$  примерно за 1 с с перерегулированием  $\sigma \approx 8\%$  и числом колебаний  $N < 1$ , причем разница между вторым и четвертым вариантами практически отсутствует. В этой связи для дискретной аппроксимации целесообразно использовать интегро-дифференцирующий ФРИК с форсирующим звеном на выходе.



Для определения передаточной функции цифрового БИХ-фильтра  $W_{\text{фрик}}(z)$  с применением формулы трапеций (bilinear) составим программу в MATLAB.

```

num=[0.000267137024 0.0530913152 0.9811648 3.388];
den=[2.87e-7 0.00307514 2.0515 1];
Fs=1000;
[numd, dend]=bilinear(num, den, Fs)
numd =
    125.7410029646171 -354.0900028234447 331.3789078829741
-103.0284586557854
dend =
    1.000000000000000    -0.806529857929388    -0.508677814995915
0.315635467600970

```

В приведённой программе Fs означает частоту квантования, обратно пропорциональную периоду квантования  $T$ . В результате решения получим передаточную функцию цифрового ФРИК

Дискретная передаточная функция ФРИК

$$\begin{aligned}
 W_{\text{фрик}}(z) &= \frac{U_{\text{фрик}}(z)}{\Delta U_{\alpha}(z)} = \frac{B(z)}{D(z)} = \frac{b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{d_3 z^3 + d_2 z^2 + d_1 z + d_0} = \\
 &= \frac{125,741z^3 - 354,09z^2 + 331,3789z - 103,0284}{z^3 - 0,8065z^2 - 0,5087z + 0,3156}.
 \end{aligned}$$

В то же время

$$W_{\text{фрик}}(z) = \frac{U_{\text{фрик}}(z)}{\Delta U_{\alpha}(z)} = \frac{B(z)}{D(z)} = \frac{b_3 + b_2 z^{-1} + b_1 z^{-2} + b_0 z^{-3}}{1 + d_2 z^{-1} + d_1 z^{-2} + d_0 z^{-3}},$$

причем

$$U_{\text{фрик}}(z) = (b_3 + b_2 z^{-1} + b_1 z^{-2} + b_0 z^{-3}) \cdot E(z),$$

где  $E(z) = \frac{\Delta U_{\alpha}(z)}{1 + d_2 z^{-1} + d_1 z^{-2} + d_0 z^{-3}}.$

$$E(z) = \Delta U_{\alpha}(z) + \left[ -d_2 E(z) z^{-1} - d_1 E(z) z^{-2} - d_0 E(z) z^{-3} \right].$$



Два последних уравнения реализуются в виде структурной схемы непосредственного программирования, которая изображена на рисунке 3.

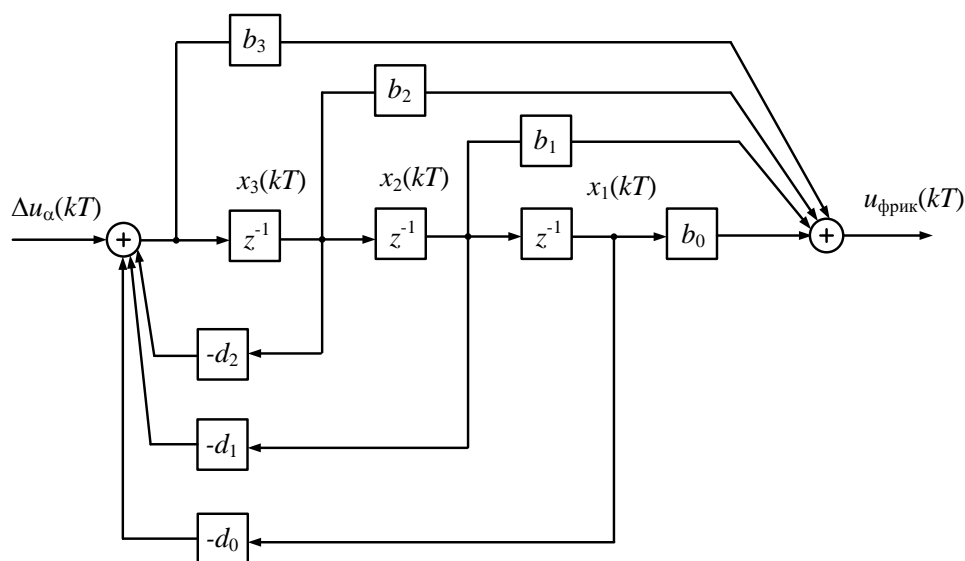


Рисунок 3 - Структурная схема непосредственного программирования цифрового ФРИК

По схеме программирования, представленной на рисунке 3, находим уравнения состояния и выхода системы.

Уравнения состояния

$$x_1[(k+1)T] = x_2(kT);$$

$$x_2[(k+1)T] = x_3(kT);$$

$$x_3[(k+1)T] = -d_0x_1(kT) - d_1x_2(kT) - d_2x_3(kT) + \Delta u_\alpha(kT)$$

и уравнение выхода

$$u_{\text{фрик}}(kT) = (b_0 - d_0b_3)x_1(kT) + (b_1 - d_1b_3)x_2(kT) + (b_2 - d_2b_3)x_3(kT) + b_3\Delta u_\alpha(kT).$$

Векторно-матричная форма уравнений цифрового ФРИК

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)T] \\ x_2[(k+1)T] \\ x_3[(k+1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -d_0 & -d_1 & -d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ x_3(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta u_\alpha(kT);$$



$$u_{\text{фрик}}(kT) = [b_0 - d_0b_3 \quad b_1 - d_1b_3 \quad b_2 - d_2b_3] \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ x_3(kT) \end{bmatrix} + [b_3] \Delta u_{\alpha}(kT).$$

Результаты моделирования измерительной системы с аналоговым и цифровым фильтрами показаны на рисунке 4.

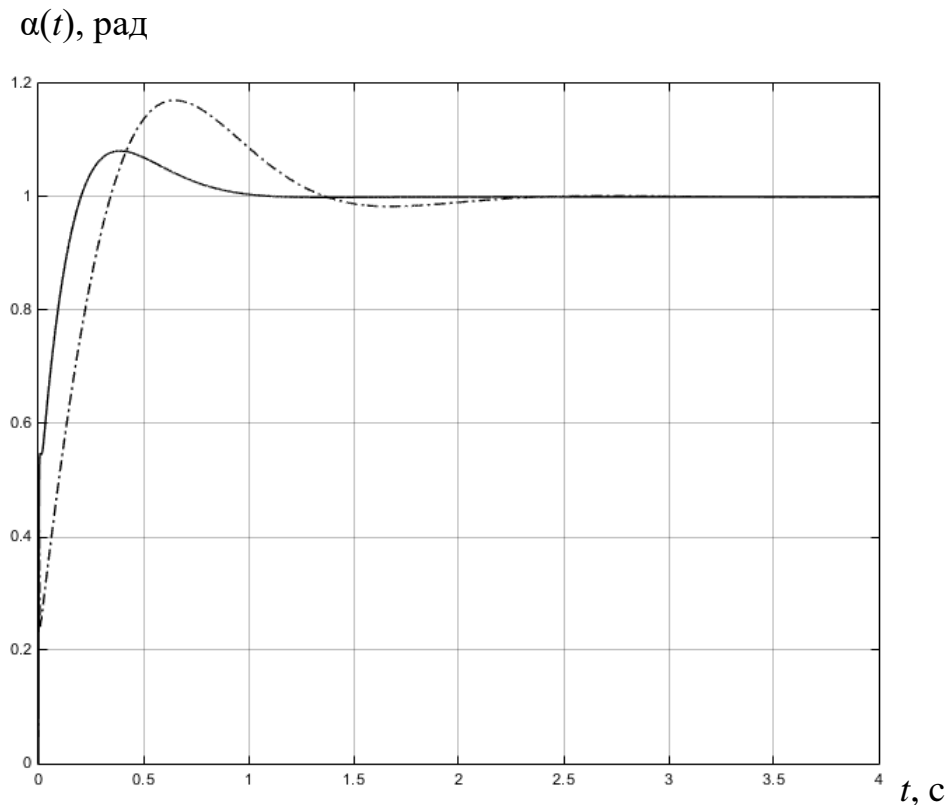


Рисунок 4 - Переходные характеристики измерительной системы

Из анализа графика на рисунке 4 видно, что перерегулирование в системе с цифровым БИХ-фильтром возросло до 17%, а время установления увеличилось примерно до 2 с. Тем не менее, в целом процесс управления с синтезированным цифровым ФРИК является сравнительно плавным, что благоприятно сказывается на работе измерительной системы.

### Список литературы

1. Малёв Н.А. Расчет и исследование астатического электропривода малой мощности. Казань: Практикум / Казан. гос. энерг. ун-т, 2011.



2. Смит С. Цифровая обработка сигналов. Практическое руководство для инженеров и научных работников. – М.: Издательский дом «Додэка-XXI», 2008.
3. Солонина А. И., Клионский Д. М., Меркучева Т. В., Перов С. Н. Цифровая обработка сигналов и MATLAB. – СПб.: БХВ-Петербург, 2013.
4. N. A. Malev and O. V. Pogoditsky, "Synthesis of the measuring circuit regulator automatic compensator for the measurement of thermal electromotive force," 2016 13th International Scientific-Technical Conference on Actual Problems of Electronics Instrument Engineering (APEIE), Novosibirsk, Russia, 2016, pp. 1-1, doi: 10.1109/APEIE.2016.7806993.

