

Машунин Юрий Константинович
Доктор экономических наук, к.т.н., профессор
Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия
ORCID id: 0000-0001-7071-8729 (Пенсионер, Советское образование)
Mashunin Yu. K., Doctor of Economics,
Ph.D., Professor. Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia,
ORCID id: 0000-0001-7071-8729 (Pensioner, Soviet education)

**МНОГОМЕРНАЯ МАТЕМАТИКА.
ТЕОРИЯ, МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ
ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ
ПРОЦЕССОВ И МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЯ
MULTIDIMENSIONAL MATHEMATICS.
THEORY, MODELING, SOFTWARE FOR SELECTING OPTIMAL PARAMETERS
OF TECHNOLOGICAL PROCESSES AND MATERIALS SCIENCE**

Abstract. Цель работы представить теорию и методы многомерной математики в процессе исследования, проектирования и выбора оптимальных параметров инженерных систем.

В математических моделях инженерных систем целенаправленность сформирована в виде множества характеристик (критериев), т.е. модели представлены задачами векторной оптимизации. В рамках теория векторной оптимизации представлены принципы оптимальности решения векторных задач при равнозначных критериях и при заданном приоритете критерия <https://rdcu.be/bhZ8i>. (Работа "Vector optimization with equivalent and priority criteria" Springer Nature распространяется бесплатно.).

В работе разработана теория и конструктивные методы многомерной математики: решение векторных (многокритериальных) задач математического программирования, *во-первых*, при равнозначных критериях (характеристик инженерных систем), *во-вторых*, при заданной числовой величине приоритетного (представляющего интерес для разработчика) критерия.

На базе теории многомерной математики представлена методология моделирования многопараметрических и многофункциональных инженерных систем, которые включают технические системы, технологические процессы, структура материала. Методология включает. 1. Построение *математической* модели инженерной системы в условиях определенности и неопределенности. 2. Разработки конструктивных методов решения векторной задачи. 3. Разработки и построения численной модели инженерной системы для выбора оптимальных параметров (много параметрической и много функциональной инженерной системы). 4. Представлена численная реализация модели технологического процесса при равнозначных критериях и с заданным приоритетом критерия. 5. Представлена численная реализация модели структуры материала при равнозначных критериях и с заданным приоритетом любого критерия. 6. Представлена геометрическая интерпретация результатов решения при моделировании в трехмерной системе координат четырех характеристик (критериев) в относительных и физических единицах в технологическом процессе и материаловедении.



Abstract: The purpose of the work is to present the theory and methods of multidimensional mathematics in the process of research, design and selection of optimal parameters of engineering systems. The theory and methods of multidimensional mathematics can be the mathematical apparatus of computational intelligence within the framework of artificial intelligence. In mathematical models of engineering systems, purposefulness is formed in the form of a set of characteristics (criteria), i.e. models are represented by vector optimization problems. Within the framework of the theory of vector optimization, the principles of optimality of solving vector problems with equivalent criteria and with a given priority of the criterion are presented <https://rdcu.be/bhZ8i>. (The work "Vector optimization with equivalent and priority criteria" by Springer Nature is distributed free of charge.).

The paper develops the theory and constructive methods of multidimensional mathematics: the solution of vector (multi-criteria) problems of mathematical programming, firstly, with equivalent criteria (characteristics of engineering systems), and secondly, with a given numerical value of the priority (of interest to the developer) criterion. On the basis of the theory of multidimensional mathematics, a methodology for modeling multiparameter and multifunctional engineering systems is presented, which include technical systems, technological processes, and material structure. The methodology includes. 1. Construction of a mathematical model of an engineering system in conditions of certainty and uncertainty. 2. Development of constructive methods for solving a vector problem. 3. Development and construction of a numerical model of an engineering system for the selection of optimal parameters (many parametric and many functional engineering systems). 4. The numerical implementation of the technological process model with equivalent criteria and with a given priority of the criterion is presented. 5. A numerical implementation of the material structure model with equivalent criteria and with a given priority of any criterion is presented. 6. A geometric interpretation of the solution results in modeling four characteristics (criteria) in relative and physical units in the technological process and materials science in a three-dimensional coordinate system is presented.

Ключевые слова: Многомерная математика, Теория векторной оптимизации, Методы принятия оптимальных решений, Моделирование инженерной системы, Геометрическая интерпретация многомерных систем.

Keywords: Multidimensional Mathematics, Theory of Vector Optimization, Methods for Making Optimal Decisions, Modeling of an Engineering System, Geometric Interpretation of Multidimensional Systems.

Introduction

При исследовании развития производственных и инженерных систем выясняется, что они (системы) зависят от некоторого числового множества функциональных характеристик, которые в совокупности определяют многомерность исследуемой системы. Эту многомерность необходимо учитывать на стадии проектирования и моделирования. Анализ и исследование множества инженерных, экономических систем показало, что улучшение по одной из характеристик системы приводит к ухудшению других характеристик. А для улучшения функционирования системы:

во-первых, требуется решение проблемы, при которой в исследуемой системе одно подмножество характеристик (критериев) было направлено на увеличение числового значения (максимизацию), а второе подмножество характеристик (критериев) системы было направлено на уменьшение числового значения (минимизацию);

во-вторых, необходимо, чтобы все характеристики улучшались в совокупности.

В настоящее время известно решение однокритериальной оптимизации, которую можно трактовать как одномерную оптимизацию.

Исследования многокритериальных задач началось более ста лет тому назад в работе Pareto V. [1]. В последние три десятилетие методам решения векторных (многокритериальных) задач посвящено большое количество монографий и отдельных статей. Это связано с широким



использованием этих методов в решении практических задач. Анализ методов и алгоритмов решения многокритериальных задач в соответствии со своей классификацией представлен в ряде работ [6, 10, 22, 39, 45, 46]: методы решения многокритериальных задач, основанные на свертывании критериев с весовыми коэффициентами [3, 5, 25, 27]. Исследование многокритериальной оптимизации проводилось как на теоретическом уровне зарубежными [3, 25-30] и русскими авторами [4-23], так и на решении практических задач сначала в области экономики [31-45], а за тем в области инженерных систем [6-21, 46]. Впервые теория и методы решения векторных задач математического программирования (ВЗМП) разработаны автором в [6] и подтверждены в [20]¹.

Решение проблемы векторной оптимизации обусловлено рядом трудностей, причем концептуального характера, и главная из них понять: «что значит решить задачу векторной оптимизации». Для решения проблемы с множеством критериев математически необходимо создание, во-первых, аксиоматики и принципов оптимальности, показывающих любому пользователю, в чем одно решение лучше другого решения, и, что такое оптимальное решение многокритериальной (т.е. со многими характеристиками) оптимационной задачи. А на следующем этапе на базе аксиоматики и принципов оптимальности разработки конструктивных методов решения многокритериальных задач.

Цель работы представить теорию и методы многомерной математики в процессе исследования, проектирования и выбора оптимальных параметров инженерных систем, в которых целенаправленность математической модели инженерной системы сформирована в виде множества характеристик (критериев).

В работе в рамках теории векторной оптимизации сформулированы аксиомы и представлены принципы оптимальности решения векторных задач при равнозначных критериях и при заданном приоритете критерия. В прикладной части представлены конструктивные методы принятия оптимальных решений, методы решения векторных задач для моделирования технические системы [11-14, 18, 19], технологические процессы [15, 21], материалы [17], которые описаны множеством функциональных характеристик.

Методология включает. 1. Построение *математической* модели инженерной системы в условиях определенности и неопределенности. 2. Разработки конструктивных методов решения векторной задачи. 3. Разработки и построения численной модели инженерной системы для выбора оптимальных параметров (много параметрической и много функциональной инженерной системы). 4. Представлена численная реализация модели технологического процесса при равнозначных критериях и с заданным приоритетом критерия.

¹ **SPRINGER NATURE**

Dear Author,

Congratulations on publishing "Vector optimization with equivalent and priority criteria" in Journal of Computer and Systems Sciences International. As part of the Springer Nature Content Sharing Initiative, you can now publicly share full-text access to a view-only version of your paper by using the following SharedIt link: <https://rdcu.be/bhZ8i>

Readers of your article via the shared link will also be able to use Enhanced PDF features such as annotation tools, one-click supplements, citation file exports and article metrics.

We encourage you to forward this link to your co-authors, as sharing your paper is a great way to improve the visibility of your work. [Click here](#) for more information on Springer Nature's commitment to content sharing and the SharedIt initiative.

Sincerely, Springer Nature

The [Springer Nature SharedIt Initiative](#) is powered by  readcube technology.



5. Представлена численная реализация модели структуры материала при равнозначных критериях и с заданным приоритетом любого критерия. 6. Представлена геометрическая интерпретация результатов решения при моделировании в трехмерной системе координат четырех характеристик (критериев) в относительных и физических единицах в технологическом процессе и материаловедении.

1. Математическое моделирование инженерных систем на базе задач векторной оптимизации.

В качестве объекта исследования нами рассматриваются «Инженерные системы», к которым относятся «технические системы», «технологические процессы», «материалы», [18, 19-23]. Исследование инженерной системы выполнено,

во-первых, в условиях определенности, когда известны данные о функциональных характеристиках инженерной системы;

во-вторых, в условиях неопределенности, когда известны дискретные значения отдельных характеристик; также известны данные об ограничениях, которые накладываются на функционирование системы.

1.1. Математическая модель технической системы для принятия оптимального управлеченческого решения

1.1.1. Проблемы моделирования при проектировании новых технических систем

При проектировании новых технических систем возникает проблема построения в явном или не явном виде математической модели, оценки на ее основе результатов моделирования и принятия оптимального решения. Аналогичные проблемы возникают и на уже созданных технических системах (ТС), которые при эксплуатации должны постоянно модернизироваться и заменяться на более совершенные модели. Проблеме моделирования ТС (в том числе с использованием векторной оптимизации) уделяется большое внимание, во-первых, в отечественной науке, начиная с ведущих научных школ АН СССР по настоящее время [4-23, 38-45], которые внесли большой вклад в применение методов многокритериальной оптимизации, и, во-вторых, в зарубежной научной деятельности как теоретических [1, 2, 3, 24-33], так и прикладных аспектах [34-38].

При формировании математической модели ТС возможны ситуации, когда известна функциональная зависимость каждой характеристики и ограничений от параметров ТС, такую математическую модель принято называть моделью в условиях полной определенности. Эти математической модели относятся к классу: хорошо структурированные задачи. В тех случаях, когда нет достаточной информации о функциональной зависимости каждой характеристики и ограничений от параметров, определяются, как моделирование в условиях неопределенности. Эти математической модели относятся к классу: плохо структурированных задач, [12 - 18]. В плохо структурированных задачах устранение неопределенности может идти в двух направлениях: первое связано с использованием субъективных оценок и предпочтительности лица, принимающего решения, (ЛПР) при оценке вариантов возможных решений [22]; второе направление устранения неопределенности связано с качественными или количественными описаниями ИС и характеризуется использованием математических методов, регрессионного анализа для преобразования информации – исходных данных, которые могут быть получены, например, по принципу «вход-выход». В рамках второго направления проведено данное исследование. Оценка экспериментальных данных выполняется по некоторому множеству характеристики (критериев) и принятия решений, на



их основе, [34]. Принятие решений на основе таких критериев затруднена, сто связано с несопоставимостью критериев. Анализ этих проблем представлен в работах [6, 10, 22]. В итоге решение принимается на интуитивной основе. Поэтому является важным разработка новых методов моделирования технических систем, оценки исходных данных и принятия решений на их основе.

Цель этой главы направлена на разработку методики построения математической модели технической системы в виде векторной задачи математического программирования.

1.1.2. Математическая модель технической системы в условиях определенности

Функционирование любой ТС зависит от некоторого множества N конструктивных параметров (переменных):

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}^T$ или $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$, которые могут изменяться в некоторых пределах: $x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}, j = \overline{1, N}$, где x_j^{\min} – нижний, $x_j^{\max}, \forall j \in N$ – верхний предел, в рамках которых изменяются параметры технической системы.

Результат функционирования ИС определяется некоторым множеством K технических характеристик (критериев), которые функционально зависят от проектируемых данных (параметров) $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$, в целом они представляют вектор функцию:

$$F(X) = \{f_1(X), f_2(X), \dots, f_K(X)\}^T \text{ или } F(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K}\}^T,$$

на которые наложены функциональные ограничения:

$$f_k^{\min} \leq f_k(X) \leq f_k^{\max}, k = \overline{1, K} \text{ или } G(X) \leq B.$$

Множество критериев (характеристик) технической системы состоит из двух подмножеств K_1 и K_2 : $K = K_1 \cup K_2$ технических характеристик. В подмножестве технических характеристик K_1 их числовые значения желательно получить как можно выше, т.е. максимизировать:

$f_k(X) \rightarrow \max, k = \overline{1, K_1}$, а подмножество технических характеристик K_2 , числовые значения которых желательно получить как можно ниже, т.е. минимизировать:

$$f_k(X) \rightarrow \min, k = \overline{1, K_2}, K_2 \equiv \overline{K_1 + 1, K}.$$

Математическая модель ИС, во-первых, должна включать характеристики системы $F(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K}\}^T$ $K = K_1 \cup K_2$ и ограничения на параметры: $X^{\min} \leq X \leq X^{\max}$.

Математическую модель ТС, решающую в целом проблему выбора оптимальных параметров ТС (оптимального проектного решения), представим в виде Векторной Задачи Математического Программирования (ВЗМП):

$$\text{Opt } F(X) = \{\max F_1(X) = \{\max f_k(X), k = \overline{1, K_1}\}, \quad (1a)$$

$$\min F_2(X) = \{\min f_k(X), k = \overline{1, K_2}\}, \quad (2a)$$

$$\text{при ограничениях: } G(X) \leq 0, f_k^{\min} \leq f_k(X) \leq f_k^{\max}, k = \overline{1, K}, \quad (3a)$$

$$x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}, j = \overline{1, N}, \quad (4a)$$

где X – вектор управляемых переменных (управляемых параметров);

$F(X) = \{f_k, k = \overline{1, K}\}$ – вектор критериев, в котором каждая компонента представляет характеристику технической системы (1a)-(2a), функционально зависящую от переменной X ;

В (3.3a) $G(X) = g_1(X), g_2(X), \dots, g_M(X)\}^T$ – вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование ТС. Они определяются протекающими в ней технологическими, физическими и тому подобными процессами и могут быть представлены функциональными ограничениями, например, $f_k^{\min} \leq f_k(X) \leq f_k^{\max}, k = \overline{1, K}$.



Предполагается, что функции $f_k(X), k = \overline{1, K}$ дифференцируемы и выпуклы, $g_i(X), i = \overline{1, M}$ непрерывны, а заданное ограничениями (3а)-(4а) множество допустимых точек не пусто: $S = \{X \in R^n | G(X) \leq 0, X^{min} \leq X \leq X^{max}\} \neq \emptyset$ и представляет собой компакт.

Критерии и ограничения (1а)-(4а) образуют математическую модель технической системы. Требуется найти такой вектор параметров $X^0 \in S$, при котором каждая компонента вектор - функции $F(X) : F_1(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K_1}\}$ принимает максимальное значение, а вектор функция $F_2(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K_2}\}$ принимает наименьшую величину.

Для решения такого класса векторных задач математического программирования используются методы, основанные на нормализации критериев и принципе гарантированного результата представленные в четвертой части. Они позволяют решать ВЗМП как при равнозначных критериях, так и при заданном приоритете критерия.

1.1.3. Проблемы построения модели технической системы в условиях определенности и неопределенности в совокупности

При построении математической модели ТС (1а)-(4а) возможны два варианта.

Первый вариант, когда известна функциональная зависимость каждого критерия (1а)-(2а), ограничений (3а)-(4а) от параметров, накладываемых на функционирование – её принято называть моделью *в условиях определенности*, которые представлены моделью (1а)-(4а).

Второй вариант, когда нет достаточной информации о функциональной зависимости каждого критерия (1а)-(2а) и ограничений (3а)-(4а) от параметров. Известны лишь дискретные

(как правило, экспериментальные) данные: $X_i = \begin{vmatrix} x_{i1}, \dots, x_{iN} \\ \dots \\ x_{i1}, \dots, x_{iN} \end{vmatrix}, i = \overline{1, M}$, где N множество

параметров, M множество данных, или $X_i = \{x_{ij}, j = \overline{1, N}, i = \overline{1, M}\}$.

Представлено также соответствующее дискретное множество характеристик:

$$I_i(X) = \{(y_k(X_i, i = \overline{1, M})\}^T, = \begin{vmatrix} y_{i1}(X_i), \dots, y_{iK}(X_i) \\ \dots \\ y_{i1}(X_i), \dots, y_{iK}(X_i) \end{vmatrix}.$$

Такое состояние представляет моделирование технической системы *в условиях неопределенности*. Для получения данных $I_i(X) = \{(y_k(X_i, i = \overline{1, M})\}^T$ проводятся экспериментальные исследования технической системы по принципу «вход-выход», при этом формируется задача принятия решений в условиях неопределенности и возникает проблема выбора оптимальной оценки на основе полученных данных.

1.1.4. Построения математической модели технической системы в условиях определенности и неопределенности в совокупности

В реальной жизни условия определенности и неопределенности совмещаются. Модель технической системы так же должна отражать эти условия. Используя обозначения математической модели, преобразуем модель (1а)-(4а) с учетом условий неопределенности, в итоге получим:

«Модель технической системы в условиях определенности и неопределенности»:

$$Opt F(X) = \{\max F_1(X) = \{\max f_k(X), k = \overline{1, K_1^{def}}\}, \quad (5a)$$

$$\max I_1(X) \equiv \{\max y_k(X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}, \quad (6a)$$

$$\min F_2(X) = \{\min f_k(X), k = \overline{1, K_2^{def}}\}, \quad (7a)$$



$$\min I_2(X) \equiv \{\min y_k(X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}, \quad (8a)$$

$$\text{ограничения } f_k^{min} \leq f_k(X) \leq f_k^{max}, k = \overline{1, K}, \quad (9a)$$

$$x_j^{min} \leq x_j \leq x_j^{max}, j = \overline{1, N}, \quad (10a)$$

где $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ — это вектор управляемых переменных (параметров) технической системы;

$F(X) = \{F_1(X) F_2(X) I_1(X) I_2(X)\}$ представляет векторный критерий, каждая компонента которого является вектором критериев (характеристик) ТС (5а)-(8а), которые функционально зависят от дискретных значений вектора переменных X , где в (5а) и (7а)

K_1^{def}, K_2^{def} (*definiteness*), а в (6а) и (8а) K_1^{unc}, K_2^{unc} (*uncertainty*) множество критериев \max и \min сформированные в условиях определенности и определенности.

1.1.5. Пример. Моделирование и оптимизация параметров магнитоэлектрических линейных индукторных электродвигателей (ЛД) на постоянном токе

К содержательному классу технических систем, которые могут быть представлены векторной задачей (5а)-(10а), можно отнести достаточно большое их количество задач из различных отраслей экономики государства: электротехнической, авиационно-космической, металлургической (выбор оптимальной структуры материала), химической и т.п.

В качестве примера представим работу Левицкого В. Л. «Моделирование и оптимизация параметров магнитоэлектрических линейных индукторных электродвигателей (ЛД) постоянного тока» [7, с.50-120]. Проектировалась конструкция — форсируемый ЛД (ФЛД), модель которого была сведена к векторной задаче математического программирования (1а)-(4а). При этом вектор конструктивных параметров $X = \{x_1, x_2, \dots, x_5\}$ состоял из: x_1 — воздушного зазора δ , x_2 — зубцового шага, x_3 — числа зубцов, x_4 — высоты концентратора, x_5 — коэффициента полюсного перекрытия. Вектор конструктивных критериев $F(X) = f(X), p(X), \vartheta(X), \dots$ включал: $f(X)$ — номинальное тяговое усилие, $p(X)$ — номинальную мощность, $\vartheta(X)$ — номинальный КПД и т.п., всего десять показателей. Для построения зависимостей $F(X)$ от названных конструктивных параметров X был использован центральный ортогональный план второго порядка [7 с.96]. Из другой отрасли представим работу: «... многокритериальная оптимизация статических режимов массообменных процессов на примере абсорбции в производстве газоразделения», [23].

Таким образом, экспериментальные данные, как из задачи ФЛД, так и подобных ТС из других отраслей, могут быть представлены в виде теоретической (системной) задачи (1а)-(4а).

В данной работе техническая система рассматривается в статике. Технические системы могут рассматриваться в динамике, используя дифференциально-разностные методы преобразования за небольшой дискретный промежуток времени $\Delta t \in T$.

1.2. Математическое моделирование технологического процесса для принятия оптимального управлеченческого решения

1.2.1. Математическая модель технологического процесса в условиях определенности

В качестве объекта исследования инженерных систем мы используем «технологический процесс». Постановка проблемы принятия решений в технологии при производстве изделий выполнена в соответствии с [15].



Рассматривается технологический процесс (например, Гибридная лазерная дуговая сварка (HLAW) (Hybrid Laser Arc Welding (HLAW), [68], в которой сплав ZE41-T5 был выбран как материал, который нужно сварить с сплавом AZ61 как материал заполнителя). Деятельность технологического процесса зависит от определенного множества условий - конструктивных параметров: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}^T$, or $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$, (например: мощности лазера, (laser power); скорости перемещения (travel speed); скорости подачи проволоки, (wire feed rate); тока, (current); частоты (frequency)). Обозначим N - множество конструктивных параметров. Каждый параметр технологического процесса лежит в заданных пределах: $x_j^{min} \leq x_j \leq x_j^{max}, j = \overline{1, N}$, или $X^{min} \leq X \leq X^{max}$, где $x_j^{min}, x_j^{max}, \forall j \in N$ - нижний и верхний пределы изменения вектора параметров технологического процесса, N - множество параметров.

Результат функционирования определяется набором критериев (технологических характеристик):

$F(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K}\}^T$, которые функционально зависят от конструктивных параметров технологического процесса $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$, (например: глубина сварного шва (weld depth); недозагрузка (underfill); процентный дефект (percentage defect); накопленная длина пор (total accumulated pore length)). В совокупности все технологические характеристики представляют вектор-функцию:

$F(X) = \{f_1(X), f_2(X), \dots, f_K(X)\}^T$ или $F(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K}\}^T$,
где $K, (K)$ – множество (число) технологических характеристик.

Множество технологических характеристик K подразделяется на подмножества K_1, K_2 : $K = K_1 \cup K_2, K_1 \subset K, K_2 \subset K$.

K_1 представляет подмножество технологических характеристик, числовые величины которых желательно получить, как можно выше: $f_k(X) \rightarrow max, k = \overline{1, K_1}$.

K_2 представляет подмножества технологических характеристик, числовые величины которых желательно получить, как можно ниже: $f_k(X) \rightarrow min, k = \overline{1, K_2}$.

Математическая модель должна, во-первых, отражать цели технологического процесса, которые представлены характеристиками $F(X)$, во-вторых, учитывать ограничения $X^{min} \leq X \leq X^{max}$. Математическая модель технологического процесса, в целом решающего проблему выбора оптимальных параметров технологического процесса, представить в виде векторной задачи оптимизации.

$$Opt F(X) = \{max F_1(X) = \{max f_k(X), k = \overline{1, K_1}\}, \quad (1b)$$

$$\min F_2(X) = \{\min f_k(X), k = \overline{1, K_2}\}, \quad (2b)$$

$$\text{при ограничениях: } f_k^{min} \leq f_k(X) \leq f_k^{max}, k = \overline{1, K}, \quad (3b)$$

$$G(X) \leq 0, x_j^{min} \leq x_j \leq x_j^{max}, j = \overline{1, N}, \quad (4b)$$

где $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$, — это вектор управляемых переменных (конструктивных параметров) технологического процесса;

$F(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K}\}$ – это векторный критерий, каждая компонента которого представляет характеристику технологического процесса (1b)-(2b), функционально зависящую от вектора переменных X ;

в (3.3b) $G(X) = \{g_i(X), i = \overline{1, M}\}^T$ – вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование технологического процесса, M – множество ограничений. Ограничения



определяются протекающими в них технологическими, физическими и тому подобными процессами и могут быть представлены функциональными ограничениями, например,

$$f_k^{\min} \leq f_k(X) \leq f_k^{\max}, k = \overline{1, K}.$$

Предполагается, что функции $f_k(X), k = \overline{1, K}$ дифференцируемы и выпуклы, $g_i(X), i = \overline{1, M}$ непрерывны, а $\mathbf{S} = \{X \in R^n | G(X) \leq 0, X^{\min} \leq X \leq X^{\max}\} \neq \emptyset$.

Соотношения (1b)-(4b) образуют математическую модель технологического процесса.

Требуется определить такой вектор параметров $X^o \in \mathbf{S}$, при котором каждая компонента вектора – функции:

$F_1(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K_1}\}$ принимает максимально возможное значение, а вектор – функция: $F_2(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K_2}\}$ принимает минимальное значение.

1.2.2. Математическая модель технологического процесса в условиях определенности и неопределенности в совокупности

Математическая модель технологического процесса (1b)-(4b) выполнена в условиях определенности. В реальной жизни условия определенности и неопределенности совмещаются. Модель технологического процесса так же должна отражать эти условия. Используя обозначения математической модели, преобразуем моделью (1b)-(4b) с учетом условий неопределенности, в итоге получим:

«Модель технологического процесса в условиях определенности и неопределенности»:

$$Opt F(X) = \{ \max F_1(X) = \{ \max f_k(X), k = \overline{1, K_1^{\text{def}}}\}, \quad (5b)$$

$$\max I_1(X) \equiv \{ \max y_k(X_i, i = \overline{1, M}) \}^T, k = \overline{1, K_1^{\text{unc}}}, \quad (6b)$$

$$\min F_2(X) = \{ \min f_k(X), k = \overline{1, K_2^{\text{def}}}\}, \quad (7b)$$

$$\min I_2(X) \equiv \{ \min y_k(X_i, i = \overline{1, M}) \}^T, k = \overline{1, K_2^{\text{unc}}}\}, \quad (8b)$$

ограничения $f_k^{\min} \leq f_k(X) \leq f_k^{\max}, k = \overline{1, K}, \quad (9b)$

$$G(X) \leq 0, x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}, j = \overline{1, N}, \quad (10b)$$

где $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ – это вектор управляемых переменных (параметров) технологического процесса;

$F(X) = \{F_1(X) F_2(X) I_1(X) I_2(X)\}$ представляет векторный критерий, каждая компонента которого является вектором характеристик (критериев) технологического процесса (5b)-(8b), которые функционально зависят от дискретных значений вектора переменных, где X в (5b) и (7b) $K_1^{\text{def}}, K_2^{\text{def}}$ (*definiteness*), а в (6b) и (8b) $K_1^{\text{unc}}, K_2^{\text{unc}}$ (*uncertainty*) множество критериев max и min сформированные в условиях определенности и неопределенности.

1.3. Математическая модель структуры материала для принятия оптимального управлеченческого решения

1.3.1. Проблема моделирования структуры материала

Химический состав материала изделия определяется (на единицу объема, веса) процентным содержанием некоторого множества компонент материала, которые в сумме равны ста процентам. Состав материала, характеризуется определенным набором функциональных характеристик, которые включают в себя механические и физико-химические свойства материалов. Одна группа свойств (функциональных характеристик)



материала характеризуется тем, что их желательно по своей числовой величине получить как можно больше (например, прочность), другая группа свойств характеризуется тем, что их желательно по своей числовой величине получить как меньше. Улучшение по одной из этих характеристик приводит к ухудшению другой. В целом требуется подобрать такой состав материала, чтобы все свойства материала были как можно лучше в совокупности.

1.3.2. Математическая модель структуры материала в условиях определенности

Рассматривается состав материала какого-либо изделия, технической системы, которая зависит от ряда компонент материала: $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_V\}$, где V - множества компонент материала, $Y = \{y_j, j = \overline{1, V}\}$, V - число компонент, из которых может быть составлен (изготовлен) материал, y_v - величина в процентах v -ой компоненты материала, которая лежит в заданных пределах: $y_v^{\min} \leq y_v \leq y_v^{\max}$, $v = \overline{1, V}$, где $y_v^{\min}, y_v^{\max}, \forall v \in V$ – это нижний и верхний пределы изменения вектора компонент материала.

$$\sum_{v=1}^V y_v = 100\%, \text{ сумма всех компонент материала равна ста процентам.}$$

Состав материала оценивается набором (множеством) K физических свойств материала: $H(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K}\}$, которые функционально зависят от конструктивных параметров: $Y = \{y_v, k = \overline{1, V}\}^T$;

k - индекс вида физического свойства материала, $k = \overline{1, K}$, где K - число видов свойств (функциональных характеристик) материала, представим их в виде вектор - функции.

$H(Y)$ представляет вектор-функцию (векторный критерий), имеющая K – компонент-функций, (K - мощность множества K): $H(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K}\}$. Множество физических свойств материала K включает подмножество K_1 компонент максимизации и подмножество K_2 компонент минимизации: $K = K_1 \cup K_2$;

$H_1(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K_1}\}$ – векторный критерий, в котором каждая компонента максимизируется, K_1 – это число критериев, а $K_1 = \overline{1, K_1}$ - множество критериев максимизации. Предполагаем, что $H_1(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K_1}\}$ непрерывные вогнутые функции (иногда будем их называть критериями максимизации);

$H_2(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K_2}\}$ - это векторный критерий, каждая компонента которого минимизируется, $K_2 = \overline{K_1 + 1, K} = \overline{1, K_2}$ - множество критериев минимизации, K_2 – число. Предполагаем, что $h_k(Y), k = \overline{1, K_2}$ - непрерывные выпуклые функции, будем иногда их называть критериями минимизации: $K = K_1 \cup K_2, K_1 \subset K, K_2 \subset K$.

Характеристики материала $H(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K}\}$ мы используем как критерии, а пределы изменения, накладываемые на каждый вид компонент, как параметрические ограничения. Математическая модель материала, которая решает в целом проблему выбора оптимальной структуры материала (оптимального проектного решения), представим в виде векторной задачи оптимизации:

$$Opt F(X) = \{\max H_1(X) = \{\max h_k(X), k = \overline{1, K_1}\}, \quad (1c)$$

$$\min H_2(X) = \{\min h_k(X), k = \overline{1, K_2}\}, \quad (2c)$$

$$\text{при ограничениях: } G(Y) \leq 0, h_k^{\min} \leq h_k(X) \leq h_k^{\max}, k = \overline{1, K}, \quad (3c)$$

$$\sum_{v=1}^V y_v(t) = 100\%, \quad y_v^{\min} \leq y_v \leq y_v^{\max}, v = \overline{1, V}, \quad (4c)$$

где $Y = \{y_j, j = \overline{1, V}\}$ - вектор компонент материала (переменных);

$H(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K}\}$ - векторный критерий, каждая функция которого представляет характеристику материала, функционально зависящую от вектора переменных Y ;

$G(Y) = \{g_1(Y), \dots, g_M(Y)\}^T$ - вектор-функция ограничений, накладываемых на структуру материала, M – множество ограничений.



Предполагается, что функции $H(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K}\}$ дифференцируемы и выпуклы, $G(Y) = \{g_i(Y), i = \overline{1, M}\}^T$ непрерывны, а заданное ограничениями (3c)-(4c) множество точек S не пусто, представляет собой компакт: $S = \{X \in R^n | G(Y) \leq 0, Y^{min} \leq Y \leq Y^{max}\} \neq \emptyset$.

Соотношения (1c)-(4c) образуют математическую модель материала. Требуется найти, используя модель (3.1c)-(3.4c), такой вектор параметров $Y^o \in S$, при котором каждая характеристика (компонент) вектор – функции: $H_1(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K_1}\}$ принимает максимально возможное значение, а вектор - функции $H_2(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K_2}\}$ принимает минимальное значение. В совокупности математическую модель материала (1c)-(4c) можно трактовать как системный подход к исследованию структуры материала.

1.3.3. Математическая модель структуры материала в условиях определенности и неопределенности в совокупности

Математическая модель структуры материала (1c)-(4c) выполнена в условиях определенности. В реальной жизни условия определенности и неопределенности совмещаются. Модель структуры материала так же должна отражать эти условия. Используя обозначения математической модели, преобразуем моделью (1b)-(4b) с учетом условий неопределенности, в итоге получим:

«Модель структуры материала в условиях определенности и неопределенности»:

$$Opt F(X) = \{\max H_1(X) = \{\max h_k(X), k = \overline{1, K_1^{def}}\}, \quad (5c)$$

$$\max I_1(X) \equiv \{\max y_k(X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}, \quad (6c)$$

$$\min H_2(X) = \{\min h_k(X), k = \overline{1, K_2^{def}}\}, \quad (7c)$$

$$\min I_2(X) \equiv \{\min y_k(X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_2^{unc}}\}, \quad (8c)$$

$$\text{при ограничениях: } G(Y) \leq 0, h_k^{min} \leq h_k(X) \leq h_k^{max}, k = \overline{1, K}, \quad (9c)$$

$$\sum_{v=1}^V y_v(t) = 100\%, y_v^{min} \leq y_v \leq y_v^{max}, v = \overline{1, V}, \quad (10c)$$

где $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ – это вектор управляемых переменных (параметров) структуры материала; $F(X) = \{F_1(X) F_2(X) I_1(X) I_2(X)\}$ – это векторный критерий, каждая компонента которого является вектором критериев (характеристик) структуры материала (5c)-(8c), которые функционально зависят от дискретных значений вектора переменных X , где в (5c) и (7c) K_1^{def}, K_2^{def} (*definiteness*); K_1^{unc}, K_2^{unc} (*uncertainty*), в (6c) и (8c) множество критериев \max и \min сформированные в условиях определенности и определенности.

1.4. Виды задач, возникающих в процессе моделирования, проектирования и принятия оптимального решения - выбора параметров сложных инженерных систем

Задачи, которые возникают в процессе моделирования, проектирования и принятия оптимального решения - выбора оптимальных параметров в сложных инженерных системах на базе векторной оптимизации включает последовательно три вида.

1 вид. Решение векторной задачи математического программирования при равнозначных критериях. Полученный результат является основой для дальнейшего исследования системы. При этом используется метод решения векторной задачи при равнозначных критериях. Если полученный результат удовлетворяет лицу, принимающему решения, (ЛПР - проектировщик), то он берется за основу. Если не удовлетворяет, то переходим ко второму виду (прямая задача) или третьему виду решения векторных задач (Обратная задача).



2 вид. Решение прямой задачи векторной оптимизации, которая состоит в следующем: «Какие будут показатели (характеристики), если изменить параметры сложных технических систем». - Используется метод решения векторной задачи при равнозначных критериях.

3 вид. Решение обратной задачи векторной оптимизации, которая состоит в следующем: «Какие будут параметры сложных технических систем при заданных характеристиках». - Используется метод решения векторной задачи при заданном приоритете критерия.

2. Многомерная математика. Теория, Методы.

Математические модели в условиях определенности и неопределенности: технической системы (1а)-(4а), (5а)-(10а), технологического процесса (1б)-(4б), (5б)-(10б), структуры материала (1с)-(4с), (5с)-(10с) представлены векторными задачами математического программирования (ВЗМП). Дальнейшее развитие исследования работ по теории векторной оптимизации привела к формированию "Многомерной математики". В этом аспекте мы представим четыре раздела:

Векторная задача математического программирования;

Аксиоматика, принцип оптимальности и конструктивные методы векторной оптимизации с равнозначными критериями;

Аксиоматика, принцип оптимальности и конструктивные методы векторной оптимизации с заданным приоритетом критерия;

Прикладная многомерная математика: Векторная задача нелинейного программирования – модель развития инженерных систем.

2.1. Векторная задача математического программирования.

2.1.1. Введение в многомерную математику.

В качестве представителя многомерной математики мы сформулируем задачу математического программирования, представленную множеством функций, которые определяют многомерность исследуемого объекта. Каждая функция этого множества функций имеют различную целевую направленность: максимизации или минимизации, которые в совокупности изменяются на определенном (не пустом и замкнутом) множестве переменных (параметров). Не нарушая общности множество функций можно представить в виде вектора функций. В итоге получаем векторную задачу математического программирования (ВЗМП). На базе векторной задачи оптимизации представим теоретические проблемы необходимые для ее решения, которые включают аксиоматику (теоретические основы), принцип оптимальности и конструктивные методы решения векторных задач с равнозначными критериями и заданным приоритетом критерия, [6, 15, 29, 31, 33].

2.1.2. Векторная задача математического программирования

Векторная задача математического программирования (ВЗМП) – это стандартная задача математического программирования, имеющая некоторое множество критериев, которые в совокупности представляют вектор критериев.

ВЗМП подразделяются на однородные и неоднородные ВЗМП.

Однородные ВЗМП максимизации – это векторная задача, у которой каждая компонента множества критериев направлена на максимизацию.

Однородные ВЗМП минимизации – это векторная задача, у которой каждая компонента множества критериев направлена на минимизацию.

Неоднородные ВЗМП – это векторная задача, у которой множество критериев разделено на два подмножества (вектора) критериев – максимизации и минимизации соответственно, т. е. неоднородные ВЗМП – это объединение двух видов однородных задач.



В соответствии с этими определениями представим выпуклую векторную задачу математического программирования с неоднородными критериями [6, 20, 22].

$$Opt F(X) = \{\max F_1(X) = \{\max f_k(X), k = \overline{1, K_1}\}, \quad (1)$$

$$\min F_2(X) = \{\min f_k(X), k = \overline{1, K_2}\}, \quad (2)$$

$$f_k^{\min} \leq f_k(X) \leq f_k^{\max}, G(X) \leq B, \quad (3)$$

$$X^{\min} \leq X \leq X^{\max}, \quad (4)$$

где $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ - вектор переменных, т.е. это вектор из N -мерного евклидова \mathbf{R}^N , $X^{\min} \leq X \leq X^{\max}$ - параметрические ограничения;

$F(X)$ - вектор-функция (векторный критерий), имеющая K - компонент-функций, (K - мощность множества K), $F(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K}\}$. Множество K состоит из подмножества K_1 компонент максимизации и подмножества K_2 минимизации; $K = K_1 \cup K_2$, для оценки совокупности критериев вводится обозначение операция «*opt*», которое включает *max* и *min*;

$F_1(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K_1}\}$ – это векторный критерий, каждая компонента которого максимизируется, K_1 – число критериев, а $K_1 = \overline{1, K_1}$ - множество критериев максимизации (задача (1), (3), (4) представляют собой ВЗМП с однородными критериями максимизации). В дальнейшем будем предполагать, что $f_k(X), k = \overline{1, K_1}$ - непрерывные вогнутые функции (иногда будем их называть критериями максимизации);

$F_2(X) = \{f_k(X), k = \overline{1, K_2}\}$ - векторный критерий, каждая компонента которого минимизируется, $K_2 = \overline{K_1 + 1, K_1 + K_2}$ - множество критериев минимизации, K_2 – число, (задача (2) -(4) это ВЗМП с однородными критериями минимизации). Предполагаем, что $f_k(X), k = \overline{1, K_2}$ - непрерывные выпуклые функции:

$$K_1 \cup K_2 = K, K_1 \subset K, K_2 \subset K. \quad (5)$$

f_k^{\min}, f_k^{\max} – минимальная и максимальная величина k -го критерия в ограничениях,

$G(X) \leq B, X \geq 0$ – стандартные ограничения, $g_i(X) \leq b_i, i = 1, \dots, M$, где b_i - набор вещественных чисел, а функции $g_i(X)$ предполагаются непрерывными и выпуклыми.

$$\text{Обозначим: } S = \{X \in \mathbf{R}^n | G(X) \leq 0, X^{\min} \leq X \leq X^{\max}\} \neq \emptyset \quad (6)$$

это допустимое множество точек (или более кратко - допустимое множество), задающиеся стандартными ограничениями (3)-(4) и тривиальными ограничениями $X \geq 0$. Предполагаем, что допустимое множество точек не пусто и представляет собой компакт.

Векторная функция (критерий) минимизации $F_2(X)$ может быть преобразован в векторную функцию (критерий) максимизации умножением каждой компоненты $F_2(X)$ на минус единицу. Векторный критерий $F_2(X)$ введен в ВЗМП (1)-(4) для того, чтобы показать, что в задаче имеется два подмножества критериев K_1, K_2 с принципиально различными направлениями оптимизации. Предполагаем, что точки оптимума, полученные по каждому критерию, не совпадают хотя бы для двух критериев. Если все точки оптимума совпадают между собой для всех критериев, то считаем решение тривиально.

2.1.3. Аксиомы и Аксиоматические методы

Аксиома — это утверждение, не требующее логического доказательства. На основе этих утверждений (исходных положений) строится та или иная теория.

Аксиоматический метод — это способ построения научной теории, при котором в основу теории кладутся некоторые исходные положения, называемые Аксиомами теории. В итоге все остальные положения теории получаются как логические следствия аксиом, [1, 2].

В математике Аксиоматический метод зародился в работах древнегреческих геометров. Образцом аксиоматического метода является древнегреческий ученый Евклид, аксиомы которого были заложены в его знаменитом сочинении «Начала». Дальнейшее развитие



аксиоматического метода получил в работах Д. Гильберта в виде метода формализма системы. Общая схема построения произвольной формальной системы («S») включает:

1. Язык системы («S»), в том числе алфавит – это перечень элементарных символов; правила образования (синтаксис), по которым строится формулы «S».
2. Аксиомы системы «S», которые представляют некоторое множество формул.
3. Правила вывода системы «S» [2].

В приложении к решению задачи векторной оптимизации (многомерной математики) аксиоматика подразделяется на два раздела:

1. Аксиоматика решения задачи векторной оптимизации с равнозначными критериями;
2. Аксиоматика решения задачи векторной оптимизации с заданным приоритетом критериев.

Только при построении первоначальной аксиоматики возможно в дальнейшем построение принципа оптимальности и вытекающих из него алгоритмов решения векторных задач математического программирования.

2.2. Аксиоматика, принцип оптимальности и конструктивные методы векторной оптимизации с равнозначными критериями

2.2.1. Аксиоматика решения векторной задачи оптимизации с равнозначными критериями

В соответствии с вышеизложенной трактовкой Язык системы многомерной математики включает: во-первых, нормализацию критериев, во-вторых, относительную оценку критериев (функций), и, в-третьих, минимальный относительный уровень.

Определение 1. (Нормализация критерия).

Нормализация критериев (математическая операция: сдвиг плюс нормирование) представляет однозначное отображение функции $f_k(X) \forall k \in K$, в одномерное пространство \mathbf{R}^1 (сама функция $f_k(X) \forall k \in K$ представляет собой функцию преобразования из N -мерного евклидова пространства \mathbf{R}^N в \mathbf{R}^1). Для нормализации критериев в векторных задачах будут использоваться линейные преобразования: $f_k(X) = a_k f'_k(X) + c_k \forall k \in K$, или

$$f_k(X) = (f'_k(X) + c_k)/a_k \forall k \in K, \quad (7)$$

где $f'_k(X), k = \overline{1, K}$ - старое (до нормализации) значение критерия; $f_k(X), k = \overline{1, K}$ - нормализованное значение, a_k, c_k - постоянные.

Нормализация критериев $f_k(X) = (f'_k(X) + c_k)/a_k \forall k \in K$ представляет простое (линейное) инвариантное преобразование полинома, в результате которого структура полинома остается неизменной. В оптимационной задаче нормализация критериев $f_k(X) = (f'_k(X) + c_k)/a_k \forall k \in K$ не влияет на результат решения. Действительно, если решается выпуклая оптимизационная задача:

$$\max_{X \in S} f(X), \text{ то в точке оптимума } X^* \in S: \frac{df(X^*)}{dx} = 0. \quad (8)$$

В общем случае (в том числе с нормализацией критерия (1)) решается задача:

$$\max_{X \in S} (a_k f'_k(X) + c_k), \quad (9)$$

$$\text{то в точке оптимума } X^* \in S: \frac{d(a_k f'_k(X^*) + c_k)}{dx} = a_k \frac{d(f'_k(X^*))}{dx} + \frac{dc_k}{dx} = 0. \quad (10)$$

Результат идентичен, т.е. точка оптимума $X_k^*, k = \overline{1, K}$ является одной и той же для ненормализованных и нормализованных задач.

Определение 2. (Относительная оценка функции (критерия)).

В векторной задаче (1)-(4) выполним нормализацию (7) вида:



$$\lambda_k(X) = \frac{f_k(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, \forall k \in K \quad (11)$$

это относительная оценка k -го критерия в точке $X \in S$, где f_k^* наилучшая величина k -го критерия, полученная при решении ВЗМП (1)-(4) отдельно по k -му критерию;

f_k^0 - наихудшая величина k -го критерия (антиоптимум) в точке X_k^0 (верхний индекс 0 - ноль) на допустимом множестве S ;

в задаче на \max (1), (3), (4) величина f_k^0 является наименьшим значением k -го критерия: $f_k^0 = \min_{X \in S} f_k(X) \forall k \in K_1$,

а в задаче на \min (2), (3), (4) величина f_k^0 является наибольшим значением k -го критерия: $f_k^0 = \max_{X \in S} f_k(X) \forall k \in K_2$.

Относительная оценка $\lambda_k(X) \forall k \in K$, во-первых, измеряется в относительных единицах; во-вторых, относительная оценка $\lambda_k(X) \forall k \in K$: на допустимом множестве меняется с нуля в точке $X_k^0: \forall k \in K \lim_{X \rightarrow X_k^0} \lambda_k(X) \lambda_k(X) = 0$, к единице в точке оптимума X_k^* :

$$\forall k \in K \lim_{X \rightarrow X_k^*} \lambda_k(X) = 1: \forall k \in K 0 \leq \lambda_k(X) \leq 1, X \in S, \quad (12)$$

В результате такой нормализации все критерии ВЗМП (1)-(4) соизмеримы в относительных единицах, что позволяет сравнивать их друг с другом при совместной оптимизации.

Определение 3. Операция сравнения относительных оценок критерия между собой.

Так как, любая функция (критерий) представлен в относительных оценках функций $\lambda_k(X) \forall k \in K$, которые лежат пределах (2.8), то возможно сравнение относительных оценок по числовой величине. Для сравнения используется операция «вычитания». Если сравниваются две функции (критерия), измеренные в относительных оценках $\lambda_{k=1}(X)$ и $\lambda_{k=2}(X) \forall k \in K$, то возможны три ситуации:

первая, когда $\lambda_{k=1}(X) > \lambda_{k=2}(X)$;

вторая, когда $\lambda_{k=1}(X) = \lambda_{k=2}(X)$;

третья, когда $\lambda_{k=1}(X) < \lambda_{k=2}(X)$.

Первая и третья ситуация исследуется в разделе 2.3. В разделе 2 исследуется вторая ситуация.

2.2.2. Аксиоматика векторной оптимизации с равнозначными критериями

Аксиома 1. (О равнозначности критериев в допустимой точке векторной задачи математического программирования)

В векторной задаче два критерия с индексами $k \in K, q \in K$ будем считать равнозначными в точке $X \in S$, если относительные оценки по k -му и q -му критерию равны между собой в этой точке, т. е. $\lambda_k(X) = \lambda_q(X), k, q \in K$.

Пояснение. Если в точке $X \in S$ функции (критерии) будут равны:

$\lambda_l(X) = 0,45 l \in K$ и $\lambda_q(X) = 0,45, q \in K$ (т.е. 45% от своей оптимальной величины, которая в относительных единицах равна 1), то такие критерии не «равны» друг другу, а равнозначны по своему числовому значению. И каждый из них несет свой функциональный смысл, который может быть получен, используя нормализацию критериев (11).

Определение 4. (Определение минимального уровня среди всех относительных оценок критериев). Относительный уровень λ в векторной задаче представляет нижнюю оценку точки $X \in S$ среди всех относительных оценок $\lambda_k(X), k = \overline{1, K}$:



$$\forall X \in S \lambda \leq \lambda_k(X), k = \overline{1, K}, \quad (13)$$

нижний уровень для выполнения условия (13) в точке $X \in S$ определяется формулой

$$\forall X \in S \lambda = \min_{k \in K} \lambda_k(X). \quad (14)$$

Соотношения (13) и (14) являются взаимосвязанными. Они служат переходом от операции (14) определения \min к ограничениям (13) и наоборот. Уровень λ позволяет объединить все критерии в векторной задаче одной числовой характеристикой λ и производить над ней определенные операции, тем самым, выполняя эти операции над всеми критериями, измеренными в относительных единицах. Уровень λ функционально зависит от переменной $X \in S$, изменяя X , можем изменять нижний уровень - λ .

2.2.3. Принцип оптимальности векторной оптимизации с равнозначными критериями

Определение 5. (Принцип оптимальности 1 с равнозначными критериями).

Векторная задача математического программирования при равнозначных критериях решена, если найдена точка $X^o \in S$ и максимальный уровень λ^o (верхний индекс o - оптимум) среди всех относительных оценок такой, что

$$\lambda^o = \max_{X \in S} \min_{k \in K} \lambda_k(X) \quad (15)$$

Используя взаимосвязь выражений (13) и (14), преобразуем максиминную задачу (15) в экстремальную задачу:

$$\lambda^o = \max_{X \in S} \lambda \quad (16)$$

$$\text{при ограничениях } \lambda \leq \lambda_k(X), k = \overline{1, K}. \quad (17)$$

Полученную задачу (16)-(17) назовем λ -задачей. λ -задача (16)-(17) имеет $(N+1)$ размерность, как следствие результат решения λ -задачи (16)-(17) представляет собой оптимальный вектор $X^o \in R^{N+1}$, $(N+1)$ -я компонента которого суть величина λ^o , т. е. $X^o = \{x_1^o, x_2^o, \dots, x_N^o, x_{N+1}^o\}$, при этом $x_{N+1}^o = \lambda^o$, $(N+1)$ компонента вектора X^o выделена в λ^o .

Полученная пара $\{\lambda^o, X^o\} = X^o$ характеризует оптимальное решение λ -задачи (16)-(17) и соответственно векторной задачи математического программирования (1)-(4) с равнозначными критериями, решенную на основе нормализации критериев и принципе гарантированного результата. Назовем в оптимальном решении $X^o = \{\lambda^o, X^o\}$, X^o - оптимальной точкой, а λ^o - максимальным уровнем.

Важным результатом алгоритма решения векторной задачи с равнозначными критериями (1)-(4) является следующая теорема.

Теорема 1. (Теорема о двух наиболее противоречивых критериях в векторной задаче математического программирования с равнозначными критериями).

В выпуклой векторной задаче математического программирования (1)-(4) при эквивалентных критериях, решенной на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата, в оптимальной точке $X^o = \{\lambda^o, X^o\}$ всегда имеется два критерия - обозначим их индексами $q \in K, p \in K$ (которые являются самыми противоречивыми из множества критериев $k = \overline{1, K}$), и для которых выполняется равенство:

$$\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_p(X^o), q, p \in K, X \in S, \quad (18)$$

и другие критерии определяются неравенством:

$$\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), \forall k \in K, q \neq p \neq k. \quad (19)$$

Впервые доказательство теоремы 1 представлено в [6, стр.22], в дальнейшем повторено в работе [10, стр.234]. Вместе с тем, что точка X^o является оптимальным решением ВЗМП.

2.2.4. Математический алгоритм решения задачи векторной оптимизации с равнозначными критериями



Для решения векторной задачи математического программирования (1)-(4) разработан метод, основанный на нормализации критериев (7), аксиоматике и принципе максимина (гарантированного результата) (11). Конструктивный метод решения векторной задачи оптимизации с равнозначными критериями включает два блока: 1-й блок «Системный анализ» - разделен на три шага; 2-й блок «Принятие оптимального решения», включающий два шага: построения λ -задачи и ее решения.

Блок 1. Системный анализ.

Шаг 1. Решается задача (1)-(4) по каждому критерию отдельно, т.е. для $\forall k \in K_1$ решается на максимум, а для $\forall k \in K_2$ решается на минимум.

В результате получим:

X_k^* - точка оптимума по соответствующему критерию, $k = \overline{1, K}$;

$f_k^* = f_k(X_k^*)$ – величина k -го критерия в этой точке, $k = \overline{1, K}$.

Шаг 2. Определяем наихудшую величину каждого критерия (антиоптимум): $f_k^0, k = \overline{1, K}$. Для чего решается задача (1)-(4) для каждого критерия $k = \overline{1, K_1}$ на минимум:

$$f_k^0 = \min f_k(X), G(X) \leq B, X \geq 0, k = \overline{1, K_1}$$

для каждого критерия $k = \overline{1, K_2}$ на максимум:

$$f_k^0 = \max f_k(X), G(X) \leq B, X \geq 0, k = \overline{1, K_2}. \quad (20)$$

В результате решения получим: $X_k^0 = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ - точка оптимума по соответствующему критерию, $k = \overline{1, K}$; $f_k^0 = f_k(X_k^0)$ – величина k -го критерия в точке, $X_k^0, k = \overline{1, K}$.

Шаг 3. Выполняется системный анализ множества точек, оптимальных по Парето. В точках $X^* = \{X_k^*, k = \overline{1, K}\}$ определяются величины целевых функций $F(X^*)$, относительных оценок $\lambda(X^*)$: $\lambda_k(X) = \frac{f_k(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, \forall k \in K$.

$$F(X^*) = \{f_k(X_k^*), q = \overline{1, K}, k = \overline{1, K}\} = \begin{vmatrix} f_1(X_1^*), \dots, f_K(X_1^*) \\ \dots \\ f_1(X_K^*), \dots, f_K(X_K^*) \end{vmatrix}, \quad (21)$$

$$\lambda(X^*) = \{\lambda_q(X_k^*), q = \overline{1, K}, k = \overline{1, K}\} = \begin{vmatrix} \lambda_1(X_1^*), \dots, \lambda_K(X_1^*) \\ \dots \\ \lambda_1(X_K^*), \dots, \lambda_K(X_K^*) \end{vmatrix}. \quad (22)$$

В целом по задаче относительная оценка (22) $\lambda_k(X), k = \overline{1, K}$ лежит в пределах:
 $0 \leq \lambda_k(X) \leq 1, k = \overline{1, K}$.

Блок 2. Принятие оптимального решения в ВЗМП. Включает два шага – 4, 5.

Шаг 4. Построение λ -задачи. Создание λ -задачи осуществляется в два этапа: первоначально строится максиминная задача оптимизации с эквивалентными критериями, которые на втором этапе преобразуются в стандартную задачу математического программирования, названной λ -задачей. Для построения максиминная задача используем определение 2:

$$\forall X \in S \quad \lambda = \min_{k \in K} \lambda_k(X).$$

Нижний уровень λ максимизируем по $X \in S$. В результате сформулируем максиминную задачу оптимизации с нормализованными критериями:

$$\lambda^0 = \max_{X \in S} \min_{k \in K} \lambda_k(X). \quad (23)$$

На втором этапе задача (23) преобразуется в стандартную задачу математического программирования, названную λ -задача:



$$\lambda^o = \max_{X \in S} \lambda, \quad (24)$$

$$\lambda - \lambda_k(X) \leq 0, k = \overline{1, K}, \rightarrow \lambda - \frac{f_k(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0} \leq 0, k = \overline{1, K}, \quad (25)$$

$$G(X) \leq B, X \geq 0, \quad G(X) \leq B, X \geq 0, \quad (26)$$

где вектор неизвестных X имеет размерность $N + 1: X = \{\lambda, x_1, \dots, x_N\}$.

Шаг 5. Решение λ -задачи. λ -задача (24)-(26) – стандартная задача выпуклого программирования и для ее решения используются стандартные методы, в результате решения λ -задачи получим:

$$X^o = \{\lambda^o, X^o\} - точку оптимума; \quad (27)$$

$$f_k(X^o), k = \overline{1, K} - величины критериев в этой точке; \quad (28)$$

$$\lambda_k(X^o) = \frac{f_k(X^o) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K} - величины относительных оценок; \quad (29)$$

λ^o - максимальная относительная оценка, которая является максимальным нижним уровнем для всех относительных оценок $\lambda_k(X^o)$, гарантированным результатом в относительных единицах. λ^o гарантирует, что в точке X^o относительные оценки $\lambda_k(X^o)$ больше или равны λ^o :

$$\lambda_k(X^o) \geq \lambda^o, k = \overline{1, K} \text{ or } \lambda^o \leq \lambda_k(X^o), k = \overline{1, K}, X^o \in S, \quad (30)$$

и в соответствии с теоремой 1 точка оптимума $X^o = \{\lambda^o, x_1, \dots, x_N\}$ является оптимальной по Парето.

2.3. Аксиоматика и принцип оптимальности векторной оптимизации с заданным приоритетом критерия

В определении 3 указано, что если сравнивать две функции (критерия), измеренных в относительных оценках $\lambda_{k=1}(X)$ и $\lambda_{k=2}(X) \forall k \in K$, то возможны три ситуации. Вторая ситуация, когда $\lambda_{k=1}(X) = \lambda_{k=2}(X)$ исследована в разделе 2.2 (равнозначные критерии). Ситуации: первая, когда $\lambda_{k=1}(X) > \lambda_{k=2}(X)$, и третья, когда $\lambda_{k=1}(X) < \lambda_{k=2}(X)$, исследуются в этом разделе. Такие ситуации определяются, как задачи с приоритетом критерия.

Для построения методов решения проблемы векторной оптимизации с приоритетом критерия мы введем следующие определения: О приоритете одного критерия над другим; О числовом выражении приоритета критерия над другим; О заданном числовом выражении приоритета одного критерия над другим; О нижнем уровне среди всех относительных оценок с приоритетом критерия; О подмножестве точек, приоритетных по критерию; Принцип оптимальности 2 - Решение векторной задачи с заданным приоритетом критерия, [20, 22].

2.3.1. Аксиоматика решения векторной задачи оптимизации с заданным приоритетом критерия

Язык системы аксиоматики решения векторной задачи с заданным приоритетом критерия включает определения: 1) Приоритет одного критерия над другим; 2) Числовое значение приоритета критерия; 3) Нижний уровень критерия среди всех относительных оценок с приоритетом критерия.

Определение 6. (О приоритете одного критерия над другим).

Критерий $q \in K$ в векторной задаче в точке $X \in S$ имеет приоритет над другими критериями $k = \overline{1, K}$, если относительная оценка $\lambda_q(X)$ по этому критерию больше или равна относительных оценок $\lambda_k(X)$ других критериев, т. е.:

$$\lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), k = \overline{1, K}, \quad (31)$$

и строгий приоритет, если хотя бы для одного критерия $t \in K$: $\lambda_q(X) > \lambda_k(X), t \neq q$, а для остальных критериев $\lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), k = \overline{1, K}, k \neq t \neq q$.



Введением определения приоритета критерия $q \in K$ в ВЗМП (1)-(4) выполнено переопределение раннего понятия приоритета. Если раньше в него вкладывалось интуитивное понятие о важности этого критерия, то сейчас эта “важность” определяется математически: чем больше относительная оценка q -го критерия над другими, тем он важнее (приоритетнее), и наиболее высокий приоритет в точке оптимума $X_k^*, \forall q \in K$.

Из определения выражения приоритета критерия $q \in K$ в векторной задаче в уравнениях (1)-(4) следует, что возможная область соответствующая множеству точек $S_q \subset S$, которое характеризуется как $\lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), \forall k \neq q, \forall X \in S_q$. Однако, вопрос на сколько критерий $q \in K$ в точке множества S_q имеет больший приоритет относительно другого критерия остается открытым. Для ответа на этот вопрос, мы вводим коэффициент связи между парой относительных оценок q и k , что, в целом, представляет вектор:

$$P^q(X) = \{p_k^q(X) | k = \overline{1, K}\}, q \in K \quad \forall X \in S_q.$$

Определение 7. (О числовом выражении приоритета критерия над другим).

В векторной задаче с приоритетом критерия q -го над другими критериями $k = \overline{1, K}$, для $\forall X \in S_q$, вектор $P^q(X)$ показывает во сколько раз относительная оценка $\lambda_q(X), q \in K$, больше остальных относительных оценок $\lambda_k(X), k = \overline{1, K}$:

$$P^q(X) = \{p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}, k = \overline{1, K}\}, p_k^q(X) \geq 1, \forall X \in S_q \subset S, k = \overline{1, K}, \forall q \in K. \quad (32)$$

Такое отношение $p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}$ назовем *числовым выражением приоритета q -го критерия над остальными критериями $k = \overline{1, K}$* .

Определение 7а. (О заданном числовом выражении приоритета одного критерия над другими). В векторной задаче (1)-(4) с приоритетом критерия $q \in K$ для $\forall X \in S$ вектор $P^q = \{p_k^q, k = \overline{1, K}\}$, считается заданным лицом, принимающим решения, (ЛПР), если задана каждая компонента этого вектора. Заданная ЛПР компонента p_k^q , с точки зрения ЛПР, показывает во сколько раз относительная оценка $\lambda_q(X), q \in K$ больше остальных относительных оценок $\lambda_k(X), k = \overline{1, K}$. Вектор $p_k^q, k = \overline{1, K}$ является заданным числовым выражением приоритета q -го критерия над остальными критериями $k = \overline{1, K}$:

$$P^q(X) = \{p_k^q(X), k = \overline{1, K}\}, p_k^q(X) \geq 1, \forall X \in S_q \subset S, k = \overline{1, K}, \forall q \in K. \quad (33)$$

Векторная задача (1)-(4), в которой задан приоритет какого-либо из критериев, называют векторной задачей с заданным приоритетом критерия. Проблема задачи вектора приоритетов возникает тогда, когда необходимо определить точку $X^0 \in S$ по заданному вектору приоритетов.

При операции сравнения относительных оценок с приоритетом критерия $q \in K$, аналогично, как и в задаче с эквивалентными критериями, введем дополнительную числовую характеристику λ , которую назовем *уровнем*.

Определение 8. О нижнем уровне среди всех относительных оценок с приоритетом критерия.

Уровень λ является нижним среди всех относительных оценок с приоритетом критерия $q \in K$, таким, что

$$\lambda \leq p_k^q \lambda_k(X), k = \overline{1, K}, q \in K, \forall X \in S_q \subset S; \quad (34)$$

нижний уровень для выполнения условия (34) определяется

$$\lambda = \min_{k \in K} p_k^q \lambda_k(X), q \in K, \forall X \in S_q \subset S. \quad (35)$$



Соотношения (34) и (35) являются взаимосвязанными и служат в дальнейшем переходом от операции определения \min к ограничениям и наоборот. В разделе 4 мы дали определение точки $X^o \in S$, оптимальной по Парето, с эквивалентными критериями. Рассматривая данное определение как исходное, мы построим ряд аксиом деления допустимого множества точек S , во-первых, как подмножество точек, оптимальных по Парето S^o , и, во-вторых, на подмножество точек $S_q \subset S, q \in K$, приоритетным на q -му критерию.

2.3.2. Аксиома векторной оптимизации с приоритетными критериями

Аксиома 2. (*О подмножестве точек, приоритетных по критерию*).

В векторной задаче (1)-(4) подмножество точек $S_q \subset S$ называется областью приоритета критерия $q \in K$ над другими критериями, если

$$\forall X \in S_q \quad \forall k \in K \quad \lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), \quad q \neq k.$$

Это определение распространяется и на множество точек S^o , оптимальных по Парето, что дается следующим определением.

Аксиома 2а. (*О подмножестве точек, приоритетных по критерию, на множестве точек оптимальных по Парето*).

В векторной задаче (1)-(4) подмножество точек $S_q^o \subset S^o \subset S$ называется областью приоритета критерия $q \in K$ над другими критериями, если $\forall X \in S_q^o \quad \forall k \in K \quad \lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), \quad q \neq k$.

Дадим некоторые пояснения.

Аксиома 2 и 2а позволила представить в векторной проблеме (1)-(4) допустимое множество точек S , включая подмножество точек, оптимальных по Парето, $S^o \subset S$, в подмножества:

одно подмножество точек $S' \subset S$, где критерии эквивалентны, и подмножество точек S' , пересекаясь с подмножеством точек S^o , выделяет подмножество точек, оптимальных по Парето, в подмножество с эквивалентными критериями $S^{oo} = S' \cap S^o$, которое, как это показано далее, состоит из одной точки $X^o \in S$, т.е. $X^o = S^{oo} = S' \cap S^o, S' \in S, S^o \subset S$;

« K » подмножеств точек, где у каждого критерия $q = \overline{1, K}$ имеется приоритет над другими критериями $k = \overline{1, K}, q \neq k$. Таким образом, выполнено разделение, во-первых, множества всех допустимых точек S , на подмножества $S_q \subset S, q = \overline{1, K}$, и, во-вторых, разделение подмножества точек, оптимальных по Парето, S^o , на подмножества $S_q^o \subset S^o, q = \overline{1, K}$. Отсюда верны следующие соотношения:

$$S' U (\cup_{q \in K} S_q^o) \equiv S^o, S_q^o \subset S^o \subset S, q = \overline{1, K}.$$

Мы заметим, что подмножество точек S_q^o , с одной стороны, включено в область (подмножество точек), имеющих приоритет критерия $q \in K$ над другими критериями: $S_q^o \subset S_q \subset S$, и с другой стороны, на подмножество точек, оптимальны по Парето: $S_q^o \subset S^o \subset S$.

Аксиома 2 и числовое выражение приоритета критерия (Определение 5) позволяет определять каждую допустимую точку $X \in S$ (посредством вектора):

$$P^q(X) = \{p_k^q(X) = \frac{\lambda_q(X)}{\lambda_k(X)}, k = \overline{1, K}\}, \text{формироваться и выбирать:}$$

подмножество точек по приоритетному критерию S_q , который включен в множество точек S , $\forall q \in K, X \in S_q \subset S$, (такое подмножество точек может использоваться в проблемах кластеризации, но это вне статьи);

подмножество точек по приоритетному критерию S_q^o , который включен в ряд точек S^o , оптимальных по Парето, $\forall q \in K, X \in S_q^o \subset S^o$.



Множество допустимых точек $X \in S$	\rightarrow	Подмножества точек оптимума по Парето, $X \in S^o \subset S \rightarrow$	Подмножество точек, оптимума по Pareto $X \in S_q^o \subset S^o \subset S \rightarrow$	Отдельная точка, $\forall X \in S$	$X \in S_q^o \subset S^o \subset S$
---	---------------	---	---	---------------------------------------	-------------------------------------

Это самый важный результат, который позволит вывести принцип оптимальности и построить методы выбора любой точки из множества точек, оптимальных по Парето.

2.3.3. Принцип оптимальности решения векторной задачи с заданным приоритетом критерия

Определение 8. (*Принцип оптимальности 2. Решение векторной задачи с заданным приоритетом критерия*). Векторная задача (1)–(4) с заданным приоритетом q -го критерия $p_k^q \lambda_k(X), k = \overline{1, K}$ считается решенной, если найдена точка X^o и максимальный уровень λ^o среди всех относительных оценок такой, что

$$\lambda^o = \max_{X \in S} \min_{k \in K} p_k^q \lambda_k(X), q \in K. \quad (36)$$

Используя взаимосвязь (34) и (35), преобразуем максиминную задачу (36) в задачу:

$$\lambda^o = \max_{X \in S} \lambda, \quad (37)$$

$$\text{at restriction } \lambda \leq p_k^q \lambda_k(X), k = \overline{1, K}. \quad (38)$$

Задачу (37)–(38) назовем λ -задачей с приоритетом q -го критерия.

Результатом решения λ -задачи будет точка $X^o = \{X^o, \lambda^o\}$ – она же является и результатом решения ВЗМП (1)–(4) с заданным приоритетом критерия, решенной на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата.

В оптимальном решении $X^o = \{X^o, \lambda^o\}$, X^o - оптимальная точка, а λ^o - максимальный нижний уровень. Точка X^o и уровень λ^o соответствуют ограничениям (4), которые можно записать как: $\lambda^o \leq p_k^q \lambda_k(X^o), k = \overline{1, K}$.

Эти ограничения являются основой оценки правильности результатов решения в практических векторных задачах оптимизации.

Определение 1 и 2 «Принципы оптимальности» дают возможность сформулировать понятие операции «*орт*».

Определение 9. (Математическая операция «*орт*»).

В векторной задаче (1)–(4), которая представлена критериями «*макс*» и «*мин*», математическая операция «*орт*» состоит в определении точки X^o и максимального нижнего уровня λ^o , в котором все критерии измеряются в относительных единицах:

$$\lambda^o \leq \lambda_k(X^o) = \frac{f_k(X^o) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}, \quad (39)$$

т.е. все критерии $\lambda_k(X^o), k = \overline{1, K}$ равны или больше максимального уровня λ^o , (поэтому λ^o также называется гарантированным результатом).

Теорема 2. (Теорема о наиболее противоречивых критериях в векторной задаче с заданным приоритетом).

Если в выпуклой векторной задаче математического программирования максимизации (1)–(4) задан приоритет q -го критерия $p_k^q, k = \overline{1, K}, \forall q \in K$ над другими критериями, в точке оптимума $X^o \in S$, полученной на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата, всегда найдется два критерия с индексами $r \in K, t \in K$, для которых выполняется строгое равенство из:

$$\lambda^o = p_k^r \lambda_r(X^o) = p_k^t \lambda_t(X^o), r, t, \in K, \quad (40)$$

и другие критерии определяются неравенствами:

$$\lambda^o \leq p_k^q(X^o), k = \overline{1, K}, \forall q \in K, q \neq r \neq t. \quad (41)$$



Критерии с индексами $r \in K, t \in K$, для которых выполняется равенство (41), называются наиболее противоречивыми.

Доказательство. Аналогично теореме 2 [20]. Заметим, что в (40) и (41) индексы критериев $r \in K, t \in K$ могут совпадать с индексом $q \in K$.

Следствие теоремы 1. О равенстве оптимального уровня и относительных оценок в векторной задаче с двумя критериями с приоритетом одного из них.

В выпуклой векторной задаче математического программирования с двумя эквивалентными критериями, решаемой на основе нормализации критериев и принципа гарантированного результата, в оптимальной точке X^o всегда выполняется равенство: при приоритете первого критерия над второй:

$$\lambda^o = \lambda_1(X^o) = p_2^1(X^o)\lambda_2(X^o), X^o \in S, \quad (42)$$

где $p_2^1(X^o) = \lambda_1(X^o)/\lambda_2(X^o)$, при приоритете второго критерия над первым:

$$\lambda^o = \lambda_2(X^o) = p_1^2(X^o)\lambda_1(X^o), X^o \in S, \text{ где } p_1^2(X^o) = \lambda_2(X^o)/\lambda_1(X^o).$$

2.3.4. Метод решения задачи векторной оптимизации с заданным приоритетом критерия

Шаг 1. Решаем векторную задачу с равнозначными критериями.

В результате решения получаем: оптимальные точки по каждому критерию отдельно $X_k^*, k = \overline{1, K}$ и размеры критериальных функций в этих точках $f_k^* = f_k(X_k^*), k = \overline{1, K}$, которые представляют границы множества точек, оптимальных по Парето;

точки антиоптимума по каждому критерию $X_k^0 = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ и наихудшей неизменной части каждого критерия $f_k^0 = f_k(X_k^0), k = \overline{1, K}$;

$X^o = \{X^o, \lambda^o\}$ оптимальная точка, как результат решения VPMP с эквивалентными критериями, т.е. результат решения максиминной задачи, λ -задачи, построенной на ее основе;

λ^o - максимальная относительная оценка, и является максимальным нижним уровнем для всех относительных оценок $\lambda_k(X^o)$, или гарантированный результат в относительных единицах, λ^o гарантирует, что все относительные оценки $\lambda_k(X^o)$ равны или больше λ^o :

$$\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), k = \overline{1, K}, X^o \in S \quad (43)$$

Лицо, принимающее решение, проводит анализ результатов решения векторной задачи с эквивалентными критериями.

Если полученные результаты удовлетворяют лицо, принимающее решение, то конец, иначе выполняются последующие расчеты.

Дополнительно вычислим: в каждой точке $X_k^*, k = \overline{1, K}$ определим величины всех критериев $f_k^* = f_k(X_k^*), k = \overline{1, K}$, которые представляют границу множества Парето, и относительных оценок: $\lambda(X^*) = \{\lambda_q(X_k^*), q = \overline{1, K}, k = \overline{1, K}\}$, $\lambda_k(X) = \frac{f_k(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, \forall k \in K$:

$$F(X^*) = \begin{vmatrix} f_1(X_1^*) & \dots & f_K(X_1^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(X_K^*) & \dots & f_K(X_K^*) \end{vmatrix}, \quad \lambda(X^*) = \begin{vmatrix} \lambda_1(X_1^*) & \dots & \lambda_K(X_1^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1(X_K^*) & \dots & \lambda_K(X_K^*) \end{vmatrix}. \quad (44)$$

Матрицы критериев $F(X^*)$ и относительных оценок $\lambda(X^*)$ показывают величины каждого критерия $k = \overline{1, K}$ при переходе от точки оптимума $X_k^*, k \in K$ к другой $X_q^*, q \in K$;

в точке оптимума при равнозначных критериях X^o вычислим величины критериев и относительных оценок:

$$f_k(X^o), k = \overline{1, K}; \lambda_k(X^o), k = \overline{1, K}, \quad (45)$$



которые удовлетворяют неравенству (43). В других точках $X \in S^o$ меньший из критериев в относительных единицах $\lambda = \min_{k \in K} \lambda_k(X)$ всегда меньше λ^o . Запоминаются данные λ -задачи (24)-(26), которые являются основой для дальнейшего изучения множества Парето.

Шаг 2. Выбор приоритетного критерия $q \in K$.

Из теории (см. теорему 1) известно, что в оптимальной точке X^o всегда имеется два наиболее противоречивых критерия $q \in K$ и $v \in K$, для которых в относительных единицах выполняется точное равенство:

$$\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_v(X^o), q, v \in K, X \in S, \text{ а для остальных выполняется неравенства:}$$

$$\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), \forall k \in K, q \neq v \neq k.$$

Как правило, из этой пары выбирается критерий, который ЛПР хотел бы улучшить, такой критерий называется «приоритетным критерием», обозначим его $q \in K$.

Шаг 3. Определяются числовые пределы изменения величины приоритета критерия $q \in K$. Для приоритетного критерия $q \in K$ из матрицы (40) определим числовые пределы изменения величины критерия: в натуральных единицах $f_q(X)$ и в относительных единицах $\lambda_q(X)$, которые лежат в следующих пределах:

$$f_k(X^o) \leq f_q(X) \leq f_q(X_q^*), k \in K \quad (46)$$

где $f_q(X_q^*)$ выводится из матрицы уравнения $F(X^*)$ (44), все критерии показывают размеры, измеренные в физических единицах, $f_k(X^o), k = \overline{1, K}$ из (45), и, в относительных единицах:

$$\lambda_k(X^o) \leq \lambda_q(X) \leq \lambda_q(X_q^*), k \in K, \quad (47)$$

где $\lambda_q(X_q^*)$ выводится из матрицы $\lambda(X^*)$, все критерии показывают размеры, измеренные в относительных единицах (отметим, что $\lambda_q(X_q^*) = 1$), $\lambda_q(X^o)$ из уравнения (64).

Как правило, выражения (46) и (47) выдаются на дисплей для анализа.

Шаг 4. Выбор величины приоритетного критерия (Принятие решения).

Лицо, принимающее решение, проводит анализ результатов расчетов (44) и из неравенства в натуральных единицах (46) выбирает числовую величину $f_q, q \in K$:

$$f_q(X^o) \leq f_q \leq f_q(X_q^*), q \in K. \quad (48)$$

Шаг 5. Расчет относительной оценки.

Для выбранной величины приоритетного критерия f_q вычисляется относительная оценка:

$$\lambda_q = \frac{f_q - f_q^0}{f_q^* - f_q^0}, \text{ которая при переходе от точки } X^o \text{ к } X_q^*, \text{ в соответствии с (43) лежит в}$$

пределах: $\lambda_q(X^o) \leq \lambda_q \leq \lambda_q(X_q^*) = 1$.

Шаг 6. Вычисление коэффициента линейной аппроксимации.

Предполагая линейный характер изменения критерия $f_q(X)$ в (48) и соответственно относительной оценки $\lambda_q(X)$, используя стандартные приемы линейной аппроксимации, вычислим коэффициент пропорциональности ρ между $\lambda_q(X^o), \lambda_q$:

$$\rho = \frac{\lambda_q - \lambda_q(X^o)}{\lambda_q^* - \lambda_q^0}, q \in K.$$

Шаг 7. Вычисление координат приоритетного критерия с величиной f_q .

В соответствии с (44) координаты точки приоритетного критерия X_q лежат в следующих пределах: $X^o \leq X_q \leq X_q^*, q \in K$

Предполагая линейный характер изменения вектора $X_q = \{x_1^q, \dots, x_N^q\}$ определим координаты точки приоритетного критерия с величиной f_q с относительной оценкой (45):

$$\begin{aligned} X_q &= \{x_1^q = x_1^o + \rho(x_q^*(1) - x_1^o), \dots, \\ x_N^q &= x_N^o + \rho(x_q^*(N) - x_N^o)\}, \end{aligned} \quad (49)$$



где $X^o = \{x_1^o, \dots, x_N^o\}$, $X_q^* = \{x_q^*(1), \dots, x_q^*(N)\}..$

Шаг 8. Вычисление основных показателей точки x^q .

Для полученной точки x^q (49), вычислим:

все критерии в натуральных единицах: $F^q = \{f_k(x^q), k = \overline{1, K}\};$

все относительные оценки критериев:

$$\lambda^q = \{\lambda_k^q, k = \overline{1, K}\}, \lambda_k(x^q) = \frac{f_k(x^q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}; \quad (50)$$

вектор приоритетов: $P^q = \{p_k^q = \frac{\lambda_k(x^q)}{\lambda_k(x^q)}, k = \overline{1, K}\}$; максимальную относительную оценку: $\lambda^{0q} = \min(p_k^q \lambda_k(x^q), k = \overline{1, K})$. Аналогично (50) может быть рассчитана любая точка из множества Парето: $X_t^o = \{\lambda_t^o, X_t^o\} \in S^o$.

Анализ результатов. Рассчитанная величина критерия $f_q(X_t^o), q \in K$ обычно не равна заданной Δf_q . Ошибка выбора $\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q|$ определяется ошибкой линейной аппроксимации. Результаты исследования симметрии в ВЗМП с заданным приоритетом аналогичны, как и для ВЗМП с равнозначными критериями, но центр симметрии смещен в сторону приоритетного критерия.

2.4. Исследование и теоретический анализ максиминной задачи с приоритетом критерия и максиминной задачи с весовыми коэффициентами.

В этом разделе мы рассматриваем отдельную задачу многомерной математики: векторную задачу нелинейного программирования. Математическое и программное обеспечение решения векторной задачи нелинейного программирования, алгоритмы решения которой при равнозначных критериях представлен в разделе 3 и при заданном приоритете критерия в разделе 4, [20, 22, 43, 45].

2.4.1. Теоретический анализ максиминной задачи с приоритетом критерия и с весовыми коэффициентами

Рассмотрим и представим максиминную задачу оптимизации (36):

$$\lambda^o = \max_{X \in S} \min_{k \in K} p_k^q \lambda_k(X), q \in K. \quad (36)$$

По своей структуре задача (36) внешне не отличается от аналогичной задачи, рассмотренной в ряде работ [20]:

$$\lambda^o = \max_{X \in S} \min_{k \in K} w_k \lambda_k(X), k = \overline{1, K}, X \in S, X \geq 0, \quad (51)$$

где $\lambda_k(X) = \frac{f_k(X) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}$ – относительная оценка по k -му критерию, f_k^*, f_k^0 – оптимальное и наихудшее соответственно значения k -го критерия, т. е. исследование осуществляется в относительных единицах $\lambda_k(X)$; w_k – весовые коэффициенты, удовлетворяющие обычным условиям:

$w_k > 0$, $w_1 + \dots + w_k = 1$, и выражающие предпочтение критериев. Предпочтение определяется тем, что предпочтительному (приоритетному) критерию присваивается больший вес.

Но внутренне задачи (36) и (51) полностью отличаются друг от друга. Покажем это отличие на двухкритериальной задаче максимизации:

$$f_1(X) \rightarrow \max, f_2(X) \rightarrow \max, \quad (52)$$

$$g(X) \leq b, X = \{x_1, x_2\}, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \quad (53)$$

где множество допустимых точек S описанными ограничениями (53) не пусто, $S \neq \emptyset$ и представляет собой компакт. Построим на основе векторной задачи (52)-(53) максиминную задачу с нормализованными критериями:



$$\lambda^o = \max_{X \in S} \min_{k \in K} (\lambda_1(X), \lambda_2(X)), K = 2, X \in S, X \geq 0, \quad (54)$$

где $\lambda_1(X), \lambda_2(X)$ – относительные оценки по первому и второму критериям, X_1^*, X_2^* – точки оптимума, полученные при решении ВЗМП (52)-(53) по первому и второму критериям соответственно.

Максиминную задачу (54) преобразуем в λ -задачу:

$$\lambda^o = \max_{X \in S} \lambda, \quad (55)$$

$$\lambda - \lambda_1(X) \leq 0, \quad \lambda - \lambda_2(X) \leq 0. \quad (56)$$

$$g(X) \leq b, X = \{x_1, x_2\}, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Представим неравенства (56) в виде равенств, добавив переменные x', x'' , и вычтем одно из них из другого: $\lambda_1(X) - x' = \lambda_2(X) - x''$.

Дополнительные переменные x' и x'' для двухкритериальной задачи сбалансированы и в оптимальной точке равны нулю (и это равенство подтверждает вышеупомянутая теорема на этапе 2), в итоге: относительные оценки равны $\lambda_1(X^o) = \lambda_2(X^o)$.

Поэтому алгоритм и называется «при равнозначных критериях».

Рассмотрим, как изменится равенство $\lambda_1(X^o) = \lambda_2(X^o)$ при введении вектора приоритета и вектора весовых коэффициентов. Примем, что первый критерий имеет приоритет над вторым в 2 раза. Вектор приоритетов будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{P}^1 = \{p_1^1 = 1, p_2^1 = 2\},$$

а вектор весовых коэффициентов: $w = \{w_1 = 2/3, w_2 = 1/3\}, w_1 + w_2 = 1$.

Тогда равенство $\lambda_1(X^o) = \lambda_2(X^o)$ с вектором приоритетов P^1 имеет следующий вид:

$$p_1^1 \lambda_1(X^o) = p_2^1 \lambda_2(X^o) \text{ или } \lambda_1(X^o) = 2\lambda_2(X^o),$$

а с вектором весовых коэффициентов - с точностью наоборот:

$$w_1 \lambda_1(X^o) = w_2 \lambda_2(X^o) \text{ или } 2\lambda_1(X^o) = \lambda_2(X^o) \text{ или } 2\lambda_1(X^o) = \lambda_2(X^o).$$

В результате решения ВЗМП (51)-(52) с вектором приоритетов \mathbf{P}^1 относительная оценка по первому критерию $\lambda_1(X^o)$ будет в 2 раза выше относительной оценки по второму критерию $\lambda_2(X^o)$, что и требовалось по условиям задачи. При решении ВЗМП (51)-(52) с вектором весовых коэффициентов w относительная оценка по первому критерию $\lambda_1(X^o)$ будет в 2 раза меньше относительной оценки по второму критерию $\lambda_2(X^o)$, что полностью противоречит условиям задачи. Покажем этот анализ на примере векторной задачи линейного программирования с двумя критериями.

2.4.2. Исследование максиминной задачи с приоритетом критерия и с весовыми коэффициентами на числовом примере

Пример 6.1. Решения максиминной задачи с приоритетом критерия и с весовыми коэффициентами.

Рассмотрим однородную двухкритериальную векторную задачу линейного программирования – максимизации (ВЗЛП):

$$\text{Opt } F(X) = \{\max F_1(X) = \{\max f_1(X) = 5x_1 + x_2, \max f_2(X) = 20x_1 + 80x_2\}\}, \quad (57)$$

$$5x_1 + 5x_2 \leq 125, \quad x_1 \leq 28, \quad x_2 \leq 20, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (58)$$

Для решения ВЗЛП (57)-(58) по каждому критерию используется функция *linprog*, которая решает задачу линейного программирования.

Шаг 1. Получим точки оптимума, показанные на рис. 1:

$$X_1^* = \{x_1 = 28, x_2 = 1.6\}, \quad f_1^* = 141.6; \quad X_2^* = \{x_1 = 5, x_2 = 20\}, \quad f_2^* = 2500.$$

Шаг 2. Не выполняется. Для ВЗЛП с нестрогими ограничениями наихудшие значения критериев $f_1^0 = f_2^0 = 0$. В итоге нормализация примет вид $\lambda_k(X) = f_k(X)/f_k^*$.



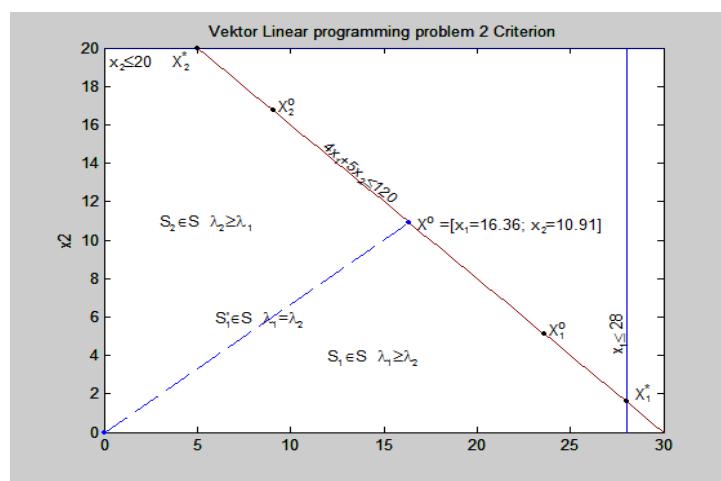


Рисунок 1 – Ограничения и решение ВЗЛП (57)-(58)

3. Выполняется анализ критериев, для этого в оптимальных точках X_1^* , X_2^* определяются матрицы целевых функций и относительных оценок: $F(X^*) = F_{\text{Xopt}} = \begin{vmatrix} f_1(X_1^*) & f_2(X_1^*) \\ f_1(X_2^*) & f_K(X_2^*) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 141.6 & 752.0 \\ 45.0 & 2500.0 \end{vmatrix}$. $L_{\text{Xopt}} = \lambda(X^*) = \begin{vmatrix} \lambda_1(X_1^*) & \lambda_2(X_1^*) \\ \lambda_1(X_2^*) & \lambda_K(X_2^*) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.0 & 0.3008 \\ 0.045 & 1.0 \end{vmatrix}$.

Шаг 4. Строится λ -задача:

$$\lambda^0 = \max \lambda, \quad (59)$$

$$\lambda - (5x_1 + 1x_2)/141.6 \leq 0,$$

$$\lambda - (20x_1 + 80x_2)/2500 \leq 0,$$

$$5x_1 + 5x_2 \leq 125, \quad x_1 \leq 28, \quad x_2 \leq 20, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

которая решается обращением к функции *linprog*. Результаты:

оптимальные значения переменных: $X^* = \{\lambda_1 = 0.6547, x_1 = 16.3585, x_2 = 10.9132\}$;

оптимальное значение целевой функции: $\lambda^0 = 0.6547$. Полученные функции $\lambda_1(X)$, $\lambda_2(X)$, а также точки оптимума X^* и λ^0 на их пересечении, представлены на рис. 2.

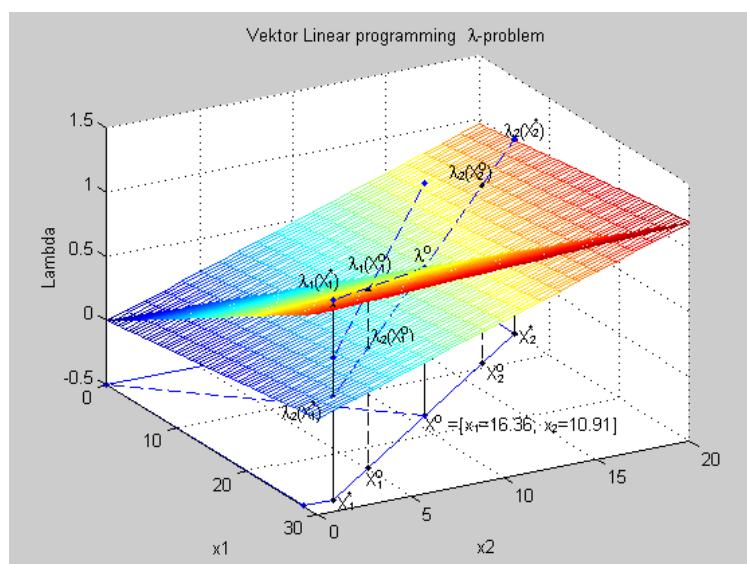


Рис. 2. Решение ВЗЛП (57)-(58) и соответствующей λ -задачи с приоритетом первого критерия и весовыми коэффициентами



Выполним проверку:

$$f_1(X^o)=92.7, \lambda_1(X^o)=0.6547; f_2(X^o)=1636.8, \lambda_2(X^o)=0.6547,
т. е. \lambda^o \leq \lambda_k(X^o), k = 1, 2.$$

Эти результаты показывают, что в точке X^o оба критерия в относительных единицах достигли уровня $\lambda^o = 0.6547$ от своих оптимальных величин. Любое увеличение одного из критериев выше этого уровня приводит к уменьшению другого критерия: точка X^o оптимальна по Парето (рис 2).

Решим ВЗЛП (57)-(58) и соответственно λ -задачу (59) с заданным вектором приоритетов $P^1 = \{ p_1^1 = 1, p_2^1 = 2 \}$ и вектором весовых коэффициентов $w = \{ w_1 = 2/3, w_2 = 1/3 \}, w_1 + w_2 = 1$.

В этом случае λ -задача примет вид:

$$\begin{aligned} \lambda^o &= \max_{X \in S} \lambda, \\ \lambda - p_1^1 (5x_1 + x_2) / f_1^* &\leq 0, \\ \lambda - p_2^1 (20x_1 + 80x_2) / f_2^* &\leq 0, \\ 5x_1 + 5x_2 &\leq 125, x_1 \leq 28, x_2 \leq 20, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{60}$$

Для данной задачи при переходе от точки X^o , полученной при равнозначных критериях λ -задачи (60), к точке оптимума X_1^* , полученной при решении по первому критерию, приоритет первого критерия лежит в пределах: $p_1^1(X_1^*) \leq p_2^1 \leq p_2^1(X^o)$.

Понятие приоритета критерия вытекает из аксиоматики, которая показывает, что допустимое множество точек S , в том числе множество точек оптимальных по Парето, S^o , лежащее между точками X_1^* и X_2^* , подразделяется на три подмножества точек:

подмножества S_1 и S_1^o являются областью приоритета первого критерия над вторым (характеризуется тем, что $\lambda_1(X) > \lambda_2(X), \forall X \in S_1^o \subset S_1 \subset S^o$), S_1^o лежит между точками X_1^* и X^o ;

подмножества S_2 и S_2^o являются областью приоритета второго критерия над первым $\lambda_2(X) > \lambda_1(X), \forall X \in S_2^o \subset S_2 \subset S$, S_2^o лежит между точками X^o и X_2^* ;

подмножество точек $S' \subset S$, где критерии равнозначны $\lambda_1(X) = \lambda_2(X), \forall X \in S' \subset S$. Подмножеству S' принадлежит точка X^o , в которой λ^o – максимальный уровень, причем $\lambda^o = \lambda_1(X^o) = \lambda_2(X^o)$ в соответствии с теоремой. X^o также принадлежит и множеству точек, оптимальных по Парето, S^o (рис. 1, 2).

В задаче (60) неравенства $p_1^1(X_1^*) \leq p_2^1 \leq p_2^1(X^o)$ примут вид

$$p_1^1(X_1^*) = 3.3245 \leq p_2^1 \leq 1 = p_2^1(X^o),$$

из него выбирается p_2^1 , например $p_2^1 = 2$, который вводится в λ -задачу (60).

В результате решения λ -задачи (60) с заданным вектором приоритетов получим:

точку оптимума $X_1^o = \{ \lambda_1 = 0.8694, x_1 = 23.5959, x_2 = 5.1233 \}$ (рис. 2);

оптимальное значение целевой функции: $\lambda^o = 0.8694$.

Выполним проверку: $f_1(X_1^o) = 123.1, f_2(X_1^o) = 1086.7$,

$$\lambda_1(X_1^o) = 0.8694, \lambda_2(X_1^o) = 0.4347, \text{ т. е. } \lambda^o \leq \lambda_1(X_1^o) = 2\lambda_2(X_1^o) = 0.8694.$$

Эти результаты показывают, что в точке оптимума X_1^o , относительная оценка $\lambda_1(X_1^o)$ в 2 раза больше относительной оценки $\lambda_2(X_1^o)$. **Это соответствует условиям задачи:** о приоритете первого критерия над вторым. При этом плоскость, определяемая функцией $2\lambda_2(X)$ в области Парето в точке X_1^o достигла уровня $\lambda^o = 0.8694, \lambda_2(X_1^o)$. Это видно на пунктирной прямой, проходящей через точку X_1^o .

В результате решения λ -задачи (60) с заданным вектором весовых коэффициентов $w = \{ w_1 = 2/3, w_2 = 1/3 \}$ получим:



точку оптимума $X_2^o = \{\lambda_1=0.2922, x_1=9.0615, x_2=16.75\}$ (рис. 1, 2);

оптимальное значение целевой функции: $\lambda^o = 0.2922$,

Выполним проверку: $f_1(X_1^o) = 123.1, f_2(X_1^o) = 1086.7$;

$$\begin{aligned}\lambda_1(X_1^o) &= 0.8694, \lambda_2(X_1^o) = 0.4347, \text{ т. е. } \lambda^o \leq \lambda_1(X_1^o) = 2\lambda_2(X_1^o) = 0.8694 \\ f_1(X_2^o) &= 62.1, f_2(X_2^o) = 2191.3,\end{aligned}$$

$$\lambda_1(X_2^o) = 0.4383; \lambda_2(X_2^o) = 0.8765, \text{ т. е. } \lambda^o \leq \lambda_1(X_2^o)/3 = \lambda_2(X_2^o)/3 = 0.2922.$$

Эти результаты показывают, что в точке оптимума X_2^o относительная оценка $\lambda_1(X_2^o)$ в 2 раза меньше относительной оценки $\lambda_2(X_2^o)$. **Это полностью противоречит условиям задачи:** исходному заданию о весовых коэффициентах первого критерия над вторым.

Таким образом, метод, основанный на аксиоматике, нормализации критериев и принципе гарантированного результата, дает точные ответы на поставленные условия (исходные данные) решения ВЗМП, метод, основанный на весовых коэффициентах, полностью противоречит исходному заданию.

3. Моделирование и выбор оптимальных параметров технологического процесса в условиях определенности и неопределенности.

Численная реализация выбора оптимальных параметров технологического процесса выполнена на базе теории методов многомерной математики.

Методология численной реализации выбора оптимальных параметров технологического процесса представлена, как ряд этапов, которые подразделяются на отдельные блоки, шаги.

3.1. Математическая модель технологического процесса в условиях определенности и неопределенности в совокупности

Математическая модель технологического процесса представлена в соответствии с сформированной математической моделью в условиях определенности (1b)-(4b) и неопределенностью (5b)-(10b) в виде векторной задачи математического программирования:

$$Opt F(X) = \{max F_1(X) = \{max f_k(X), k = \overline{1, K_1^{def}}\}, \quad (61)$$

$$max I_1(X) \equiv \{max y_k(X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}, \quad (62)$$

$$min F_2(X) = \{min f_k(X), k = \overline{1, K_2^{def}}\}, \quad (63)$$

$$min I_2(X) \equiv \{min y_k(X_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_2^{unc}}\}, \quad (64)$$

$$\text{при ограничениях } f_k^{min} \leq f_k(X) \leq f_k^{max}, k = \overline{1, K}, \quad (65)$$

$$G(X) \leq 0, x_j^{min} \leq x_j \leq x_j^{max}, j = \overline{1, N}, \quad (66)$$

где $X = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ — это вектор управляемых переменных (параметров) технологического процесса; $F(X) = \{F_1(X) F_2(X) I_1(X) I_2(X)\}$ представляет векторный критерий, каждая компонента которого является вектором характеристик (критериев) технологического процесса (31)-(34); Критерии $F_1(X) F_2(X)$ функционально зависят от значений вектора переменных X , которые обозначены как (61) и (63) K_1^{def}, K_2^{def} (*definiteness*). Сформированные в условиях определенности;

Критерии $I_1(X) I_2(X)$ характеризуют дискретные значения функций, которые функционально зависят от дискретных значений вектора переменных X , обозначены в (62) и (64) как K_1^{unc}, K_2^{unc} (*uncertainty*) множество критериев max и min. Сформированы в условиях неопределенности.

(65) и (66) стандартные ограничения: функциональные, параметрические и общие.



3.2. Техническое задание для формирования математической и, на ее основе, численной модели технологического процесса.

Техническое задание, анализ результатов решения и выбора приоритетного критерия, его величины выполняется **конструктором материала**.

Остальные этапы выполняются **математиком - программистом**.

3.2.1. Техническое задание: Выбор оптимальных параметров технологического процесса

Дано. Исследуется технологический процесс, который характеризуется двумя параметрами: $X = \{x_1, x_2\}$. Значения X представляют вектор управляемых переменных.

Заданы параметры технологического процесса $X = \{x_1, x_2\}$, которые изменяются в следующих пределах: $2.0 \leq x_1 \leq 3.5$, $12.0 \leq x_2 \leq 30.0$.

Четыре характеристики (критерии) технологического процесса определяют его функционирование: $F(X) = \{f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)\}^T$, зависят от вектора параметров X .

Условия определенности. Известна функциональная зависимость от параметров технологического процесса для четвертой характеристики $f_4(X)$:

$$X = \{x_k, k = \overline{1, K}, K = 2\};$$

$$f_4(X) = -0.245 - 0.747x_1 + 0.3831x_1^2 + 0.0442x_2 + 0.0012x_2^2 - 0.0346x_1x_2. \quad (67)$$

Условия неопределенности. Известны результаты **экспериментальных данных**: для первой, второй и третьей характеристики технологического процесса: $f_k(X), k = 1, 2, 3$. Числовые значения параметров $X = \{x_1, x_2\}$ и характеристик $f_1(X), f_2(X), f_3(X)$, представлены в таблице 2.

Таблица 2

Экспериментальные параметры ввода и вывода.

Laser Power, p (Analog V) Мощности лазера	Travel Speed, v (mm/sec) Скорости перемещения	Wire Feed Rate, r (m/min) Скорости подачи проводки	Depth, D(mm) Глубина, Д (мм)	Total Accumulated Pore Length, Po (mm/mm) Общая накопленная длина пор
x_1	x_2	$f_1(X) \rightarrow \max$	$f_2(X) \rightarrow \min$	$f_3(X) \rightarrow \max$
2.400	25.201	4.2196	55.3952	-0.0364
2.760	18.720	3.2715	31.2498	0.0286
2.760	19.081	3.2771	32.3886	0.0272
2.760	31.680	4.2614	86.8526	0.0760
2.760	31.921	4.2948	88.1656	0.0787
3.300	14.400	3.0958	21.1331	0.3467
3.300	25.201	3.0102	56.1913	0.2171
3.300	25.801	3.0382	58.7506	0.2138
3.300	26.760	3.0909	62.9794	0.2096
3.300	27.601	3.1442	66.8147	0.2068
3.300	28.801	3.2321	72.5126	0.2041
3.300	30.001	3.3337	78.4682	0.2032
3.300	31.20	3.4496	84.6812	0.2039
3.300	32.40	3.5793	91.1518	0.2063
3.300	36.00	4.0516	112.1086	0.2236
3.840	18.720	3.0984	35.3082	0.6402



3.840	23.520	2.9672	51.6458	0.5450
3.840	31.680	3.2555	88.8758	0.4451
3.840	32.880	3.3521	95.3551	0.4369
4.200	25.201	3.2371	60.4633	0.7810
Min: 2.400	14.400	2.9672	21.1332	-0.0364
Max: 4.200	36.000	4.2948	112.1087	0.7811

В принимаемом управлении решении величину оценки первой и третьей характеристики желательно, получить как можно выше: $f_1(X) \rightarrow \max$, $f_3(X) \rightarrow \max$;

Оценки второй и четвертой характеристики как можно ниже: $f_2(X) \rightarrow \min$, $f_4(X) \rightarrow \min$.

Параметры технологического процесса $X = \{x_1, x_2\}$ изменяются в пределах:

$$2.0 \leq x_1 \leq 3.5, 12.0 \leq x_2 \leq 30.0. \quad (68)$$

Требуется. Разработать математическую модель технологического процесса в виде векторной задачи математического программирования. Задачу векторной оптимизации решить с равнозначными критериями. Выбрать из всего множества критериев приоритетный критерий. Установить численное значение приоритетного критерия. Решить задачу векторной оптимизации и принять наилучшее (оптимальное) решение с заданным приоритетом критерия.

3.2.2. Построение математической модели технологического процесса в условиях определенности и неопределенности в общем виде

Математическая модель технологического процесса в условиях определенности и неопределенности разработана виде векторной задачи математического программирования и общем виде модель представлена в разделе 3.1.

3.3. Построение численной модели технологического процесса с функциональной зависимостью от параметров (условия определенности и неопределенности).

3.3.1. Построение математической (численной) модели технологического процесса в условиях определенности

Построение модели технологического процесса с функциональной зависимостью определяется тем, что известны характеристики и ограничения от параметров $X = \{x_1, x_2\}$. Известны характеристика (67) и ограничения (68). Используя данные (67), (68), построим однокритериальную задачу нелинейного программирования - условия определенности [7,11]:

$$\max f_4(X) = -0.245 - 0.747x_1 + 0.3832x_1^2 + 0.0442x_2 + 0.0012x_2^2 - 0.0346x_1x_2, \quad (69)$$

$$2.0 \leq x_1 \leq 3.5, 12.0 \leq x_2 \leq 30.0. \quad (70)$$

В дальнейшем информационные данные (60), (70) используются при построении агрегированной математической технологической процесса.

3.3.2. Преобразование условий неопределенности (экспериментальных данных) в условия определенности и построение численной модели

Построение модели с условиями неопределенности состоит в использовании качественных и количественных описаний технологического процесса, которые получены как "вход-выход" и представлены в таблице 2.

Исходные данные таблицы 2: $f_1(x_i, i = \overline{1, M}), f_2(x_i, i = \overline{1, M}), f_3(x_i, i = \overline{1, M})$ преобразуются путем использования математических методов (регрессионного анализа) в функциональный вид: $f_1(X), f_2(X), f_3(X)$.

В системе MATLAB исходные данные таблицы 2 сформированы в виде матрицы I:



$$I = |X, F| = \begin{vmatrix} X_1 = \{x_{11}, x_{12}\}, f_1(X_1), f_2(X_1), f_3(X_1) \\ \dots \\ X_M = \{x_{M1}, x_{M2}\}, f_1(X_M), f_2(X_M), f_3(X_M) \end{vmatrix}. \quad (71)$$

На основе экспериментальных данных f_k , $k = \overline{1,3}$ (71) в системе MATLAB строится функция регрессии по методу наименьших квадратов $\min \sum_{l=1}^M (f_l - \bar{f}_l)^2$. Формируется полином A_k , определяющий взаимосвязь параметров $X_i = \{x_{1i}, x_{2i}\}$ и функции:

$$\bar{f}_{ki} = f(X_{ki}, A_k), X_{ki} = \{x_{ki}, x_{ki}\}, k = \overline{1,3}. \quad (72)$$

Результатом является система коэффициентов: $A_k = \{A_{0k}, A_{1k}, \dots, A_{5k}\}$, $k = \overline{1,3}$, определяющие коэффициенты функции (полинома):

$$f_k(X, A) = a_{0k} + a_{1k}x_1 + a_{2k}x_1^2 + a_{3k}x_2 + a_{4k}x_2^2 + a_{5k}x_1x_2, k = \overline{1,3}. \quad (73)$$

Для определения коэффициентов полинома (73) функций, таблицы 2, разработано программное обеспечение полиномиальной аппроксимации в [18] с двумя переменными и пятью факторами. В результате работы программы получены коэффициенты:

$$\begin{aligned} \text{Ao} = & [11.4751 \quad 8.8173 \quad -0.1222 \quad \% \ A_{0k} \\ & -4.8994 \quad -7.6807 \quad -0.3735 \quad \% \ A_{1k} \\ & 0.8868 \quad 2.1456 \quad 0.1916 \quad \% \ A_{2k} \\ & -0.0030 \quad 0.1851 \quad 0.0221 \quad \% \ A_{3k} \\ & 0.0048 \quad 0.0894 \quad 0.0006 \quad \% \ A_{4k} \\ & -0.0595 \quad -0.1454 \quad -0.0173]. \quad \% \ A_{5k} \end{aligned} \quad (74)$$

С учетом полученных коэффициентов Ao(1) (74) экспериментальные данные $\{x_{1i}, x_{2i}, f_{1i}, i = \overline{1, M}\}$ матрицы $I = |X, F|$ (74) преобразуются в функцию (73) $f_1(X)$.

С учетом полученных коэффициентов Ao(2) (74) экспериментальные данные $\{x_{1i}, x_{2i}, f_{2i}, i = \overline{1, M}\}$ матрицы $I = |X, F|$ (74) преобразуются в функцию (73) $f_2(X)$.

С учетом полученных коэффициентов Ao(3) экспериментальные данные $\{x_{1i}, x_{2i}, f_{3i}, i = \overline{1, M}\}$ матрицы $I = |X, F|$ (74) преобразуются в функцию (73) $f_3(X)$.

В итоге экспериментальные данные таблицы 1 сформированы с учетом целенаправленности в векторную задачу математического программирования:

$$\max f_1(X) = 11.474 - 4.899x_1 + 0.8868x_1^2 - 0.003x_2 + 0.0048x_2^2 - 0.0595x_1x_2. \quad (75)$$

$$\max f_2(X) = 8.817 - 7.681x_1 + 2.145x_1^2 + 0.1851x_2 + 0.0894x_2^2 - 0.1454x_1x_2. \quad (76)$$

$$\max f_3(X) = -0.12251 - 0.3736x_1 + 0.1916x_1^2 + 0.0222x_2 + 0.0006x_2^2 - 0.0173x_1x_2.$$

$$2.0 \leq x_1 \leq 3.5, 12.0 \leq x_2 \leq 30.0. \quad (77)$$

3.3.3. Математическая числовая модель технологического процесса с агрегированными данными эксперимента в условиях определенности.

Используя функции задачи (69)-(70), полученные в условиях определенности, и функции задачи (75)-(77), полученные в условиях неопределенности – экспериментальных данных, параметрические ограничения (77) представим математическую модель технологического процесса. Мы рассматриваем математические функции (69), (75), (76), (77) как критерии, которые характеризуют целенаправленность функционирования технологического процесса. Множество критериев $K=4$ включают: подмножество критериев $K_1 = 2$, направленных на максимизацию функций $\{f_1(X), f_3(X)\} \rightarrow \max$; подмножество критериев $K_2 = 2$, направленных на минимизацию: $\{f_2(X), f_4(X)\} \rightarrow \min$, $K = K_1 \cup K_2$.

Критерии $K = K_1 \cup K_2$ дополняются ограничениями и формируется математическую численную модель функционирования технологического процесса, представленной векторной задачей математического программирования:



$$\begin{aligned} Opt F(X) = \{ \max F_1(X) = \{ \max f_1(X) \equiv & 11.474 - 4.899x_1 + 0.8867x_1^2 - 0.0031x_2 + \\ & 0.0048x_2^2 - 0.0595x_1x_2, \end{aligned} \quad (78)$$

$$\max f_3(X) \equiv -0.1225 - 0.3735x_1 + 0.1916x_1^2 + 0.0221x_2 + 0.0006x_2^2 - 0.0173x_1x_2, \quad (79)$$

$$\min F_2(X) = \{ \min f_2(X) \equiv 8.817 - 7.68x_1 + 2.1456x_1^2 + 0.185x_2 + 0.0894x_2^2 - 0.145x_1x_2, \quad (80)$$

$$\min f_4(X) \equiv -0.2451 - 0.7471x_1 + 0.3832x_1^2 + 0.0442x_2 + 0.0012x_2^2 - 0.0346x_1x_2 \}, \quad (81)$$

$$\text{при ограничениях: } 2.01 \leq x_1 \leq 3.5, 12.01 \leq x_2 \leq 30.01, \quad (82)$$

ВЗМП (78)-(82) представляет математическую модель технологического процесса для принятия оптимального решения в совокупности с условиями определенности и неопределенности.

3.4. Программное обеспечение решения векторной задачи нелинейного программирования при равнозначных критериях и заданном приоритете критерия

Для решения векторной задачи нелинейного программирования (ВЗНП) (2.1)-(2.4) при равнозначных критериях разработана программа в системе MATLAB, которая по существу представляет программу – шаблон для написания и решения других векторных задач нелинейного программирования (2.1)-(2.4) – математических моделей инженерных систем.

3.4.1. Характеристика программного обеспечение решения ВЗНП

Программное обеспечение решения векторной задачи нелинейного программирования (2.1)-(2.4), на базе которой сформированы модели инженерных систем, реализовано на основе алгоритма решения ВЗНП, изложенного в предыдущих разделах. При решении ВЗНП по каждому критерию использована программа FMINCON(...) в системе MATLAB.

При использовании программы FMINCON(...) необходимо разработать два комплекса подпрограмм – функций для критериев и решения λ -задачи.

Первая подпрограмма - функция включает два блока: первый блок предназначен для оценки в точке X критерия $f_k(X) \forall k \in K$; второй блок для расчета первой производной в этой точке $\frac{df_k(X)}{dx} \forall k \in K$. (Подпрограмма 14: Z_TS_Krit1max_MM TT38)

Вторая подпрограмма - функция включает расчеты λ -задачи для критерия и ограничения. Для расчета критерия функция включает те же два блока: первый блок предназначен для оценки в точке X критерия $f_k(X) \forall k \in K$; второй блок для расчета первой производной в этой точке $\frac{df_k(X)}{dx} \forall k \in K$. (Подпрограмма 14: Z_TS_4Krit_L_MM TT38). Для расчета для ограничений $g_i(X), \forall i \in M$ и второй блок для расчета первой производной в этой точке $\frac{dg_i(X)}{dx} \forall i \in M$. (Подпрограмма 15; Z_TS_LConstV2_v2_MM TT38(x))

Программа FMINCON(...) используется на первом шаге алгоритма решения ВЗНП раздела 2.2.3 и на втором шаге алгоритма (минимизации). Аналогично в соответствии с алгоритмом на 4 и 5 шаге решается λ -задача.

В целом при нелинейных ограничениях программное обеспечение решения ВЗНП с «К» критериями включает: $K^*2(1 \text{ шаг}) + K^*2(2 \text{ шаг}) + 2(\lambda\text{-задача})$ функций. Так как критерии и ограничения ВЗНП индивидуальны, то для каждой ВЗНП пишется индивидуальное программное обеспечение.

В программе используется 17 подпрограмм (см. ниже по тексту).

Для решения ВЗНП (2.1)-(2.4) в [43, 44] представлен текст программы, которая по существу представляет программу – шаблон для написания и решения других ВЗНП (2.1)-(2.4) – математических моделей инженерных систем.



3.4.2. Текст программного обеспечение решения векторной задачи нелинейного программирования – модели технологического процесса.

% Программа "Решение векторной задачи нелинейного программирования." - файл: Z_TS5Krit_ProfHeinz

```
function [x,f] = Z_TS5Krit_Svarka_v4_Primer_PRN_MM_TT38(A)
```

% Автор: Машунин Юрий Константинович

% Алгоритм и программа предназначена дл. использован. в образовании и научных

% исследован., дл. коммерческого использован. обращаться.: Mashunin@mail.ru

% opt F(X)={ max F1(X)={ max f1(X)=A(1,1)+A(2,1)*x1+A(3,1)*x1.^2+A(4,1)*x2+A(5,1)*x2.^2+A(6,1)*x1.*x2',

(3.1)

% max f2(X)=A(1,2)+A(2,2)*x1+A(3,2)*x1.^2+A(4,2)*x2+A(5,2)*x2.^2+A(6,2)*x1.*x2}, (3.2)

% min F2(X)={ max f3(X)=A(1,3)+A(2,3)*x1+A(3,3)*x1.^2+A(4,3)*x2+A(5,3)*x2.^2+A(6,3)*x1.*x2,

(3.3)

% min f4(X)=A(1,4)+A(2,4)*x1+A(3,4)*x1.^2+A(4,4)*x2+A(5,4)*x2.^2+A(6,4)*x1.*x2}, (3.4)

% 1000<=f2(X)=A(1,2)+A(2,2)*x1+A(3,2)*x1.^2+A(4,2)*x2+A(5,2)*x2.^2+A(6,2)*x1.*x2<=2100;

% 20<=x1<=80, 20<=x2<=80; (3.5)

% Algorithm VZNP: Kittery + L-zadaha

%[X,Fval,EXITFLAG,OUTPUT,LAMBDA,GRAD,HESSIAN]=

```
% FMINCON(FUN,Xo,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon,options,P1,P2,...)
```

% A - матрица коэффициентов, Pq - ??????, Zn -знак у производной, k - номер критерия

global A Zn k Sk

global Pq FXopt FXmin d1 d2 d3 d4 d5 Kmm

%options=optimset('LargeScale','on');

options=optimset('LargeScale','off') %,'Algorithm','active-set');

options=optimset(options,'GradObj','on','GradConst','on');

disp('*** БЛОК 1. Решение векторной задачи нелинейного программирован.- ВЗНП:***')

disp('*** Исходные данные ВЗНП:***')

disp('opt F(X)={ max F1(X)={ max f1(X)=A(1,1)+A(2,1)*x1+A(3,1)*x1.^2+A(4,1)*x2+A(5,1)*x2.^2+A(6,1)*x1.*x2')

disp(' max f2(X)=A(1,2)+A(2,2)*x1+A(3,2)*x1.^2+A(4,2)*x2+A(5,2)*x2.^2+A(6,2)*x1.*x2)

disp(' min F2(X)={ max f3(X)=A(1,3)+A(2,3)*x1+A(3,3)*x1.^2+A(4,3)*x2+A(5,3)*x2.^2+A(6,3)*x1.*x2')

disp(' min f4(X)=A(1,4)+A(2,4)*x1+A(3,4)*x1.^2+A(4,4)*x2+A(5,4)*x2.^2+A(6,4)*x1.*x2')

disp(' 1000<=f2(X)=A(1,2)+A(2,2)*x1+A(3,2)*x1.^2+A(4,2)*x2+A(5,2)*x2.^2+A(6,2)*x1.*x2<=3100')

disp(' 20<=x1<=80, 20<=x2<=80')

Sk=[-1 -1 -1 1 -1]; disp(Sk) % Критерии: -1 -> max; 1 -> min

lb=[20. 20.]; ub=[80. 80.]; Xo=[20. 20.];

% A(:,1) A(:,2) A(:,3) A(:,4)

%Критерий 5 используются для развития системы

A=[11.4745 8.8176 -0.1225 -0.1225*2 -0.1225; % FX*1.2 Z_5factor2per_Svarka_v4_Primer

-4.8992 -7.6809 -0.3735 -0.3735*2 -0.3735;

0.8868 2.1456 0.1916 0.1916*2 0.1916;

-0.0030 0.1851 0.0221 0.0221*2 0.0221;

0.0048 0.0894 0.0006 0.0006*2 0.0006;

-0.0595 -0.1454 -0.0173 -0.0173*2 -0.0173]

lb=[2. 12.] % lb=[4. 24.]

ub=[3.5 30.] % ub=[7. 60.]

X0=[2. 12.] % X0=[2. 12.] %A=1.0*Ai



```
Pq=[1 1 1 1 1];  
Az=[1 0; % Az,bz - Матрица ограничений заданная  
     0 1];  
bz=[3.5 30]  
Aeq=[]; beq=[];  
disp('*** Решение ВЗНП при равнозначных критери_x ***')  
disp('*** Шаг 1. Решение по каждому критерию (наилучшее) ***')  
for i=1:5 %Критерии - оптимум  
    k=i  
    Zn=Sk(i)  
    if k==1  
        X0=[3.2 27.]  
    elseif k==2  
        X0=[3.3 13.]  
    else  
        X0=[3.2 13.]  
    end  
    %[xKmax,fKmax]=fmincon('Z_TS_Krit1max',Xo,Az,bz,Aeq,beq,lb,ub,'Z_TS_4Krit_Const',options);  
    [xKmax,fKmax]=fmincon('Z_TS_Krit1max_MM38',X0,Az,bz,Aeq,beq,lb,ub, "options);  
    s=strcat('Критерий: f',num2str(k),'max=',num2str(fKmax),' Точка: x',num2str(k),'max=',num2str(xKmax));  
    disp(s)  
    for j=1:5 % Величина критер. в точке оптимума  
        k=j;  
        Zn=Sk(j);  
        fXopt=[Z_TS_Krit1max_MM38(xKmax)];  
        FXopt(i,j)=fXopt;  
    end  
    Xopt(i,:)=xKmax  
    FXopt  
end  
disp('*** Шаг 2. Решение по каждому критерию (наихудшее-антиоптимум) ***')  
for i=1:5  
    k=i  
    Zn=-Sk(i)  
    if k==1  
        X0=[2.2 13.]  
    elseif k==2  
        X0=[2.1 12.5]  
    else  
        X0=[2.3 13.]  
    end  
    %[xKmin,fKmin]=fmincon('Z_TS_Krit1max',Xo,Az,bz,Aeq,beq,lb,ub,'Z_TS_4Krit_Const',options);  
    [xKmin,fKmin]=fmincon('Z_TS_Krit1max_MM38',X0,Az,bz,Aeq,beq,lb,ub, "options);  
    s=strcat('Критерий: f',num2str(k),'min=',num2str(fKmin),' Точка: x',num2str(k),'min=',num2str(xKmin));  
    disp(s)
```



```
for j=1:5
    k=j;
    Zn=-Sk(j);
    fXmin=[Z_TS_Krit1max_MM38(xKmin)];
    FXmin(i,j)=fXmin;
end
Xmin(i,:)=xKmin
FXmin
end
disp('*** IIIаг 3. Блок нормализации и анализа результатов ***')%
%Xopt FXopt: Xmin FXmin Точки оптимума и Антиоптимума и Критерии
d1=-FXopt(1,1)-FXmin(1,1) % d1=37.1381
d2=-FXopt(2,2)-FXmin(2,2) % d2=1.7000e+003
d3=-FXopt(3,3)-FXmin(3,3) % d3=1.9029e+003
d4=-FXopt(4,4)-FXmin(4,4) % d4=-201.45
d5=-FXopt(5,5)-FXmin(5,5) % d4=-201.45
d=[d1 d2 d3 d4 d5]
F=FXopt
L=[(-F(1,1)-FXmin(1,1))/d1 (-F(1,2)-FXmin(2,2))/d2 (-F(1,3)-FXmin(3,3))/d3 (-F(1,4)-FXmin(4,4))/d4 (-F(1,5)-FXmin(5,5))/d5;
    (-F(2,1)-FXmin(1,1))/d1 (-F(2,2)-FXmin(2,2))/d2 (-F(2,3)-FXmin(3,3))/d3 (-F(2,4)-FXmin(4,4))/d4 (-F(2,5)-FXmin(5,5))/d5;
    (-F(3,1)-FXmin(1,1))/d1 (-F(3,2)-FXmin(2,2))/d2 (-F(3,3)-FXmin(3,3))/d3 (-F(3,4)-FXmin(4,4))/d4 (-F(3,5)-FXmin(5,5))/d5;
    (-F(4,1)-FXmin(1,1))/d1 (-F(4,2)-FXmin(2,2))/d2 (-F(4,3)-FXmin(3,3))/d3 (-F(4,4)-FXmin(4,4))/d4 (-F(4,5)-FXmin(5,5))/d5;
    (-F(5,1)-FXmin(1,1))/d1 (-F(5,2)-FXmin(2,2))/d2 (-F(5,3)-FXmin(3,3))/d3 (-F(5,4)-FXmin(4,4))/d4 (-F(5,5)-FXmin(5,5))/d5]

disp('*** IIIаг 4. Решение L-задачи ***')%
Ao=[1 0 0;
    0 1 0;
    0 0 1];
bo=[bz 1]; Aeq=[]; beq=[];
X0=[2.5 25. 0.1]
%X0=[3.5 25. 0.1] %X0=[lb 0.] %25 25 0.3]; % Xo =
lbo=[lb 0.]; % Lo =-
ubo=[ub 1];
[Xo,Lo]=fmincon('Z_TS_4Krit_L_MM38',X0,Ao,bo,Aeq,beq,lbo,ubo,'Z_TS_LConstV2_v2_MM38',options)
%Xo = 47.4028 51.2826 0.3558 Lo = -0.3558
for j=1:5
    k=j;
    Zn=Sk(j);
    fXo=[Z_TS_Krit1max_MM38(Xo(1:2))];
    FXo(j)=fXo;
```



```
end

LXo=[(-FXo(1)-FXmin(1,1))/d1 (-FXo(2)-FXmin(2,2))/d2 (-FXo(3)-FXmin(3,3))/d3 (-FXo(4)-FXmin(4,4))/d4 (-FXo(5)-FXmin(5,5))/d5]

[FXo,LXo]=Z_TehnSist_F_L_MM38(Xo)
disp('***** Решение с двумя Критериями: 1 - 2 *****')%
X012=[2.5 27 0.1]; lbo12=[lb 0.]; ubo12=[ub 1.];
[Xo12,Lo12] =
fmincon('Z_TS_4Krit_L_MM38',X012,Ao,bo,Aeq,beq,lbo12,ubo12,'Z_TS_12_LConst_3Kr_MM38',options)
[F12,L12]=Z_TehnSist_F_L_MM38(Xo12)
disp('*** Решение с двумя Критериями: 1 - 3 ***')%
X013=[2.7 24 0.2]; lbo13=[lb 0.]; ubo13=[ub 1.];
[Xo13,Lo13] =
fmincon('Z_TS_4Krit_L_MM38',X013,Ao,bo,Aeq,beq,lbo13,ubo13,'Z_TS_13_LConst_3Kr_MM38',options)
[F13,L13]=Z_TehnSist_F_L_MM38(Xo13)
disp('***** Решение с двум Критер.: 2 - 3 *****')%
X023=[3.2 20 0.1]; lbo23=[lb 0.]; ubo23=[ub 1.];
[Xo23,Lo23] =
fmincon('Z_TS_4Krit_L_MM38',X023,Ao,bo,Aeq,beq,lbo23,ubo23,'Z_TS_23_LConst_MM38',options)
[F12,L12]=Z_TehnSist_F_L_MM38(Xo12)
disp('*** Решение с двум Критер.: 3 - 5 ***')%
X035=[lb 0.1];
lbo35=[lb 0.]; ubo35=[ub 0.3];
[Xo35,Lo35] =
fmincon('Z_TS_4Krit_L_MM38',X035,Ao,bo,Aeq,beq,lbo35,ubo35,'Z_TS_35_LConst_MM38',options)
[F35,L35]=Z_TehnSist_F_L_MM38(Xo35)
disp('*** Решение с двум. Критер.: 5 - 4 ***')%
X054=[lb 0.1];
lbo54=[lb 0.]; ubo54=[ub 0.3];
[Xo54,Lo54] =
fmincon('Z_TS_4Krit_L_MM38',X054,Ao,bo,Aeq,beq,lbo54,ubo54,'Z_TS_54_LConst_MM38',options)
[F54,L54]=Z_TehnSist_F_L_MM38(Xo54)
disp('*** Решение с двум. Критер.: 4 - 2 ***')%
X042=[lb 0.1];
lbo42=[lb 0.]; ubo42=[ub 1.];
[Xo42,Lo42] =
fmincon('Z_TS_4Krit_L_MM38',X042,Ao,bo,Aeq,beq,lbo42,ubo42,'Z_TS_42_LConst_MM38',options)
[F42,L42]=Z_TehnSist_F_L_MM38(Xo42)

disp('*** БЛОК 3. Решение ЗАДАЧИ с ПРИОРИТЕТОМ КРИТЕР. ***')%
X=[Xopt; Xo(1:2)]
fXo=[-FXo(1) -FXo(2) -FXo(3) -FXo(4)];
s=strcat('Критерии в точке оптимума Xo: FXo = ',num2str(fXo)); %Конкатенаци.строк
disp(s)
s=strcat('Относительные оценки в Xo: LXo = ',num2str(LXo)); %Конкатенаци.строк
```



```
disp(s) % Относительные оценки в Xo; LXo
disp('*** ВЫВОД: Критерии 1 и 3 наиболее противоречивы, из них выбираем приоритетный ***')%
disp('MMMMMM L-задача с приоритетом 3 критер. P=[p31 p32 p33 p34] MMMMM')
q=input('Введите приоритетный критерий (номер) '); % Ввели: q=3
s=strcat('Приоритетный критерий (номер) q=',num2str(q)); %Конкатенаци.строк
disp(s)
fqXopt=F(q,q); fqXo=FXo(q);
if Sk(q)=='0'           %Sk(q)
    s=strcat('Пределы приоритет.крит.: fq(Xo)= ',num2str(fqXo),'=>fq(X)=>',num2str(fqXopt),' =fq(Xq*)');
else
    s=strcat('Пределы приоритет.крит.: fq(Xo)= ',num2str(fqXo),'<=fq(X)<=',num2str(fqXopt),' =fq(Xq*)');
end
disp(s) % Пределы приоритет.крит.: fq(Xo)=2084.1402=>fq(X)=>1000 =fq(Xq*)
s=strcat('Введите величину приоритетного критер. q=',num2str(q), ' fq='); %Конкатенаци.строк
fq=input(s) % Введите величину приоритетного критер. q=2 fq=1500
% s=strcat('d',num2str(q))
LqXq=(fq-FXmin(q,q))/d(q) % LqXq = 0.0.7619 % d2= f2min+f2max      % d2=-2.1000e+003
Kp=(LqXq-LXo(q))/(1-LXo(q)) %коэффициент пропорциональности LXo(1) LqXq LX*   Kp = 0.6167
s=strcat(' **** Блок определен. координат точки с fq=',num2str(fq))
X=[Xopt; Xo(1:2)]
Xq=[Xo(1)+Kp*(X(q,1)-Xo(1)) Xo(2)+Kp*(X(q,2)-Xo(2))] % ... Xo(o2)+Kp*(X(q,o2)-Xo(o2))
Xo(4)+Kp*(X(q,4)-Xo(4))]
XqXo=[Xq(1) Xq(2)] % Xq(3) Xq(4) Xo(5)]
s=strcat('Координаты точки Xq=[x1=',num2str(Xq(1)), ' x2=',num2str(Xq(2))), '%, ... x3=',num2str(Xq(3)), ' x4=',num2str(Xq(4)), ']')
[FXq,LXq]=Z_TehnSist_F_L_MM38(XqXo) %[FXq,LXq]=Z38_TS_F_L(XqXo)
disp('Определение приоритетов критер.')
PqXq=[LXq(q)/LXq(1) LXq(q)/LXq(2)] % LXq(q)/LXq(3) LXq(q)/LXq(4)
minLXq=min(LXq) % minLXq = 0.1929
LXqPq=LXq(1:2).*PqXq % LXqPq = 0.7242 0.7242 0.7242 0.7242
minLXqPq=min(LXq(1:2).*PqXq) % minLXqPq = 0.7242
% *****MMMMMM*****
disp('*** Решение L-задачи с приоритетом критер. ***')
PqXopt=[L(q,q)/L(q,1) L(q,q)/L(q,2) L(q,q)/L(q,3) L(q,q)/L(q,4) L(q,q)/L(q,5)] % Приоритет
Pq(Xq*)=Lq(Xq*)/Lk(Xq*)
PqXo=[LXo(q)/LXo(1) LXo(q)/LXo(2) LXo(q)/LXo(3) LXo(q)/LXo(4) LXo(q)/LXo(5)] % Приоритет Pq(Xo) =
Lq(Xo)/Lk(Xo)
% PqXo = 0.5168 1.0000 1.0000 0.5080
Pq=[PqXo(1)+(PqXopt(1)-PqXo(1))*Kp PqXo(2)+(PqXopt(2)-PqXo(2))*Kp ...
PqXo(3)+(PqXopt(3)-PqXo(3))*Kp (PqXo(4)+(PqXopt(4)-PqXo(4))*Kp) (PqXo(5)+(PqXopt(5)-PqXo(5))*Kp)] %
%]
disp('*** Решение L-задачи с приоритетом критер. ***')
Ao=[1 0 0;
     0 1 0;
     0 0 1];
```



```
bo=[bz 1]; Aeq=[]; beq=[];
X0=[3.3 25 1];
lbo=[lb 0.];
ubo=[ub 1.];
[Xoo,Loo] = fmincon('Z_TS_4Krit_L_MM TT38',X0,Ao,bo,Aeq,beq,lbo,ubo,'Z_TS_LConstV2_v1_MM TT38',options)
[FPq,LPq]=Z_TehnSist_F_L_MM TT38(Xoo(1:2))
LooPq=LPq.*Pq %LooPq = 0.7870 0.8782 3.1025 0.7870
%fq=input(s)
Ofq=fq+FPq(2) %Ошибка Ofq = -292.9213
Odfq=Ofq/fq*100 %Ошибка в процентах Odfq = -5.8584
% MMMMMMM
disp('***** ГРАФИКА *****') %
disp('***** РИСУНОК 1. Проекц. на 2-х мерную плоскость *****') %
figure(1)
X=[Xopt; Xo(1:2)]
MX=[max(X(:,1)) max(X(:,2))] %MX = 80.0 80.0
xxx = [2:0.1:3.5]; yyy = [12:0.5:30];[x1,x2]=meshgrid(xxx,yyy);
xL=[X(1,1) X(2,1) X(3,1) X(4,1) X(1,1)];
yL=[X(1,2) X(2,2) X(3,2) X(4,2) X(1,2)];
plot(xL,yL,'k.-'); hold on;
x1max1=X(1,1); x1max2=X(1,2); plot(x1max1,x1max2,'k.');//Точка оптимума 1
text(x1max1+0.04,x1max2+0.5,'X^*','Color','r');hold on;
text(x1max1+0.04,x1max2+0.5-0.4,' 1','FontSize',6,'Color','r');hold on;
x2max1=X(2,1); x2max2=X(2,2); plot(x2max1,x2max2,'k.');//Точка оптимума 2
text(x2max1+0.03,x2max2,'X^*','Color','r');hold on;
text(x2max1+0.03,x2max2-0.4,' 2','FontSize',6,'Color','r');hold on;
x3max1=X(3,1); x3max2=X(3,2); plot(x3max1,x3max2,'k.');//Точка оптимума 3
text(x3max1+0.03,x3max2+0.5,'X^*','Color','r');hold on;
text(x3max1+0.03,x3max2+0.5-0.4,' 3','FontSize',6,'Color','r');hold on;
x4max1=X(4,1); x4max2=X(4,2); plot(x4max1,x4max2,'k.');//Точка оптимума 4
text(x4max1+0.03,x4max2-0.5,'X^*','Color','r');hold on;
text(x4max1+0.03,x4max2-0.4,' 4','FontSize',6,'Color','r');hold on;
%x5min1=X(5,1); x5min2=X(5,2); plot(x5min1,x5min2,'k.');//Точка оптимума 5
%Точка 5 критерий
% text(x5min1-0.12,x5min2-0.5,'X^*');hold on; %text(x4min1+1,x4min2,'X4min');hold on;
% text(x5min1-0.12,x5min2-0.5-0.4,' 5','FontSize',6);hold on;
% *****MIN*****
x1max1=Xmin(1,1); x1max2=Xmin(1,2); plot(x1max1,x1max2,'k.');//Точка оптимума 1
text(x1max1+0.03,x1max2,'X^0');hold on;
text(x1max1+0.03,x1max2-0.4,' 1','FontSize',6);hold on;
x2min1=Xmin(2,1); x2min2=Xmin(2,2); plot(x2min1,x2min2,'k.');//Точка оптимума 2
text(x2min1+0.03,x2min2+0.5,'X^0');hold on;
text(x2min1+0.03,x2min2+0.5-0.4,' 2','FontSize',6);hold on;
x3max1=Xmin(3,1); x3max2=Xmin(3,2); plot(x3max1,x3max2,'k.');//Точка оптимума 3
text(x3max1+0.03,x3max2+0.5,'X^0');hold on;
```



```
text(x3max1+0.03,x3max2+0.5-0.4,'    3','FontSize',6);hold on;
x4min1=Xmin(4,1); x4min2=Xmin(4,2); plot(x4min1,x4min2,'k.);hold on;
text(x4min1+0.04,x4min2-0.7,'X^0');hold on;
text(x4min1+0.04,x4min2-0.7-0.4,'    4','FontSize',6);hold on;
Xo1=X(6,1); Xo2=X(6,2); plot(Xo1,Xo2,'k.);hold on;
text(Xo1-0.06,Xo2-0.6,'X^o');hold on;
xL=[Xo(1) X(1,1) Xo(1) X(2,1) Xo(1) X(3,1) Xo(1) X(4,1) Xo(1)];
yL=[Xo(2) X(1,2) Xo(2) X(2,2) Xo(2) X(3,2) Xo(2) X(4,2) Xo(2)];
plot(xL,yL,'r.--'); hold on;
disp('*** Построение точки с приоритетом q-го критерия ***')%
xL=[Xo(1) X(q,1)];
yL=[Xo(2) X(q,2)];
plot(xL,yL,'r.-'); hold on;
plot(Xq(1),Xq(2),'k.);hold on; %Точка оптимума {x3max1=0 x3max2=0}
text(Xq(1)+0.03,Xq(2),'Xq');hold on;
A=[11.4745   8.8176   -0.1225   -0.1225*2   -0.1225; % FX*1.2 Z_5factor2per_Svarka_v4_Primer
-4.8992   -7.6809   -0.3735   -0.3735*2   -0.3735;
0.8868   2.1456   0.1916   0.1916*2   0.1916;
-0.0030   0.1851   0.0221   0.0221*2   0.0221;
0.0048   0.0894   0.0006   0.0006*2   0.0006;
-0.0595   -0.1454   -0.0173   -0.0173*2   -0.0173];
text(2.1,28,'f = 11.474-4.89925*x +0.88681*x ^2-0.00305*x + ...','FontSize',8);hold on;
text(2.1,28-0.4,' 1           1           1           2
','FontSize',6);hold on;
text(2.2,27,'lambda \geq lambda ,lambda ,lambda ','FontSize',8);hold on;
text(2.2,27-0.4,' 1       2       3       4 ','FontSize',7);hold on;

text(2.8,26,'f = 8.8176-7.681*x +2.145*x ^2+0.185*x + ...','FontSize',8);hold on;
text(2.8,26-0.4,' 2           1           1           2 ','FontSize',6);hold on;
text(2.9,25,'lambda \geq lambda ,lambda ,lambda ','FontSize',8);hold on;
text(2.9,25-0.4,' 2       1       3       4 ','FontSize',7);hold on;

text(2.8,16,'f =-0.122-0.3735*x +0.1916*x ^2+0.0221*x + ...','FontSize',8);hold on;
text(2.8,16-0.5,' 3           1           1           2
','FontSize',6);hold on;
text(2.9,15,'lambda \geq lambda ,lambda ,lambda ','FontSize',8);hold on;
text(2.9,15-0.5,' 3       1       2       4 ','FontSize',7);hold on;

text(2.1,18,'f =-0.245-0.7475*x +0.3832*x ^2+0.0442*x + ...','FontSize',8);hold on;
text(2.1,18-0.4,' 4           1           1           2
','FontSize',6);hold on;
text(2.2,17,'lambda \geq lambda ,lambda ,lambda ','FontSize',8);hold on;
text(2.2,17-0.4,' 4       1       2       3 ','FontSize',7);hold on;
xlabel('x1');hold on; ylabel('x2');hold on;
```



```
title('Set of Pareto on two-measure plane. Машунин Ю.К.);hold on;
%title('Множество Парето на 2-х мерной плоскости');hold on;

disp('*****РИСУНОК 2 НЕЛИНЕЙН. ЗАДАЧА 4 КРИТЕР.*****');
figure(2)

xxx = [2:0.1:3.5]; yyy = [12:0.5:30];[x1,x2]=meshgrid(xxx,yyy);
f1=A(1,1)+A(2,1)*x1+A(3,1)*x1.^2+A(4,1)*x2+A(5,1)*x2.^2+A(6,1)*x1.*x2;
[FX1omax,LX1omax]=Z_TSis_F_L_MM TT38(X(1,:))

f2=A(1,2)+A(2,2)*x1+A(3,2)*x1.^2+A(4,2)*x2+A(5,2)*x2.^2+A(6,2)*x1.*x2;
[FX2omax,LX2omax]=Z_TSis_F_L_MM TT38(X(2,:))

f3=A(1,3)+A(2,3)*x1+A(3,3)*x1.^2+A(4,3)*x2+A(5,3)*x2.^2+A(6,3)*x1.*x2;
[FX3omax,LX3omax]=Z_TSis_F_L_MM TT38(X(3,:))

f4=A(1,4)+A(2,4)*x1+A(3,4)*x1.^2+A(4,4)*x2+A(5,4)*x2.^2+A(6,4)*x1.*x2;
[FX4omin,LX4omin]=Z_TSis_F_L_MM TT38(X(4,:))

f5=A(1,5)+A(2,5)*x1+A(3,5)*x1.^2+A(4,5)*x2+A(5,5)*x2.^2+A(6,5)*x1.*x2;
[FX5omin,LX5omin]=Z_TSis_F_L_MM TT38(X(5,:)) %

L1=(f1-FXmin(1,1))/d1;      % d1=37.1381
L2=(f2-FXmin(2,2))/d2;      % d2=1.7000e+003
L3=(f3-FXmin(3,3))/d3;      % d3=1.9029e+003
L4=-1*(f4+FXmin(4,4))/d4;    % d4=-201.45
L5=(f5+FXmin(5,5))/d5;      % d4=-201.45

mesh(x1,x2,L1), hold on;
mesh(x1,x2,L2), hold on;
mesh(x1,x2,L3), hold on;    % 'EdgeColor','black'), hold on;
mesh(x1,x2,L4), hold on;
%mesh(x1,x2,L5), hold on;

%Kontur x1max x3max x4min x2mint x1max
x=[X(1,1) X(1,1) X(2,1) X(2,1) X(2,1) X(3,1) X(3,1) X(4,1) X(4,1) X(4,1) X(1,1)]
y=[X(1,2) X(1,2) X(2,2) X(2,2) X(2,2) X(3,2) X(3,2) X(3,2) X(4,2) X(4,2) X(4,2) X(1,2)]
z=[L(1,1) -0.2 -0.2 L(2,2) -0.2 -0.2 L(3,3) -0.2 -0.2 L(4,4) -0.2 -0.2]
plot3(x,y,z,'k--'); hold on;

%Kontur -X1max L1(X1max)
x=[X(1,1) X(1,1) X(1,1)];
y=[X(1,2) X(1,2) X(1,2)];
z=[-0.2 LX1omax(1)+0.005 1.0]; plot3(x,y,z,'r-'); hold on;
text(X(1,1)-0.05,X(1,2),-0.16,'X ^*');hold on;
text(X(1,1)-0.05,X(1,2),-0.16-0.05,' 1','FontSize',7);hold on;
text(X(1,1),X(1,2),1.05,'lambda (X ^*)');hold on;
text(X(1,1),X(1,2),1.05-0.05,' 1 1','FontSize',7);hold on; %,'Color','y'

%Kontur -X2min L2(X2min) FX2omax,LX2omax
x=[X(2,1) X(2,1) X(2,1)];
y=[X(2,2) X(2,2) X(2,2)];
z=[-0.2 LX2omax(2) 1.0]; plot3(x,y,z,'r-'); hold on;
text(X(2,1)-0.02,X(2,2),-0.13,'X ^*');hold on;
text(X(2,1)-0.02,X(2,2),-0.13-0.05,' 2','FontSize',7);hold on;
```



```
text(X(2,1),X(2,2),1.09,'lambda (X ^*)');hold on;           %,'Color','y');hold on;
text(X(2,1),X(2,2),1.09-0.05,' 2  2','FontSize',7);hold on; %,'Color','y');hold on;
%Kontur -X3max L3(X3max);
x=[X(3,1) X(3,1)];
y=[X(3,2) X(3,2)];
z=[-0.2      1.0];          plot3(x,y,z,'r.-'); hold on;
text(X(3,1)-0.04,X(3,2),-0.15,'X ^*');
text(X(3,1)-0.04,X(3,2),-0.15-0.05,' 3','FontSize',7);
text(X(3,1),X(3,2),1.05,'lambda (X ^*)');hold on;
text(X(3,1),X(3,2),1.05-0.05,' 3  3','FontSize',7);hold on;
%Kontur -X4min L4(X4min)
x=[X(4,1) X(4,1)];
y=[X(4,2) X(4,2)];
z=[-0.2      1.0];          plot3(x,y,z,'k.-'); hold on;
text(X(4,1)-0.03,X(4,2),-0.2,'X ^*'); hold on;
text(X(4,1)-0.03,X(4,2),-0.2-0.05,' 4','FontSize',7); hold on;
text(X(4,1)+0.2,X(4,2),1.09,'lambda (X ^*)');hold on;
text(X(4,1)+0.2,X(4,2),1.09-0.05,' 4  4','FontSize',7);hold on;
%Kontur -Xo Lo lambda method Xo
Xo      %Xo = 49.8463  51.5887  38.8002  0.3789
Lo=-Lo  %Lo =0.3789   %LXo = 0.7332   0.3789   0.3789   0.7459
%x=[Xo(1) Xo(1) Xo(1) Xo(1) Xo(1) Xo(1)]
%y=[Xo(2) Xo(2) Xo(2) Xo(2) Xo(2) Xo(2)]
%z=[0  LXo(2) LXo(3) LXo(1) LXo(4) LXo(5)+0.01]
x=[Xo(1) Xo(1) Xo(1) Xo(1) Xo(1)]
y=[Xo(2) Xo(2) Xo(2) Xo(2) Xo(2)]
z=[-0.2 LXo(1) LXo(2) LXo(3) -LXo(4)]  %z=[-0.2  LXo(2) LXo(3) LXo(1) LXo(4) LXo(5)+0.01]
plot3(x,y,z,'k.-'); hold on;
plot3(Xo(1),Xo(2),Lo+0.01,'k.');// hold on;
text(Xo(1)-0.04,Xo(2),-0.14,'X^o');hold on;
text(Xo(1),Xo(2),Lo-0.05,'lambda^o');hold on;
text(Xo(1),Xo(2),Lo-0.18,'lambda^o=|lambda (X^o)=|lambda (X^o)');hold on;
text(Xo(1),Xo(2),Lo-0.18-0.05,' 1  3','FontSize',7);hold on;
text(Xo(1), Xo(2),LXo(2)+0.08,'lambda (X^o)');hold on;
text(Xo(1), Xo(2),LXo(2)+0.08-0.05,' 2','FontSize',7);hold on;
text(Xo(1), Xo(2),-LXo(4)+0.08,'lambda (X^o)');hold on;
text(Xo(1), Xo(2),-LXo(4)+0.08-0.05,' 4','FontSize',7);hold on;
%Kontur Xo - LXq
x=[X(1,1) Xo(1) X(2,1) Xo(1) X(3,1)]
y=[X(1,2) Xo(2) X(2,2) Xo(2) X(3,2)]
z=[-0.2 -0.2 -0.2 -0.2 -0.2]  %z=[-0.2  LXo(2) LXo(3) LXo(1) LXo(4) LXo(5)+0.01]
plot3(x,y,z,'r.-'); hold on;
disp('*** Построение точки с приоритетом q-го критерия***');
%Kontur Xq - LXq
x=[Xq(1) Xq(1)];
```



```
y=[Xq(2) Xq(2)];  
z=[-0.2 LXq(q)]  
plot3(x,y,z,'k.-'); hold on;  
text(Xq(1),Xq(2)+0.1,-0.25,'X','Color','r');hold on;  
text(Xq(1),Xq(2)+0.1,-0.25-0.04,' q','FontSize',6,'Color','r');hold on;  
text(Xq(1),Xq(2)-0.1,LXq(q)+0.1,'lambda (X )');hold on;  
text(Xq(1),Xq(2)-0.1,LXq(q)+0.1-0.04,' q q','FontSize',6);hold on;  
xlabel('X1');hold on;  
ylabel('X2');hold on;  
zlabel('Lambda');hold on;  
title('lambda-problem Vector Optimization. Машунин Ю.К.');//hold on;  
axis([min(xxx) max(xxx) min(yyy) max(yyy)]);rotate3d; %grid off;  
  
disp('*****РИСУНОК 3 НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ 2 КРИТЕР.*****');  
figure(3)  
[FX2omin,LX2omin]=Z_TSis_F_L_MM38(X(2,:))  
[FX3omax,LX3omax]=Z_TSis_F_L_MM38(X(3,:))  
L1=(f1-FXmin(1,1))/d1;  
L3=(f3-FXmin(3,3))/d3;  
mesh(x1,x2,L1), hold on;  
mesh(x1,x2,L3), hold on;  
x=[X(1,1) X(1,1) X(2,1) X(3,1) X(3,1) X(4,1) X(1,1)]  
y=[X(1,2) X(1,2) X(2,2) X(3,2) X(3,2) X(4,2) X(1,2)]  
z=[L(1,1) -0.2 -0.2 -0.2 L(3,3) -0.2 -0.2 -0.2]  
plot3(x,y,z,'k.--'); hold on;  
%Kontur Lo x1max x3max x4min x2mint x1max  
x=[Xo(1) Xo(1) Xo(1)];  
y=[Xo(2) Xo(2) Xo(2)];  
z=[Lo LXo(2) LXo(1)];  
plot3(x,y,z,'k.-'); hold on;  
%Kontur -X1max LX1omax L1opt  
x=[X(1,1) X(1,1) X(1,1)];  
y=[X(1,2) X(1,2) X(1,2)];  
z=[-0.2 LX1omax(1)+0.005 1.0];  
plot3(x,y,z,'r.-'); hold on;  
text(X(1,1)-0.05,X(1,2),-0.16,'X ^*');hold on;  
text(X(1,1)-0.05,X(1,2),-0.16-0.05,' 1','FontSize',7);hold on;  
text(X(1,1),X(1,2),1.05,'lambda (X ^*)');hold on;  
text(X(1,1),X(1,2),1.05-0.05,' 1 1','FontSize',7);hold on; %,'Color','y'  
%Kontur -X3max L3(X3max);  
x=[X(3,1) X(3,1)];  
y=[X(3,2) X(3,2)];  
z=[-0.2 1.0]; plot3(x,y,z,'r.-'); hold on;  
text(X(3,1)-0.05,X(3,2),-0.16,'X ^*');  
text(X(3,1)-0.05,X(3,2),-0.16-0.05,' 3','FontSize',7);
```



```
text(X(3,1),X(3,2),1.05,'|\lambda(X^*)|';hold on;
text(X(3,1),X(3,2),1.05-0.05,' 3 3','FontSize',7);hold on;
text(X(2,1)-0.03,X(2,2),-0.12,'X^*');
text(X(2,1)-0.03,X(2,2),-0.12-0.05,' 2','FontSize',7);
x=[Xo(1) Xo(1) Xo(1) Xo(1) Xo(1)]
y=[Xo(2) Xo(2) Xo(2) Xo(2) Xo(2)]
z=[-0.2 LXo(1) LXo(2) LXo(3) -LXo(4)] %z=[-0.2 LXo(2) LXo(3) LXo(1) LXo(4) LXo(5)+0.01]
plot3(x,y,z,'k.-'); hold on;
plot3(Xo(1),Xo(2),Lo+0.01,'k.');?>
text(Xo(1)-0.03,Xo(2),-0.15,'X^o');hold on;
text(Xo(1),Xo(2),Lo-0.05,'|\lambda(o)|';hold on;
text(Xo(1),Xo(2),Lo-0.19,'|\lambda(o)=\lambda(X^o)|';hold on;
text(Xo(1),Xo(2),Lo-0.19-0.05,' 1 3','FontSize',7);hold on;
text(Xo(1), Xo(2),-LXo(4)+0.08,'|\lambda(X^o)|';hold on;
text(Xo(1), Xo(2),-LXo(4)+0.08-0.05,' 4','FontSize',7);hold on;

text(Xo(1), Xo(2),LXo(2)+0.08,'|\lambda(X^o)|';hold on;
text(Xo(1), Xo(2),LXo(2)+0.08-0.05,' 2','FontSize',7);hold on;
text(Xo(1)-0.06, Xo(2),LXo(4)+0.05,'|\lambda(X^o)|';hold on;
text(Xo(1)-0.06, Xo(2),LXo(4)+0.05-0.05,' 4','FontSize',7);hold on;
x=[X(1,1) Xo(1) X(2,1) Xo(1) X(3,1)]
y=[X(1,2) Xo(2) X(2,2) Xo(2) X(3,2)]
z=[-0.2 -0.2 -0.2 -0.2 -0.2] %z=[-0.2 LXo(2) LXo(3) LXo(1) LXo(4) LXo(5)+0.01]
plot3(x,y,z,'r.-'); hold on;
disp('*** Построение точки с приоритетом q-го критерия***');
%Kontur Xq - LXq
x=[Xq(1) Xq(1)];
y=[Xq(2) Xq(2)];
z=[-0.2 LXq(q)]
plot3(x,y,z,'k.-'); hold on;
text(Xq(1),Xq(2)+0.1,-0.25,'X','Color','r');hold on;
text(Xq(1),Xq(2)+0.1,-0.25-0.05,' q','FontSize',6,'Color','r');hold on;
text(Xq(1),Xq(2)-0.1,LXq(q)+0.1,'|\lambda(X)|';hold on;
text(Xq(1),Xq(2)-0.1,LXq(q)+0.1-0.05,' q q','FontSize',6);hold on;
xlabel('X1');hold on;
ylabel('X2');hold on;
zlabel('Lambda');hold on;
title('|\lambda|-problem Vector Optimization two criterion |\lambda1(X) and |\lambda3(X) . Машунин Ю.К.);hold on;
axis([min(xxx) max(xxx) min(yyy) max(yyy)]);rotate3d; %grid off;
disp('*****РИСУНОК 4 НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ F1 КРИТЕРИЙ*****');
figure(4)
xxx = [2:0.1:3.5]; yyy = [12:0.5:30];[x1,x2]=meshgrid(xxx,yyy);
[FX1omax,LX1omax]=Z_TSis_F_L_MM38(X(1,:))
mesh(x1,x2,f1), hold on; %'EdgeColor','black'), hold on;
%Kontur x1max x3max x4min x2mint x1max
```



```
x=[X(1,1) X(2,1) X(3,1) X(4,1) X(1,1)]
y=[X(1,2) X(2,2) X(3,2) X(4,2) X(1,2)]
z=[-0.2 -0.2 -0.2 -0.2 -0.2]
plot3(x,y,z,'k.-'); hold on;
x=[X(1,1) X(1,1)]; % X1opt
y=[X(1,2) X(1,2)];
z=[-0.2 -FXopt(1,1)];
plot3(x,y,z,'k.-'); hold on;
text(X(1,1)+0.05,X(1,2),0.2,'X ^*');
text(X(1,1)+0.05,X(1,2),0.2-0.2,' 1','FontSize',7);
text(X(1,1),X(1,2),-FXopt(1,1)+0.3,'f (X ^*)';
text(X(1,1),X(1,2),-FXopt(1,1)+0.3-0.2,' 1  1','FontSize',7);
x=[Xmin(1,1) Xmin(1,1)];
y=[Xmin(1,2) Xmin(1,2)];
z=[-0.2      FXmin(1,1)];
plot3(x,y,z,'k.-'); hold on;
text(Xmin(1,1)-0.03,Xmin(1,2),0.1,'X ^{0}');
text(Xmin(1,1)-0.03,Xmin(1,2),0.1-0.2,' 1','FontSize',7);
text(Xmin(1,1)-0.01,Xmin(1,2),FXmin(1,1)+0.3,'f (X ^{0})');
text(Xmin(1,1)-0.01,Xmin(1,2),FXmin(1,1)+0.3-0.2,' 1  1','FontSize',7);
text(X(2,1),X(2,2),0.3,'X ^*');hold on; % X2opt
text(X(2,1),X(2,2),0.3-0.2,' 2','FontSize',7);hold on;
text(X(3,1)-0.05,X(3,2),-0.1,'X ^*'); % X3opt
text(X(3,1)-0.05,X(3,2),-0.1-0.2,' 3','FontSize',7);
text(X(4,1)-0.03,X(4,2),0.1,'X ^*'); hold on; % X4opt
text(X(4,1)-0.03,X(4,2),0.1-0.2,' 4','FontSize',7); hold on;
x=[Xo(1) Xo(1)];
y=[Xo(2) Xo(2)];
z=[-0.2 -FXo(1)];
plot3(x,y,z,'k.-'); hold on;
text(Xo(1)+0.08,Xo(2),0.2,'X^o');hold on;
text(Xo(1)+0.1,Xo(2),-FXo(1)+0.7,'f (X ^o)');hold on;
text(Xo(1)+0.1,Xo(2),-FXo(1)+0.7-0.2,' 1','FontSize',7);hold on;
x=[X(1,1) Xo(1) X(2,1) Xo(1)  X(3,1)]
y=[X(1,2) Xo(2) X(2,2) Xo(2)  X(3,2)]
z=[-0.2 -0.2 -0.2 -0.2 -0.2] %z=[-0.2  LXo(2) LXo(3) LXo(1) LXo(4) LXo(5)+0.01]
plot3(x,y,z,'r.-'); hold on;
disp('*** Построение точки с приоритетом q-го критер.***')%
%Kontur Xq - LXq
x=[Xq(1) Xq(1)];
y=[Xq(2) Xq(2)];
z=[-0.2 -FXq(1)]
plot3(x,y,z,'k.-'); hold on;
text(Xq(1),Xq(2)+0.1,-0.4,'X','Color','r');hold on;
text(Xq(1),Xq(2)+0.1,-0.4-0.06,'  q','FontSize',7,'Color','r');hold on;
```



```
text(Xq(1)+0.03,Xq(2)-0.01,-FXq(1)+0.4,'f(X )','Color','r');hold on;
text(Xq(1)+0.03,Xq(2)-0.01,-FXq(1)+0.4-0.06,'1      q','FontSize',7,'Color','r');hold on;
%Zagolovok
xlabel('X1');hold on;
ylabel('X2');hold on;
zlabel('F1');hold on;
title('Function f1(X) in Vector Optimization problem. Машунин Ю.К.');?>
axis([min(xxx) max(xxx) min(yyy) max(yyy)]);rotate3d; %grid off;
disp('*****РИСУНОК 5 НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ F2 КРИТЕРИЙ*****');
figure(5)
xxx = [2:0.1:3.5]; yyy = [12:0.5:30];[x1,x2]=meshgrid(xxx,yyy);
[FX3omax,LX3omax]=Z_TSis_F_L_MM38(X(2,:))

mesh(x1,x2,f2), hold on;           '%EdgeColor','black'), hold on;
%Kontur   x1max x3max x4min   x2mint     x1max
x=[X(1,1) X(2,1) X(3,1) X(4,1) X(1,1)]
y=[X(1,2) X(2,2) X(3,2) X(4,2) X(1,2)]
z=[-0.2   -0.2   -0.2   -0.2   -0.2]
plot3(x,y,z,'k.--'); hold on;
text(X(1,1)-0.15,X(1,2),2.5,'X ^*');hold on;          % X1opt
text(X(1,1)-0.15,X(1,2),2.5-2.9,'  1','FontSize',7);hold on;
x=[X(2,1) X(2,1)];                           % X2opt
y=[X(2,2) X(2,2)];
z=[-0.2   -FXopt(2,2)];
plot3(x,y,z,'k.-'); hold on;
text(X(2,1),X(2,2),-4,'X ^*');
text(X(2,1),X(2,2),-4-2.6,'  2','FontSize',7);
text(X(2,1)-0.05,X(2,2)-1,-FXopt(2,2)+3.5,'f(X ^*)');
text(X(2,1)-0.05,X(2,2)-1,-FXopt(2,2)+3.5-2.6,'  2      2','FontSize',7);
x=[Xmin(2,1) Xmin(2,1)];
y=[Xmin(2,2) Xmin(2,2)];
z=[0      FXmin(2,2)];
plot3(x,y,z,'k.-'); hold on;
text(Xmin(2,1)+0.08,Xmin(2,2),-1.6,'X ^{0}');
text(Xmin(2,1)+0.08,Xmin(2,2),-1.6-2.6,'  2','FontSize',7);
text(Xmin(2,1)-0.05,Xmin(2,2)-1,FXmin(2,2)+1.4,'f(X ^{0})');
text(Xmin(2,1)-0.05,Xmin(2,2)-1,FXmin(2,2)+1.4-2.6,'  2      2','FontSize',7);
text(X(3,1)-0.05,X(3,2),3.5,'X ^*');
text(X(3,1)-0.05,X(3,2),3.5-2.5,'  3','FontSize',7);
text(X(4,1)-0.05,X(4,2),-2.50,'X ^*'); hold on;          % X4opt
text(X(4,1)-0.05,X(4,2),-2.50-2.6,'  4','FontSize',7); hold on;
x=[Xo(1) Xo(1)];
y=[Xo(2) Xo(2)];
z=[0      -FXo(2)];
plot3(x,y,z,'k.-'); hold on;
text(Xo(1),Xo(2),-3,'X^o');hold on;
```



```
text(Xo(1),Xo(2),-FXo(2)+3,'f (X ^o)');           %,'Color','y');hold on;
text(Xo(1),Xo(2),-FXo(2)+3-2.6,' 2','FontSize',7);   %,'Color','y');hold on;
x=[X(1,1) X(2,1) X(3,1) X(3,1)]
y=[X(1,2) X(2,2) X(2,2) X(3,2)]
z=[-0.2 -0.2 -0.2 -0.2 -0.2] %z=[-0.2 LXo(2) LXo(3) LXo(1) LXo(4) LXo(5)+0.01]
plot3(x,y,z,'r.-'); hold on;
disp('*** Построение точки с приоритетом q-го критерия***')%
%Kontur Xq - LXq
x=[Xq(1) Xq(1)];
y=[Xq(2) Xq(2)];
z=[-0.2 -FXq(2)]
plot3(x,y,z,'k.-'); hold on;
text(Xq(1),Xq(2),-4,'X','Color','r');hold on;
text(Xq(1),Xq(2),-4-2.6,'    q','FontSize',6,'Color','r');hold on;
text(Xq(1),Xq(2),-FXq(2)+8,'f (X )','Color','r');hold on;
text(Xq(1),Xq(2),-FXq(2)+8-2.6,' 2      q','FontSize',7,'Color','r');hold on;
%Zagolovok
xlabel('X1');hold on;
ylabel('X2');hold on;
zlabel('F2');hold on;
title('Function f2(X) in Vector Optimization problem. Машунин Ю.К.');//hold on;
axis([min(xxx) max(xxx) min(yyy) max(yyy)]);rotate3d; %grid off;
disp('*****РИСУНОК 6 НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ З КРИТЕРИЙ*****');
figure(6)
xxx = [2:0.1:3.5]; yyy = [12:0.5:30];[x1,x2]=meshgrid(xxx,yyy);
[FX3omax,LX3omax]=Z_TSis_F_L_MM38(X(3,:))
mesh(x1,x2,f3), hold on;          %'EdgeColor','black'), hold on;
%Kontur x1max x3max x4min x2mint x1max
x=[X(1,1) X(2,1) X(3,1) X(4,1) X(1,1)]
y=[X(1,2) X(2,2) X(3,2) X(4,2) X(1,2)]
z=[-0.2 -0.2 -0.2 -0.2 -0.2]
plot3(x,y,z,'k.--'); hold on;
text(X(1,1),X(1,2),-0.15,'X ^*');hold on;           % X1opt
text(X(1,1),X(1,2),-0.15-0.03,' 1','FontSize',7);hold on;
text(X(2,1),X(2,2)+1,-0.12,'X ^*');hold on;           % X2opt
text(X(2,1),X(2,2)+1,-0.12-0.03,' 2','FontSize',7);hold on;
x=[X(3,1) X(3,1)];                                % X3opt
y=[X(3,2) X(3,2)];
z=[-0.2 -FXopt(3,3)];
plot3(x,y,z,'k.-'); hold on;
text(X(3,1)-0.04,X(3,2),-0.15,'X ^*');
text(X(3,1)-0.04,X(3,2),-0.15-0.03,' 3','FontSize',7);
text(X(3,1)-0.04,X(3,2),-FXopt(3,3)+0.05,'f (X ^*)');
text(X(3,1)-0.04,X(3,2),-FXopt(3,3)+0.05-0.03,' 3      3','FontSize',7);
x=[Xmin(3,1) Xmin(3,1)];
```



```
y=[Xmin(3,2) Xmin(3,2)];  
z=[-0.2      FXmin(3,3)];  
plot3(x,y,z,'k.-'); hold on;  
text(Xmin(3,1),Xmin(3,2),-0.15,'X ^{0}');  
text(Xmin(3,1),Xmin(3,2),-0.15-0.03,' 3','FontSize',7);  
text(Xmin(3,1)+0.1,Xmin(3,2),FXmin(3,3)+0.1,'f (X ^{0})')      %,'Color','y');  
text(Xmin(3,1)+0.1,Xmin(3,2),FXmin(3,3)+0.1-0.03,' 3      3','FontSize',7) %,'Color','y');  
x=[Xo(1) Xo(1)];  
y=[Xo(2) Xo(2)];  
z=[-0.2      -FXo(3)];  
plot3(x,y,z,'k.-'); hold on;  
text(Xo(1)-0.03,Xo(2),-0.18,'X^o');hold on;  
text(Xo(1)+0.17,Xo(2),-FXo(3),'f (X ^o)');hold on;  
text(Xo(1)+0.17,Xo(2),-FXo(3)-0.03,' 3','FontSize',7);hold on;  
x=[X(1,1) Xo(1) X(2,1) Xo(1)  X(3,1)]  
y=[X(1,2) Xo(2) X(2,2) Xo(2)  X(3,2)]  
z=[-0.2  -0.2  -0.2  -0.2  -0.2]  %z=[-0.2  LXo(2) LXo(3) LXo(1) LXo(4) LXo(5)+0.01]  
plot3(x,y,z,'r.-');  hold on;  
disp('*** Построение точки с приоритетом q-го критерия***')%  
%Kontur Xq - LXq  
x=[Xq(1) Xq(1)];  
y=[Xq(2) Xq(2)];  
z=[-0.2  -FXq(3)]  
plot3(x,y,z,'k.-'); hold on;  
text(Xq(1),Xq(2)+0.1,-0.2,'X','Color','r');hold on;  
text(Xq(1),Xq(2)+0.1,-0.2-0.03,'  q','FontSize',7,'Color','r');hold on;  
text(Xq(1),Xq(2)-0.1,-FXq(3)+0.06,'f (X )');hold on;  
text(Xq(1),Xq(2)-0.1,-FXq(3)+0.06-0.03,' 3      q','FontSize',7);hold on;  
%Zagolovok  
xlabel('X1');hold on;  
ylabel('X2');hold on;  
zlabel('F3');hold on;  
title('Function f3(X) in Vector Optimization problem. Машунин Ю.К.');//hold on;  
axis([min(xxx) max(xxx) min(yyy) max(yyy)]);rotate3d; %grid off;  
disp('*****РИСУНОК 7 НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ 4 КРИТЕРИЙ*****');  
figure(7)  
xxx = [2:0.1:3.5]; yyy = [12:0.5:30];[x1,x2]=meshgrid(xxx,yyy);  
[FX4omax,LX4omax]=Z_TSis_F_L_MM38(X(4,:))  
mesh(x1,x2,f4), hold on;          '%EdgeColor','black'), hold on;  
%Kontur  x1max x3max x4min   x2mint    x1max  
x=[X(1,1) X(2,1) X(3,1) X(4,1) X(1,1)]  
y=[X(1,2) X(2,2) X(3,2) X(4,2) X(1,2)]  
z=[-0.2  -0.2  -0.2  -0.2  -0.2]  
plot3(x,y,z,'k.--'); hold on;  
text(X(1,1),X(1,2),-0.2,'X ^{*}');hold on;           % X1opt
```



```
text(X(1,1),X(1,2),-0.2-0.05,' 1','FontSize',7);hold on;
text(X(2,1),X(2,2),-0.2,[X ^*]);hold on; % X2opt
text(X(2,1),X(2,2),-0.2-0.05,' 2','FontSize',7);hold on;
text(X(3,1)-1,X(3,2),-0.15,[X ^*]);
text(X(3,1)-1,X(3,2),-0.15-0.05,' 3','FontSize',7);
x=[X(4,1) X(4,1)]; % X3opt
y=[X(4,2) X(4,2)];
z=[-0.2 FXopt(4,4)];
plot3(x,y,z,'k.-'); hold on;
text(X(4,1)-0.04,X(4,2),-0.15,[X ^*]);
text(X(4,1)-0.04,X(4,2),-0.15-0.05,' 4','FontSize',7);
text(X(4,1)-0.04,X(4,2),FXopt(4,4),'f (X ^*)');
text(X(4,1)-0.04,X(4,2),FXopt(4,4)-0.05,' 4 4','FontSize',7);
x=[Xmin(4,1) Xmin(4,1)];
y=[Xmin(4,2) Xmin(4,2)];
z=[-0.2 -FXmin(4,4)];
plot3(x,y,z,'k.-'); hold on;
text(Xmin(4,1),Xmin(4,2),-0.13,[X ^{0}]);
text(Xmin(4,1),Xmin(4,2),-0.13-0.05,' 4','FontSize',7);
text(Xmin(4,1),Xmin(4,2),-FXmin(4,4)+0.1,'f (X ^{0})') %,'Color','y');
text(Xmin(4,1),Xmin(4,2),-FXmin(4,4)+0.1-0.06,' 4 4','FontSize',7) %,'Color','y');
x=[Xo(1) Xo(1)];
y=[Xo(2) Xo(2)];
z=[-0.2 FXo(4)];
plot3(x,y,z,'k.-'); hold on;
text(Xo(1),Xo(2),-0.3,[X^o]);hold on;
text(Xo(1),Xo(2),FXo(4)+0.05,'f (X ^o)');hold on;
text(Xo(1),Xo(2),FXo(4)+0.05-0.05,' 4','FontSize',7);hold on;
x=[X(1,1) Xo(1) X(2,1) Xo(1) X(3,1) Xo(1) X(3,1)]
y=[X(1,2) Xo(2) X(2,2) Xo(2) X(3,2) Xo(2) X(3,2)]
z=[-0.2 -0.2 -0.2 -0.2 -0.2 -0.2 -0.2]
plot3(x,y,z,'r.-'); hold on;
disp('*** Построение точки с приоритетом q-го критерия***')%
%Kontur Xq - LXq
x=[Xq(1) Xq(1)];
y=[Xq(2) Xq(2)];
z=[-0.2 FXq(4)];
plot3(x,y,z,'k.-'); hold on;
text(Xq(1),Xq(2),-0.28,'X','Color','r');hold on;
text(Xq(1),Xq(2),-0.28-0.05,' q','FontSize',7,'Color','r');hold on;
text(Xq(1),Xq(2)-2,FXq(4)+0.1,'f (X )','Color','r');hold on;
text(Xq(1),Xq(2)-2,FXq(4)+0.1-0.05,' 4 q','FontSize',7,'Color','r');hold on;
%Zagolovok
xlabel('X1');hold on;
ylabel('X2');hold on;
```



```
zlabel('F4');hold on;  
title('Function f4(X) in Vector Optimization problem. Машунин Ю.К.');//hold on;  
axis([min(xxx) max(xxx) min(yyy) max(yyy)]);rotate3d; %grid off;  
% END  
% Программы  
% 1.[Программа "Расчет ограничений L-задачи"] файл: Z_TehnSist_F_L  
function [FXo,LXo]= Z_TehnSist_F_L_MMTT38(Xo)  
global k Zn Sk Pq FXmin d1 d2 d3 d4 d5  
for j=1:5  
k=j;  
Zn=Sk(j);  
fXo=[Z_TS_Krit1max_MMTT38(Xo(1:2))];  
FXo(j)=fXo;  
end  
FXo;  
LXo=[(-FXo(1)-FXmin(1,1))/d1 (-FXo(2)-FXmin(2,2))/d2 (-FXo(3)-FXmin(3,3))/d3 (FXo(4)+FXmin(4,4))/d4  
(FXo(5)+FXmin(5,5))/d5];  
% 2. [Программа "Расчет критер. L-задачи"] файл: Z_TehnSist_4Krit_L  
function [f,G] = Z_TS_4Krit_L_MMTT38(x)  
f=-x(3);  
G=[0; 0; -1];  
% 3. [Программа "Расчет ограничений L-задачи"] файл: Z_TS_12_LConst_3Kr  
function [c,ceq,DC,DCeq]=Z_TS_12_LConst_3Kr_MMTT38(x)  
global A Pq FXmin d1 d2 d3 d4  
c(1)=-Pq(1)*(A(1,1)+A(2,1)*x(1)+A(3,1)*x(1)^2+A(4,1)*x(2)+A(5,1)*x(2)^2+A(6,1)*x(1)*x(2)-  
FXmin(1,1))/d1+x(3);  
c(2)=-Pq(2)*(A(1,2)+A(2,2)*x(1)+A(3,2)*x(1)^2+A(4,2)*x(2)+A(5,2)*x(2)^2+A(6,2)*x(1)*x(2)-  
FXmin(2,2))/d2+x(3);  
%c(3)= (A(1,2)+A(2,2)*x(1)+A(3,2)*x(1)^2+A(4,2)*x(2)+A(5,2)*x(2)^2+A(6,2)*x(1)*x(2))-5500;  
%c(4)= -(A(1,2)+A(2,2)*x(1)+A(3,2)*x(1)^2+A(4,2)*x(2)+A(5,2)*x(2)^2+A(6,2)*x(1)*x(2))+3800;  
DC=[-Pq(1)*(A(2,1)+A(3,1)*2*x(1)+A(6,1)*x(2))/d1, -Pq(2)*(A(2,2)+A(3,2)*2*x(1)+A(6,2)*x(2))/d2;  
-Pq(1)*(A(4,1)+A(5,1)*2*x(2)+A(6,1)*x(1))/d1, -Pq(2)*(A(4,2)+A(5,2)*2*x(2)+A(6,2)*x(1))/d2;  
1.0, 1.0]; %, 0, 0];  
ceq=[]; DCeq=[];  
% 4. [Программа "Расчет ограничений L-задачи"] файл: Z_TS_12_LConst_3Kr  
function [c,ceq,DC,DCeq]= Z_TS_12_LConst_3Kr_MMTT38(x)  
global A Pq FXmin d1 d2 d3 d4  
c(1)=-Pq(1)*(A(1,1)+A(2,1)*x(1)+A(3,1)*x(1)^2+A(4,1)*x(2)+A(5,1)*x(2)^2+A(6,1)*x(1)*x(2)-  
FXmin(1,1))/d1+x(3);  
c(2)=-Pq(2)*(A(1,2)+A(2,2)*x(1)+A(3,2)*x(1)^2+A(4,2)*x(2)+A(5,2)*x(2)^2+A(6,2)*x(1)*x(2)-  
FXmin(2,2))/d2+x(3);  
%c(3)= (A(1,2)+A(2,2)*x(1)+A(3,2)*x(1)^2+A(4,2)*x(2)+A(5,2)*x(2)^2+A(6,2)*x(1)*x(2))-5500;  
%c(4)= -(A(1,2)+A(2,2)*x(1)+A(3,2)*x(1)^2+A(4,2)*x(2)+A(5,2)*x(2)^2+A(6,2)*x(1)*x(2))+3800;  
DC=[-Pq(1)*(A(2,1)+A(3,1)*2*x(1)+A(6,1)*x(2))/d1, -Pq(2)*(A(2,2)+A(3,2)*2*x(1)+A(6,2)*x(2))/d2;  
-Pq(1)*(A(4,1)+A(5,1)*2*x(2)+A(6,1)*x(1))/d1, -Pq(2)*(A(4,2)+A(5,2)*2*x(2)+A(6,2)*x(1))/d2];
```



```
1.0,      1.0];    %,   0,      0];  
ceq=[]; DCeq=[];  
% 5. [Программа "Расчет ограничений L-задачи"] файл: Z2_TS_13_LConst_3Kr  
function [c,ceq,DC,DCeq]= Z_TS_13_LConst_3Kr_MM38(x)  
global A Pq FXmin d1 d2 d3 d4  
c(1)=-Pq(1)*(A(1,1)+A(2,1)*x(1)+A(3,1)*x(1)^2+A(4,1)*x(2)+A(5,1)*x(2)^2+A(6,1)*x(1)*x(2)-  
FXmin(1,1))/d1+x(3);  
c(2)=-Pq(3)*(A(1,3)+A(2,3)*x(1)+A(3,3)*x(1)^2+A(4,3)*x(2)+A(5,3)*x(2)^2+A(6,3)*x(1)*x(2)-  
FXmin(3,3))/d3+x(3);  
%c(3)= (A(1,2)+A(2,2)*x(1)+A(3,2)*x(1)^2+A(4,2)*x(2)+A(5,2)*x(2)^2+A(6,2)*x(1)*x(2))-5500;  
%c(4)= -(A(1,2)+A(2,2)*x(1)+A(3,2)*x(1)^2+A(4,2)*x(2)+A(5,2)*x(2)^2+A(6,2)*x(1)*x(2))+3800;  
DC=[-Pq(1)*(A(2,1)+A(3,1)*2*x(1)+A(6,1)*x(2))/d1, -Pq(3)*(A(2,3)+A(3,3)*2*x(1)+A(6,3)*x(2))/d3;  
-Pq(1)*(A(4,1)+A(5,1)*2*x(2)+A(6,1)*x(1))/d1, -Pq(3)*(A(4,3)+A(5,3)*2*x(2)+A(6,3)*x(1))/d3;  
1.0,           1.0];    %,   0,           0];  
ceq=[]; DCeq=[];
```

6.

```
% 6. [Программа "Расчет ограничений L-задачи"] файл: Z2_TehnSist_13_LConst  
function [c,ceq,DC,DCeq]= Z_TS_13_LConst_MM38(x)  
global A Pq FXmin d1 d2 d3 d4  
c(1)=-Pq(1)*(A(1,1)+A(2,1)*x(1)+A(3,1)*x(1)^2+A(4,1)*x(2)+A(5,1)*x(2)^2+A(6,1)*x(1)*x(2)-  
FXmin(1,1))/d1+x(3);  
c(2)=-Pq(3)*(A(1,3)+A(2,3)*x(1)+A(3,3)*x(1)^2+A(4,3)*x(2)+A(5,3)*x(2)^2+A(6,3)*x(1)*x(2)-  
FXmin(3,3))/d3+x(3);  
c(3)= (A(1,2)+A(2,2)*x(1)+A(3,2)*x(1)^2+A(4,2)*x(2)+A(5,2)*x(2)^2+A(6,2)*x(1)*x(2))-5500;  
c(4)= -(A(1,2)+A(2,2)*x(1)+A(3,2)*x(1)^2+A(4,2)*x(2)+A(5,2)*x(2)^2+A(6,2)*x(1)*x(2))+3800;  
DC=[-Pq(1)*(A(2,1)+A(3,1)*2*x(1)+A(6,1)*x(2))/d1, -Pq(3)*(A(2,3)+A(3,3)*2*x(1)+A(6,3)*x(2))/d3,...  
     (A(2,2)+A(3,2)*2*x(1)+A(6,2)*x(2)), -(A(2,2)+A(3,2)*2*x(1)+A(6,2)*x(2));  
-Pq(1)*(A(4,1)+A(5,1)*2*x(2)+A(6,1)*x(1))/d1, -Pq(3)*(A(4,3)+A(5,3)*2*x(2)+A(6,3)*x(1))/d3,...  
     (A(4,2)+A(5,2)*2*x(2)+A(6,2)*x(1)), -(A(4,2)+A(5,2)*2*x(2)+A(6,2)*x(1));  
1.0,           1.0,           0,           0];  
ceq=[]; DCeq=[];
```

7.

```
% 7. [Программа "Расчет ограничений L-задачи"] файл: Z_TehnSist_23_LConst  
function [c,ceq,DC,DCeq]= Z_TS_23_LConst_MM38(x)  
global A Pq FXmin d1 d2 d3 d4  
c(1)=-Pq(3)*(A(1,3)+A(2,3)*x(1)+A(3,3)*x(1)^2+A(4,3)*x(2)+A(5,3)*x(2)^2+A(6,3)*x(1)*x(2)-  
FXmin(3,3))/d3+x(3);  
c(2)=-Pq(2)*(A(1,2)+A(2,2)*x(1)+A(3,2)*x(1)^2+A(4,2)*x(2)+A(5,2)*x(2)^2+A(6,2)*x(1)*x(2)-  
FXmin(2,2))/d2+x(3);  
%c(3)= (A(1,2)+A(2,2)*x(1)+A(3,2)*x(1)^2+A(4,2)*x(2)+A(5,2)*x(2)^2+A(6,2)*x(1)*x(2))-5500;  
%c(4)= -(A(1,2)+A(2,2)*x(1)+A(3,2)*x(1)^2+A(4,2)*x(2)+A(5,2)*x(2)^2+A(6,2)*x(1)*x(2))+3800;  
DC=[-Pq(3)*(A(2,3)+A(3,3)*2*x(1)+A(6,3)*x(2))/d3, -Pq(2)*(A(2,2)+A(3,2)*2*x(1)+A(6,2)*x(2))/d2;    %,...  
     (A(2,2)+A(3,2)*2*x(1)+A(6,2)*x(2)), -(A(2,2)+A(3,2)*2*x(1)+A(6,2)*x(2));  
-Pq(3)*(A(4,3)+A(5,3)*2*x(2)+A(6,3)*x(1))/d3, -Pq(2)*(A(4,2)+A(5,2)*2*x(2)+A(6,2)*x(1))/d2;    %,...  
     (A(4,2)+A(5,2)*2*x(2)+A(6,2)*x(1)), -(A(4,2)+A(5,2)*2*x(2)+A(6,2)*x(1));
```



1.0, 1.0]; %, 0, 0];
ceq=[]; DCeq=[];

8.

% 8. [Программа "Расчет ограничений L-задачи"] файл: Z_TehnSist_32_LConst
function [c,ceq,DC,DCeq]= Z_TS_32_LConst_MM38(x)
global A Pq FXmin d1 d2 d3 d4 d5
c(1)=-
Pq(2)*(A(1,2)+A(2,2)*x(1)+A(3,2)*x(1)^2+A(4,2)*x(2)+A(5,2)*x(2)^2+A(6,2)*x(1)*x(2)+FXmin(2,2))/d2+x(3);
c(2)=-
Pq(3)*(A(1,3)+A(2,3)*x(1)+A(3,3)*x(1)^2+A(4,3)*x(2)+A(5,3)*x(2)^2+A(6,3)*x(1)*x(2)+FXmin(3,3))/d3+x(3);
%c(3)= (A(1,2)+A(2,2)*x(1)+A(3,2)*x(1)^2+A(4,2)*x(2)+A(5,2)*x(2)^2+A(6,2)*x(1)*x(2))-5500;
%c(4)= -(A(1,2)+A(2,2)*x(1)+A(3,2)*x(1)^2+A(4,2)*x(2)+A(5,2)*x(2)^2+A(6,2)*x(1)*x(2))+3800;
DC=[-Pq(2)*(A(2,2)+A(3,2)*2*x(1)+A(6,2)*x(2))/d2, -Pq(3)*(A(2,3)+A(3,3)*2*x(1)+A(6,3)*x(2))/d3; %, ...
-Pq(2)*(A(4,2)+A(5,2)*2*x(2)+A(6,2)*x(1))/d2, -Pq(3)*(A(4,3)+A(5,3)*2*x(2)+A(6,3)*x(1))/d3; %, ...
1.0, 1.0]; %, 0, 0];
ceq=[]; DCeq=[];

9.

% 9. [Программа "Расчет ограничений L-задачи"] файл: Z_TehnSist_34_LConst
function [c,ceq,DC,DCeq]= Z_TS_34_LConst_MM38(x)
global A Pq FXmin d1 d2 d3 d4
c(1)=-
Pq(4)*(A(1,4)+A(2,4)*x(1)+A(3,4)*x(1)^2+A(4,4)*x(2)+A(5,4)*x(2)^2+A(6,4)*x(1)*x(2)+FXmin(4,4))/d4+x(3);
c(2)=-
Pq(3)*(A(1,3)+A(2,3)*x(1)+A(3,3)*x(1)^2+A(4,3)*x(2)+A(5,3)*x(2)^2+A(6,3)*x(1)*x(2)+FXmin(3,3))/d3+x(3);
%c(3)= (A(1,2)+A(2,2)*x(1)+A(3,2)*x(1)^2+A(4,2)*x(2)+A(5,2)*x(2)^2+A(6,2)*x(1)*x(2))-5500;
%c(4)= -(A(1,2)+A(2,2)*x(1)+A(3,2)*x(1)^2+A(4,2)*x(2)+A(5,2)*x(2)^2+A(6,2)*x(1)*x(2))+3800;
DC=[-Pq(4)*(A(2,4)+A(3,4)*2*x(1)+A(6,4)*x(2))/d4, -Pq(3)*(A(2,3)+A(3,3)*2*x(1)+A(6,3)*x(2))/d3; %, ...
(A(2,2)+A(3,2)*2*x(1)+A(6,2)*x(2)), -(A(2,2)+A(3,2)*2*x(1)+A(6,2)*x(2));
-Pq(4)*(A(4,4)+A(5,4)*2*x(2)+A(6,4)*x(1))/d4, -Pq(3)*(A(4,3)+A(5,3)*2*x(2)+A(6,3)*x(1))/d3; %, ...
(A(4,2)+A(5,2)*2*x(2)+A(6,2)*x(1)), -(A(4,2)+A(5,2)*2*x(2)+A(6,2)*x(1));
1.0, 1.0]; %, 0, 0];
ceq=[]; DCeq=[];

10.

% [Программа "Расчет ограничений L-задачи"] файл: Z_TehnSist_35_LConst
function [c,ceq,DC,DCeq]= Z_TS_35_LConst_MM38(x)
global A Pq FXmin d1 d2 d3 d4 d5
c(1)=-
Pq(5)*(A(1,5)+A(2,5)*x(1)+A(3,5)*x(1)^2+A(4,5)*x(2)+A(5,5)*x(2)^2+A(6,5)*x(1)*x(2)+FXmin(5,5))/d5+x(3);
c(2)=-
Pq(3)*(A(1,3)+A(2,3)*x(1)+A(3,3)*x(1)^2+A(4,3)*x(2)+A(5,3)*x(2)^2+A(6,3)*x(1)*x(2)+FXmin(3,3))/d3+x(3);
%c(3)= (A(1,2)+A(2,2)*x(1)+A(3,2)*x(1)^2+A(4,2)*x(2)+A(5,2)*x(2)^2+A(6,2)*x(1)*x(2))-5500;
%c(4)= -(A(1,2)+A(2,2)*x(1)+A(3,2)*x(1)^2+A(4,2)*x(2)+A(5,2)*x(2)^2+A(6,2)*x(1)*x(2))+3800;
DC=[-Pq(5)*(A(2,5)+A(3,5)*2*x(1)+A(6,5)*x(2))/d5, -Pq(3)*(A(2,3)+A(3,3)*2*x(1)+A(6,3)*x(2))/d3; %, ...
(A(2,2)+A(3,2)*2*x(1)+A(6,2)*x(2)), -(A(2,2)+A(3,2)*2*x(1)+A(6,2)*x(2));



-Pq(5)*(A(4,5)+A(5,5)*2*x(2)+A(6,5)*x(1))/d5, -Pq(3)*(A(4,3)+A(5,3)*2*x(2)+A(6,3)*x(1))/d3; %, ...
(A(4,2)+A(5,2)*2*x(2)+A(6,2)*x(1)), -(A(4,2)+A(5,2)*2*x(2)+A(6,2)*x(1));
1.0, 1.0]; %, 0, 0];
ceq=[]; DCeq=[];

11.

% [Программа "Расчет ограничений L-задачи"] файл: Z2_TehnSist_42_LConst
function [c,ceq,DC,DCeq]= Z_TS_42_LConst_MM38(x)
global A Pq FXmin d1 d2 d3 d4
c(1)=-
Pq(4)*(A(1,4)+A(2,4)*x(1)+A(3,4)*x(1)^2+A(4,4)*x(2)+A(5,4)*x(2)^2+A(6,4)*x(1)*x(2)+FXmin(4,4))/d4+x(3);
c(2)=-Pq(2)*(A(1,2)+A(2,2)*x(1)+A(3,2)*x(1)^2+A(4,2)*x(2)+A(5,2)*x(2)^2+A(6,2)*x(1)*x(2)-
FXmin(2,2))/d2+x(3);
%c(3)= (A(1,2)+A(2,2)*x(1)+A(3,2)*x(1)^2+A(4,2)*x(2)+A(5,2)*x(2)^2+A(6,2)*x(1)*x(2))-5500;
%c(4)= -(A(1,2)+A(2,2)*x(1)+A(3,2)*x(1)^2+A(4,2)*x(2)+A(5,2)*x(2)^2+A(6,2)*x(1)*x(2))+3800;
DC=[-Pq(4)*(A(2,4)+A(3,4)*2*x(1)+A(6,4)*x(2))/d4, -Pq(2)*(A(2,2)+A(3,2)*2*x(1)+A(6,2)*x(2))/d2; %, ...
(A(2,2)+A(3,2)*2*x(1)+A(6,2)*x(2)), -(A(2,2)+A(3,2)*2*x(1)+A(6,2)*x(2));
-Pq(4)*(A(4,4)+A(5,4)*2*x(2)+A(6,4)*x(1))/d4, -Pq(2)*(A(4,2)+A(5,2)*2*x(2)+A(6,2)*x(1))/d2; %, ...
(A(4,2)+A(5,2)*2*x(2)+A(6,2)*x(1)), -(A(4,2)+A(5,2)*2*x(2)+A(6,2)*x(1));
1.0, 1.0]; %, 0, 0];
ceq=[]; DCeq=[];

12.

function [c,ceq,DC,DCeq]= Z_TS_54_LConst_MM38(x)
global A Pq FXmin d1 d2 d3 d4 d5
c(1)=-
Pq(5)*(A(1,5)+A(2,5)*x(1)+A(3,5)*x(1)^2+A(4,5)*x(2)+A(5,5)*x(2)^2+A(6,5)*x(1)*x(2)+FXmin(5,5))/d5+x(3);
c(2)=-
Pq(4)*(A(1,4)+A(2,4)*x(1)+A(3,4)*x(1)^2+A(4,4)*x(2)+A(5,4)*x(2)^2+A(6,4)*x(1)*x(2)+FXmin(4,4))/d4+x(3);
%c(3)= (A(1,2)+A(2,2)*x(1)+A(3,2)*x(1)^2+A(4,2)*x(2)+A(5,2)*x(2)^2+A(6,2)*x(1)*x(2))-5500;
%c(4)= -(A(1,2)+A(2,2)*x(1)+A(3,2)*x(1)^2+A(4,2)*x(2)+A(5,2)*x(2)^2+A(6,2)*x(1)*x(2))+3800;
DC=[-Pq(5)*(A(2,5)+A(3,5)*2*x(1)+A(6,5)*x(2))/d5, -Pq(4)*(A(2,4)+A(3,4)*2*x(1)+A(6,4)*x(2))/d4; %, ...
(A(2,2)+A(3,2)*2*x(1)+A(6,2)*x(2)), -(A(2,2)+A(3,2)*2*x(1)+A(6,2)*x(2));
-Pq(5)*(A(4,5)+A(5,5)*2*x(2)+A(6,5)*x(1))/d5, -Pq(4)*(A(4,4)+A(5,4)*2*x(2)+A(6,4)*x(1))/d4; %, ...
(A(4,2)+A(5,2)*2*x(2)+A(6,2)*x(1)), -(A(4,2)+A(5,2)*2*x(2)+A(6,2)*x(1));
1.0, 1.0]; %, 0, 0];
ceq=[]; DCeq=[];

13.

% 13. [Программа "Расчет ограничений L-задачи"] файл: Z_TehnSist_F_L
function [FXo,LXo]= Z_TS_F_L_MM38(Xo)
global k Zn Sk Pq FXmin d1 d2 d3 d4
for j=1:4
k=j;
Zn=Sk(j);
fXo=[Z_TehnSist_Krit1max(Xo(1:2))];
FXo(j)=fXo;



```
end
FXo;
LXo=[(-FXo(1)-FXmin(1,1))/d1 (-FXo(2)-FXmin(2,2))/d2 (-FXo(3)-FXmin(3,3))/d3 (FXo(4)+FXmin(4,4))/d4];
14.

% 14. [Программа "Расчет 1 критер. - max"] файл: Z_TehnSist_Krit1max
function [f,G] = Z_TS_Krit1max_MM38(x)
global A Zn k %A - матрица коэффициентов,Zn -знак у функции и производной
f=Zn*(A(1,k)+A(2,k)*x(1)+A(3,k)*x(1).^2+A(4,k)*x(2)+A(5,k)*x(2).^2+A(6,k)*x(1).*x(2));
G=[Zn*(A(2,k)+A(3,k)*2*x(1)+A(6,k)*x(2)) Zn*(A(4,k)+A(5,k)*2*x(2)+A(6,k)*x(1))];
15.

% 15. [Программа "Расчет ограничений L-задачи"] файл: Z2_TehnSist_LConst1
function [c,ceq,DC,DCeq]= Z_TS_LConstV2_v1_MM38(x)
global A Pq FXmin d1 d2 d3 d4
c(1)=-
Pq(1)*(A(1,1)+A(2,1)*x(1)+A(3,1)*x(1)^2+A(4,1)*x(2)+A(5,1)*x(2)^2+A(6,1)*x(1)*x(2)+FXmin(1,1))/d1+x(3);
c(2)=-
Pq(2)*(A(1,2)+A(2,2)*x(1)+A(3,2)*x(1)^2+A(4,2)*x(2)+A(5,2)*x(2)^2+A(6,2)*x(1)*x(2)+FXmin(2,2))/d2+x(3);
c(3)=-
Pq(3)*(A(1,3)+A(2,3)*x(1)+A(3,3)*x(1)^2+A(4,3)*x(2)+A(5,3)*x(2)^2+A(6,3)*x(1)*x(2)+FXmin(3,3))/d3+x(3);
c(4)=-
Pq(4)*(A(1,4)+A(2,4)*x(1)+A(3,4)*x(1)^2+A(4,4)*x(2)+A(5,4)*x(2)^2+A(6,4)*x(1)*x(2)+FXmin(4,4))/d4+x(3);
%c(5)= (A(1,2)+A(2,2)*x(1)+A(3,2)*x(1)^2+A(4,2)*x(2)+A(5,2)*x(2)^2+A(6,2)*x(1)*x(2))-5500;
%c(6)= -(A(1,2)+A(2,2)*x(1)+A(3,2)*x(1)^2+A(4,2)*x(2)+A(5,2)*x(2)^2+A(6,2)*x(1)*x(2))+3800;
DC=[-Pq(1)*(A(2,1)+A(3,1)*2*x(1)+A(6,1)*x(2))/d1, -Pq(2)*(A(2,2)+A(3,2)*2*x(1)+A(6,2)*x(2))/d2, -
Pq(3)*(A(2,3)+A(3,3)*2*x(1)+A(6,3)*x(2))/d3, ...
-Pq(4)*(A(2,4)+A(3,4)*2*x(1)+A(6,4)*x(2))/d4; %, (A(2,2)+A(3,2)*2*x(1)+A(6,2)*x(2)), -
(A(2,2)+A(3,2)*2*x(1)+A(6,2)*x(2)); ...
-Pq(1)*(A(4,1)+A(5,1)*2*x(2)+A(6,1)*x(1))/d1, -Pq(2)*(A(4,2)+A(5,2)*2*x(2)+A(6,2)*x(1))/d2, -
Pq(3)*(A(4,3)+A(5,3)*2*x(2)+A(6,3)*x(1))/d3, ...
-Pq(4)*(A(4,4)+A(5,4)*2*x(2)+A(6,4)*x(1))/d4; %, (A(4,2)+A(5,2)*2*x(2)+A(6,2)*x(1)), -
(A(4,2)+A(5,2)*2*x(2)+A(6,2)*x(1));
1.0, 1.0, 1.0, ...
1.0]; % d1=41.54
% d2=1.7000e+003
% d3=1.9029e+003
% d4=-201.45
% DC=[(A(2,2)+2*A(3,2)*x(1)+A(6,2)*x(2)), (A(4,2)+2*A(5,2)*x(2)+A(6,2)*x(1));
% -(A(2,2)+2*A(3,2)*x(1)+A(6,2)*x(2)), -(A(4,2)+2*A(5,2)*x(2)+A(6,2)*x(1))];

ceq=[]; DCeq=[];
16.

% 16. [Программа "Расчет ограничений L-задачи"] файл: Z2_TehnSist_LConst1
function [c,ceq,DC,DCeq]= Z_TS_LConstV2_v2_MM38(x)
global A Pq FXmin d1 d2 d3 d4
```



```
c(1)=-Pq(1)*(A(1,1)+A(2,1)*x(1)+A(3,1)*x(1)^2+A(4,1)*x(2)+A(5,1)*x(2)^2+A(6,1)*x(1)*x(2)-  
FXmin(1,1))/d1+x(3);  
c(2)=-Pq(2)*(A(1,2)+A(2,2)*x(1)+A(3,2)*x(1)^2+A(4,2)*x(2)+A(5,2)*x(2)^2+A(6,2)*x(1)*x(2)-  
FXmin(2,2))/d2+x(3);  
c(3)=-Pq(3)*(A(1,3)+A(2,3)*x(1)+A(3,3)*x(1)^2+A(4,3)*x(2)+A(5,3)*x(2)^2+A(6,3)*x(1)*x(2)-  
FXmin(3,3))/d3+x(3);  
c(4)=-Pq(4)*(A(1,4)+A(2,4)*x(1)+A(3,4)*x(1)^2+A(4,4)*x(2)+A(5,4)*x(2)^2+A(6,4)*x(1)*x(2)-  
FXmin(4,4))/d4+x(3);  
%c(5)= (A(1,2)+A(2,2)*x(1)+A(3,2)*x(1)^2+A(4,2)*x(2)+A(5,2)*x(2)^2+A(6,2)*x(1)*x(2))-5500;  
%c(6)= -(A(1,2)+A(2,2)*x(1)+A(3,2)*x(1)^2+A(4,2)*x(2)+A(5,2)*x(2)^2+A(6,2)*x(1)*x(2))+3800;  
DC=[-Pq(1)*(A(2,1)+A(3,1)*2*x(1)+A(6,1)*x(2))/d1, -Pq(2)*(A(2,2)+A(3,2)*2*x(1)+A(6,2)*x(2))/d2, -  
Pq(3)*(A(2,3)+A(3,3)*2*x(1)+A(6,3)*x(2))/d3,...  
-Pq(4)*(A(2,4)+A(3,4)*2*x(1)+A(6,4)*x(2))/d4; %, (A(2,2)+A(3,2)*2*x(1)+A(6,2)*x(2)), -  
(A(2,2)+A(3,2)*2*x(1)+A(6,2)*x(2));  
-Pq(1)*(A(4,1)+A(5,1)*2*x(2)+A(6,1)*x(1))/d1, -Pq(2)*(A(4,2)+A(5,2)*2*x(2)+A(6,2)*x(1))/d2, -  
Pq(3)*(A(4,3)+A(5,3)*2*x(2)+A(6,3)*x(1))/d3,...  
-Pq(4)*(A(4,4)+A(5,4)*2*x(2)+A(6,4)*x(1))/d4; %, (A(4,2)+A(5,2)*2*x(2)+A(6,2)*x(1)), -  
(A(4,2)+A(5,2)*2*x(2)+A(6,2)*x(1));  
1.0, 1.0, 1.0,  
...  
1.0]; %, 0,  
0];  
%d1=-FXopt(1,1)-FXmin(1,1) % d1=41.54  
%d2=-FXopt(2,2)-FXmin(2,2) % d2=1.7000e+003  
%d3=-FXopt(3,3)-FXmin(3,3) % d3=1.9029e+003  
%d4= FXopt(4,4)+FXmin(4,4) % d4=-201.45  
% DC=[(A(2,2)+2*A(3,2)*x(1)+A(6,2)*x(2)), (A(4,2)+2*A(5,2)*x(2)+A(6,2)*x(1));  
% -(A(2,2)+2*A(3,2)*x(1)+A(6,2)*x(2)), -(A(4,2)+2*A(5,2)*x(2)+A(6,2)*x(1))];  
ceq=[]; DCeq=[];
```

17.

```
% 17. [Программа "Расчет ограничений L-задачи"] файл: Z_TSis_F_L  
function [FXo,LXo]=Z_TSis_F_L_MM38(Xo)  
global k Zn Sk Pq FXmin d1 d2 d3 d4  
for j=1:4  
k=j;  
Zn=Sk(j);  
fXo=[Z_TS_Krit1max_MM38(Xo(1:2))];  
FXo(j)=fXo;  
end  
FXo;  
LXo=[(-FXo(1)-FXmin(1,1))/d1 (-FXo(2)-FXmin(2,2))/d2 (-FXo(3)-FXmin(3,3))/d3 (FXo(4)+FXmin(4,4))/d4];  
%
```

Конец



3.5. Принятие оптимального решения в двухпараметрической четырехмерной модели технологического процесса

3.5.1. Математическое моделирование технологического процесса при равнозначных критериях.

Решение векторной задачи (78)-(82) базируется на методах, основанных на аксиоматике и принципе гарантированного результата при равнозначных критериях, рассмотренных в первом разделе. Используя программное обеспечение, результаты решения векторной задачи (78)-(82) с равнозначными критериями представим как ряд шагов.

Шаг 1. Решается векторная задача (78)-(82) по каждому критерию отдельно. Используется функция $fmincon(...)$ системы MATLAB. Обращение к функции $fmincon(...)$ в [15, 18, 19]. Результат расчета по отдельному критерию представляет точку оптимума:

X_k^* и $f_k^* = f_k(X_k^*)$, $k = \overline{1, K}$ $K=4$ – величины критериев в этой точке, т. е. наилучшее решение по каждому критерию:

$$\begin{aligned} X_1^* &= \{x_1 = 2.01, x_2 = 30.01\}, f_1^* = f_1(X_1^*) = -5.8834; \\ X_2^* &= \{x_1 = 3.51, x_2 = 30.01\}, f_2^* = f_2(X_2^*) = -78.9642; \\ X_3^* &= \{x_1 = 3.51, x_2 = 12.01\}, f_3^* = f_3(X_3^*) = -0.5424; \\ X_4^* &= \{x_1 = 2.91, x_2 = 12.01\}, f_4^* = f_4(X_4^*) = -0.3335. \end{aligned} \quad (83)$$

На рисунке 3 представим ограничения (82), получившиеся точки оптимума $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$ (83) в двухмерной системе координат $\{x_1, x_2\}$. Исследуемое множество допустимых точек S не пусто, представляет собой компакт:

$$S = \{X \in \mathbb{R}^N / 2.0 \leq x_1 \leq 3.5, 12.0 \leq x_2 \leq 30.0\} \neq \emptyset.$$

Пространство множества точек, лежащих между точками оптимума $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$ представляет с одной стороны допустимое множество точек S , а с другой стороны множество точек, оптимальных по Парето, S^o . Таким образом для данной задачи множество допустимых и множество точек, оптимальных по Парето, S^o , равны между собой: $S = S^o$.

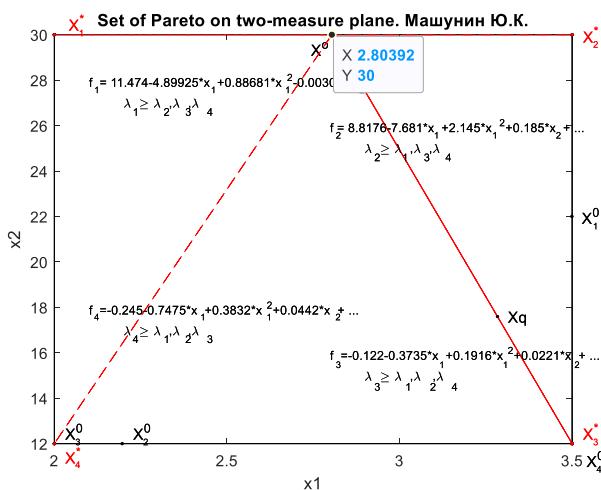


Рисунок 3 – Множество Парето, $S^o \subset S$, точки оптимума $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$, и оптимальная точка X^o в двухмерной системе координат $\{x_1, x_2\}$

Шаг 2. Решается векторная задача (53)-(57) для вычисления наихудшей величины каждого критерия: Y_k^0 и $h_k^0 = h_k(Y_k^0)$, $k = \overline{1, K}$, $K=4$, которые представляют антиоптимум решения первого шага. (Верхний индекс ноль). При этом решается ВЗМП (78)-(83) для



каждого критерия $k = \overline{1, K_1}$ на минимум, и для критериев $k = \overline{1, K_2}$ на максимум. Как результат решения получим: точку оптимума $X_k^0 = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ по соответствующему критерию $k = \overline{1, K}$; $f_k^0 = f_k(X_k^0)$ – величину k -го критерия в точке, $X_k^0, k = \overline{1, K}$:

$$\begin{aligned} X_1^0 &= \{x_1 = 3.50, x_2 = 2.0051\}, f_1^0 = f_1(X_1^0) = 2.8664; \\ X_2^0 &= \{x_1 = 2.1953, x_2 = 12.01\}, f_2^0 = f_2(X_2^0) = 13.561 \\ X_3^0 &= \{x_1 = 2.01, x_2 = 12.01\}, f_3^0 = f_3(X_3^0) = -0.16671; \\ X_4^0 &= \{x_1 = 3.51, x_2 = 12.01\}, f_4^0 = f_4(X_4^0) = -1.0848. \end{aligned} \quad (84)$$

Шаг 3. Системный анализ (т.е. анализ по каждому критерию) множества точек, оптимальных по Парето.

Определяются в точках оптимума $X^* = \{X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*\}$ величины целевых функций $F(X^*) = \|f_q(X_k^*)\|_{q=\overline{1, K}}^{k=\overline{1, K}}$, вектор отклонений по каждому критерию на допустимом множестве

S $d_k = f_k^* - f_k^0, k = \overline{1, 4}$: $D = (d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4)^T$; матрица относительных оценок:

$$\lambda(Y^*) = \|\lambda_q(Y_k^*)\|_{q=\overline{1, K}}^{k=\overline{1, K}}, \text{ где } \lambda_k(X) = (h_k - h_k^0)/d_k. \quad d_k = \{3.017, 65.4, 0.709, 1.418\}.$$

$$F(X^*) = \begin{vmatrix} 5.883 - 79.327 - 0.06191 & 0.12381 \\ -3.1730 - 78.9640 & 0.3039 & 0.6076 \\ -3.3469 - 17.2061 - 0.5423 & 1.0848 \\ -4.4506 - 13.6435 & 0.1668 - 0.3335 \end{vmatrix}, \quad \lambda(X^*) = \begin{vmatrix} \mathbf{1.0} & 1.0056 & 0.3234 & 0.6777 \\ 0.1018 & \mathbf{1.0} & 0.6637 & 0.3365 \\ 0.1594 & 0.0556 & \mathbf{1.0} & 0.00 \\ 0.5252 & 0.0014 & 0.00 & \mathbf{1.0} \end{vmatrix} \quad (85)$$

Системный анализ величин по каждому критерию $F(X^*)$ (85), а также анализ критериев в относительных оценках $\lambda(X^*)$ показал, что в оптимальных точках $X^* = \{X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*\}$, расположенных по диагонали, относительная оценка $\lambda(X_k^*) = 1, k = \overline{1, K}$ равна единице. Остальные критерии значительно меньше единицы. А в задаче требуется найти такую точку (параметры технологического процесса), при которых относительные оценки критериев наиболее близки к единице. На решение этой задачи направлено построение и решение λ -задачи, представленной на шаге 4, 5.

Шаг 4. Построение λ -задачи осуществляется в два этапа: на первом этапе строится максиминная задача оптимизации с нормализованными критериями:

$$\lambda^0 = \max_{X \in S} \min_{k \in K} \lambda_k(X), G(X) \leq 0, X \geq 0. \quad (86)$$

Максиминная задача (86) на втором этапе преобразуется в стандартную (однокритериальную) задачу математического программирования (λ -задача):

$$\lambda^0 = \max \lambda, \quad (87)$$

$$\lambda - (11.4745 - 4.8992x_1 + 0.8868x_1^2 - 0.003x_2 + 0.0048x_2^2 - 0.0595x_1x_2 - f_1^0)/d_1 \leq 0, \quad (88)$$

$$\lambda - (-0.1225 - 0.3735x_1 + 0.1916x_1^2 + 0.022x_2 + 0.0006x_2^2 - 0.0173x_1x_2 - f_2^0)/d_2 \leq 0, \quad (89)$$

$$\lambda - (8.8176 - 7.6809x_1 + 2.1456x_1^2 + 0.1851x_2 + 0.0894x_2^2 - 0.1454x_1x_2 - f_3^0)/d_3 \leq 0, \quad (90)$$

$$\lambda - (-0.245 - 0.747x_1 + 0.3832x_1^2 + 0.0442x_2 + 0.0012x_2^2 - 0.0346x_1x_2 - f_4^0)/d_4 \leq 0, \quad (91)$$

$$\text{ограничения } 2.01 \leq x_1 \leq 3.5, 12.01 \leq x_2 \leq 30.01, \quad (92)$$

где вектор неизвестных имеет размерность $N+1$: $X = \{x_1, \dots, x_2, \lambda\}, N=2$.

Шаг 5. Решение λ -задачи (87)-(92).

При решении λ -задачи (87)-(92) используется функция `fmincon(...)`.

В системе MATLAB обращение к функции `fmincon(...)`, [17, 18]:

`[Xo,Lo]=fmincon('Z_TS_2Krit_L',X0,Ao,bo,Aeq,beq,lbo,ubo,'Z_TS_LConst',options)`.

Результат решения векторной задачи оптимизации (78)-(82) при равнозначных критериях, с соответствующей λ -задачей (87)-(92) получили:



точка оптимума X^o при равнозначных критериях

$$X^o = \{X^o, \lambda^o\} = \{X^o = \{x_1 = 2.804, x_2 = 30.0, \lambda^o = 0.35410\}\}, \quad (93)$$

которая представляет конструктивные параметры технологического процесса при равнозначных критериях (характеристиках). Точка оптимума X^o представлена на рисунке 3; величины критериев $f_k(X^o), k = \overline{1, K}$ в точке оптимума X^o :

$$f_1(X^o) = 3.935, f_2(X^o) = 77.931, f_3(X^o) = 0.0841, f_4(X^o) = 0.1681; \quad (94)$$

которые представляют характеристики технологического процесса;

величины относительных оценок $\lambda_k(X^o), k = \overline{1, K}$ в точке оптимума X^o :

$$\lambda_1(X^o) = 0.3542, \lambda_2(X^o) = 0.9842, \lambda_3(X^o) = 0.3542, \lambda_4(X^o) = 0.6459; \quad (95)$$

максимальный нижний уровень $\lambda^o = 0.3542$ в точке оптимума X^o :

который измерен в относительных единицах, среди всех относительных оценок: $\lambda^o = \min\{\lambda_1(X^o), \lambda_2(X^o), \lambda_3(X^o), \lambda_4(X^o)\} = 0.3542$;

$\lambda^o = 0.3542$ также называют гарантированным результатом, измеренный в относительных единицах. Гарантированный результат говорит о следующем: величину относительной оценки $\lambda_k(X^o)$ и величину характеристики технологического процесса $f_k(X^o)$ нельзя улучшить, не ухудшая при этом другие характеристики процесса.

В точке оптимума X^o , в соответствии с теоремой 1, критерии 1, 3 противоречивы. Это противоречие определяется тем, что выполняются равенства: $\lambda_1(X^o) = \lambda_3(X^o) = \lambda^o = 0.3542$, а остальные критерии неравенством $\{\lambda_2(X^o) = 0.9842, \lambda_4(X^o) = 0.6459\} > \lambda^o$.

3.5.2. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – модели технологического процесса в относительных единицах в трехмерной системе координат

На рисунке 3 представлено допустимое множество точек S , которое образовано ограничениями (82). На этом рисунке точки оптимума $X^* = \{X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*\}$, объединенные в контур, представляют множество точек, оптимальных по Парето, $S^o \subset S$. Координаты точек $\{X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*\}$, а также характеристики технологического процесса в относительных единицах $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3(X), \lambda_4(X)$, представлены на рис. 4 в трех мерном пространстве x_1, x_2 и λ , где третья ось λ - относительная оценка.

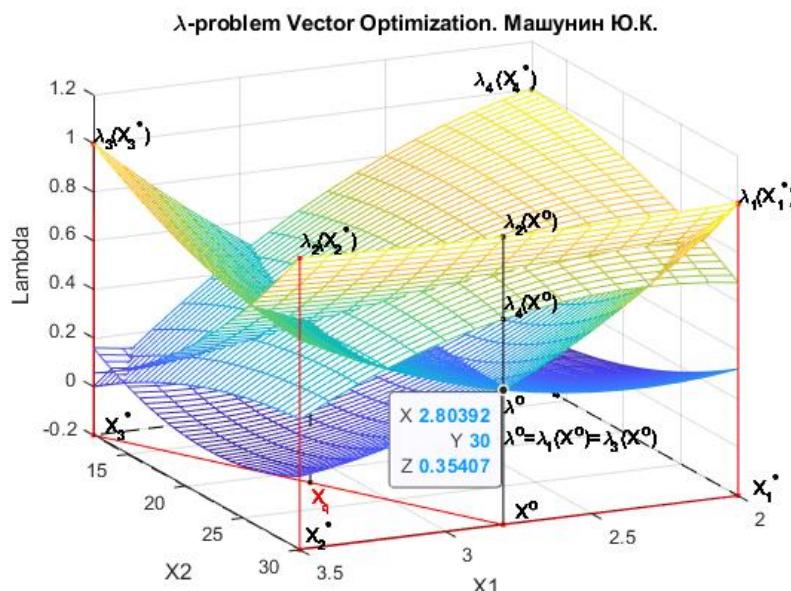


Рисунок 4 – Результаты решения λ -задачи $\lambda_1(Y), \lambda_2(Y), \lambda_3(Y), \lambda_4(Y)$ в трехмерной системе координат x_1, x_2 и λ



3.1.1. Решение ВЗМП, представляющей математическую модель технологического процесса, с приоритетом критерия (обратная задача).

Лицом, принимающим решения (ЛПР), как правило, является конструктор технологического процесса.

Шаг 1. Решение векторной задачи (78)-(82) при равнозначных критериях. Результаты решения векторной задачи при равнозначных критериях представлены на шаге 1, алгоритм решения задачи представлен на разделе 3. Численные результаты решения векторной задачи представлены выше.

Множество точек $S^o \subset S$, оптимальных по Парето, находится между отдельными оптимальными точками $\{X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*\}$. Полученная информация $\{X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*\}$ вместе с точкой оптимума X^o при равнозначных критериях является основой для исследования и принятия решений по структуре множества Парето.

Если результаты решения векторной задачи с равнозначными критериями X^o не удовлетворяют лицо, принимающее решение, то выбор оптимального решения осуществляется по приоритету одного из критериев из подмножества точек $S_1^o, S_2^o, S_3^o, S_4^o$, показанных на **рис. 4**.

Шаг 2. Выбор приоритетного критерия $q \in K$ лицом, принимающим решения.

В соответствии с теоремой 1 известно, что в оптимальной точке X^o всегда имеется два наиболее противоречивых критерия, $q \in K$ и $v \in K$, для которых в относительных единицах выполняется точное равенство:

$$\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_v(X^o), q \in K, v \in K, X \in S,$$

а для остальных критериев $k \in K$ выполняется неравенства:

$$\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), \forall k \in K, q \neq v \neq k.$$

Для подготовки информации для принятия решения на экран выдаются показатели (характеристики) технологического процесса (93), которые получены при решении ВЗМП с равнозначными критериями в точке X^o :

$$F(X^o) = \{f_1(X^o) = 3.9345, f_2(X^o) = 77.9319, f_3(X^o) = 0.0844, f_4(X^o) = 0.1687\};$$

относительные оценки в X^o :

$$\lambda(X^o) = \{\lambda_1(X^o) = 0.3541, \lambda_2(X^o) = 0.9842, \lambda_3(X^o) = 0.3541, \lambda_4(X^o) = 0.6459\}.$$

Из полученных вычислений $\lambda(X^o)$ видно, что наиболее противоречивыми критериями являются первый и третий:

$$\lambda^o = \{\lambda_1(X^o), \lambda_3(X^o)\} = 0.3541, \quad (96)$$

Выберем из **рис. 4** первый и третий и представим $\{\lambda_1(X^o), \lambda_3(X^o)\}$ в относительных единицах на **рис. 5**.

Как правило, из этой пары: $\lambda^o = \lambda_1(X^o) = \lambda_3(X^o)$ противоречивых критериев выбирается критерий, который лицо, принимающее решение, хотел бы улучшить. Критерий, который выбрал ЛПР, называется «приоритетным критерием»: $q = 3 \in K$.

Этот критерий исследуется в противоречии с первым критерием $k = 1 \in K$.

Выдается сообщение на дисплей:

`q=input('Введите приоритетный критерий (номер) q=')` - Ввели: $q=3$.

Шаг 3. Вычисляются числовые пределы изменения приоритетного критерия $q=3 \in K$ в физических и относительных единицах.

Для этого определяются численные значения критерия $q=3 \in K$ в натуральных единицах при переходе из точки оптимума X^o в точку оптимума X_q^* , полученную на первом шаге.

Пределы изменения критерия $q=3$ в натуральных единицах выдаются на экран:



$$f_q(X^o) = -0.084354 \leq f_q(X) \leq -0.54235 = f_q(X_q^*), q = 3 \in K. \quad (97)$$

Пределы изменения критерия $q = 3 \in K$ в относительных единицах выдаются на экран:

$$\lambda_q(X^o) = 0.35407 \leq \lambda_q(X) \leq 1 = \lambda_q(X_q^*), q = 3 \in K. \quad (98)$$

Выражения (97) и (98) $f_q(X)$ и $\lambda_q(X)$ выдаются на дисплей для анализа.

Шаг 4. Лицом принимающим решения, осуществляется выбор величины приоритетного критерия $q \in K$. (Decision-making).

На экран выдается сообщение: «Ведите величину приоритетного критерия $f_q=»$ - ЛПР вводит, например, $f_q=0.3$.

Шаг 5. Расчет относительной оценки для критерия $f_q = 0.3$. Для заданной величины приоритетного критерия $f_q=0.3$ рассчитывается относительная оценка:

$$\lambda_q = \frac{f_q - f_q^0}{f_q^* - f_q^0} = \frac{0.30 - (-0.16670)}{0.5435 - (-0.16670)} = 0.65821. \quad (99)$$

Рассчитанная оценка λ_q при переходе от точки оптимума X^o к X_q^* лежит в пределах:

$$\lambda_q(X^o) = 0.35408 \leq \lambda_q(X) = 0.65821 \leq 1.0 = \lambda_q(X_q^*), q = 3 \in K.$$

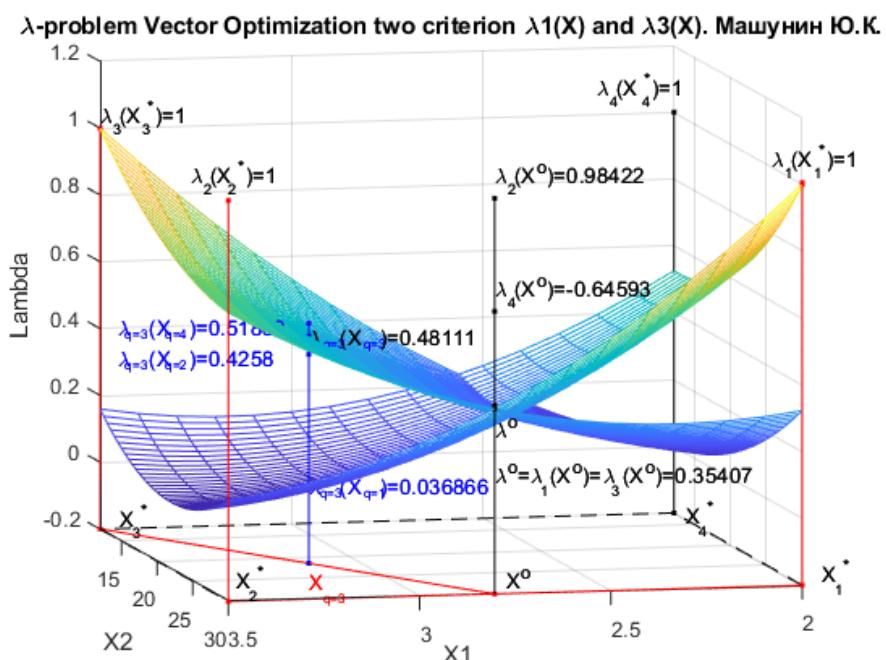


Рисунок 5 – Решение λ -задачи (87)-(92): функции $\lambda_1(X)$ и $\lambda_3(X)$ в трехмерной системе координат $x_1 x_3$ и λ . В точке X^o
 $\lambda_1(X^o) = \lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o) = 0.3542$.

Шаг 6. Расчет коэффициента линейной аппроксимации ρ .

Используя стандартные приемы линейной аппроксимации и, предполагая линейный характер изменения критерия $f_q(X)$ в (97), а также соответственно относительной оценки λ_q , рассчитаем коэффициент пропорциональности между $\lambda_q(X^o), \lambda_q$, названный как ρ :

$$\rho = \frac{\lambda_q - \lambda_q(X^o)}{\lambda_q(X_q^*) - \lambda_q(X^o)} = \frac{0.6582 - 0.35407}{1 - 0.35407} = 0.4708..$$

Шаг 7. Определим координаты приоритета критериев с размерностью $f_q=0.3$, используя коэффициент пропорциональности ρ .



Мы предполагаем, что изменения вектора $X^q = \{x_1 \ x_2\}, q = 3$ при переходе от точки оптимума X^o к X_q^* имеет линейный характер. Определим координаты для точки с размерностью $f_q = 0.3$ с относительной оценкой λ_q :

$$X_q = \{x_1^q = x_1^o + \rho(x_q^*(1) - x_1^o), \dots, x_N^q = x_N^o + \rho(x_q^*(N) - x_N^o)\}, \quad (100)$$

где $X^o = \{x_1^o, \dots, x_N^o\}$, $X_q^* = \{x_q^*(1), \dots, x_q^*(N)\}$.

$$X^o = \{x_1^o = 2.8039, x_2^o = 30.01\}, X_q^* = \{x_q^*(1) = 3.5, x_q^*(2) = 12.01\}.$$

В результате решения уравнений (100) получили точку с координатами:

$$X_q = \{x_1 = 3.13171, x_2 = 21.5249\}.$$

Шаг 8. Вычисление главных показателей точки X_q :

$$F^q = \{f_k(X_q), k = \overline{1, K}\}; \lambda^q = \{\lambda_k(X_q) = \frac{f_k(X_q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}\}; P^q = \{p_k^q = \frac{\lambda_k(X_q)}{\lambda_k(X_q)}, k = \overline{1, K}\}.$$

Результат решения векторной задачи оптимизации (78)-(82) при заданной величиной третьего приоритетного критерия $f_q = 0.3$ получили:

точка оптимума X_q при заданном $f_q = 0.3$: $X_q = \{x_1 = 3.13171, x_2 = 21.5249\}$,

которая представляет конструктивные параметры технологического процесса при заданной величине третьего приоритетного критерия $f_q = 0.3$;

величины критериев $f_k(X_q), k = \overline{1, K}$ в точке оптимума X_q :

$$F^q = \{f_1(X_q) = 2.978, f_2(X_q) = 41.410, f_3(X_q) = 0.1744, f_4(X_q) = 0.3489\};$$

которые представляют характеристики технологического процесса;

величины относительных оценок $\lambda_k(X_q), k = \overline{1, K}$ в точке оптимума X_q :

$$\lambda_k(X_q) = \{\lambda_1(X_q) = 0.03691, \lambda_2(X_q) = 0.426, \lambda_3(X_q) = 0.481, \lambda_4(X_q) = 0.52\};$$

максимальный нижний уровень $\lambda^o = 0.3542$ в точке оптимума X^o :

который измерен в относительных единицах, среди всех относительных оценок:

$$\lambda^o = \min\{\lambda_1(X^o), \lambda_2(X^o), \lambda_3(X^o), \lambda_4(X^o)\} = 0.3542;$$

вектор приоритетов $P^q = \{p_k^q = \frac{\lambda_k(X_q)}{\lambda_k(X_q)}, k = \overline{1, K}\}$:

$$P^q = \{p_1^q = 6.27891, p_2^q = 17.941, p_3^q = 1.0, p_4^q = 0.911\}.$$

По аналогии можно вычислить любую оптимальную точку X_t^o из множества Парето:

$$X_t^o = \{\lambda_t^o, X_t^o\} \in S^o.$$

При моделировании могут быть выполнены некоторое множество расчетов. Могут быть изменены параметрические ограничения (57), функции. В итоге может быть получен некоторый набор оптимальных решений (это и есть математическое моделирование). Из этого множества решений выбираем окончательный вариант. В нашем примере в (1) вариант входит в полученный набор оптимальных решений: параметры технологического процесса $X^o = \{x_1 = 2.804, x_2 = 30.0, \lambda^o = 0.35410\}$ при равнозначных критериях; параметры технологического процесса при заданном приоритетном критерии $q=3$: $X_q = \{x_1 = 3.13171, x_2 = 21.5249\}$.

Геометрическую интерпретацию симметрии $\lambda_1(X^o) = \lambda_3(X^o)$ решения покажем на рис. 6.

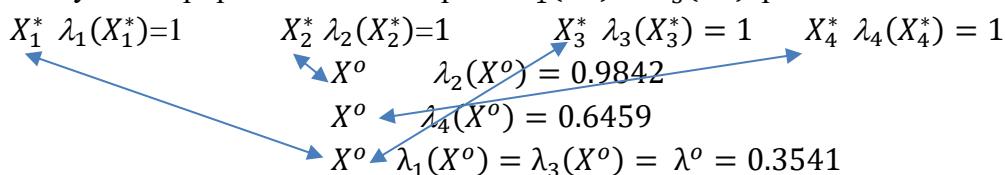


Рис. 6. Геометрическую интерпретацию симметрии в моделировании технологического процесса с нормализованными критериями: $\lambda_1(X), \dots, \lambda_4(X)$.

Анализ результатов. Рассчитанная на шаге 8 размерность критерия $f_q(X_t^o), q \in K$, обычно не равна заданной величине $f_q = 0.3$. Ошибка выбора:

$$\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q| = |0.1744 - 0.3| = 0.125,$$

характеризуется ошибкой линейной аппроксимации $\Delta f_{q\%} = \frac{\Delta f_q}{f_q} * 100 = 40.2\%$.

3.1.2. Геометрическая интерпретация в физических единицах результатов решения векторной задачи в трехмерной системе координат.

Мы сформировали параметры технологического процесса x_1, x_2 , которые представили, во-первых, в двумерной x_1, x_2 на рис. 3, и, во-вторых, в трехмерной системе координат x_1, x_2 and λ на рис. 4, 5, 6. Далее представим эти параметры в физических единицах для каждой функции $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$ последовательно на рис. 7, 8, 9 и 10. $f_1(X)$.

Первая характеристика технологического процесса в физических единицах показана фиг. 7.

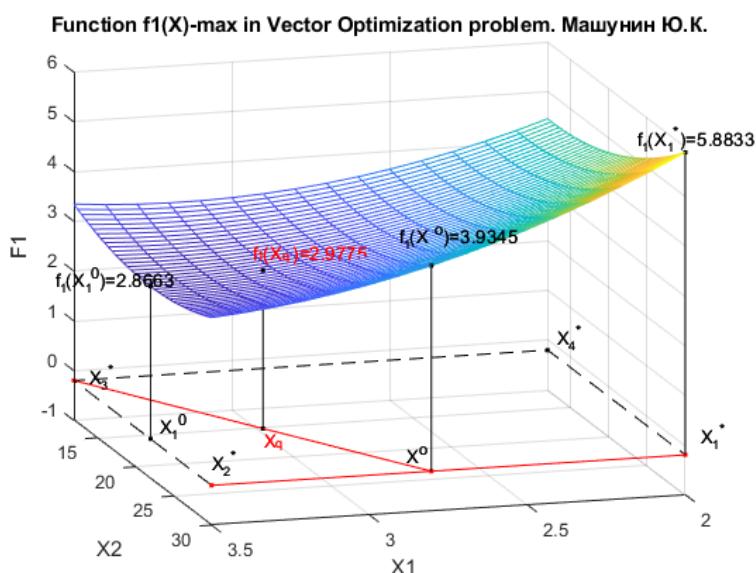


Рисунок 7 – Первая характеристика $f_1(X)$ технологического процесса в физических единицах в трехмерной системе координат $\{x_1, x_2$ and $f_1(X)\}$.

Точки оптимума:

X_1^* – точка максимума;

X^o – равнозначные критерии;

$X_{q=3}$ – приоритет 3 критерия;

X_1^0 – точка минимума

– это параметры физических характеристик технологического процесса.

Представим в физических единицах характеристики технологического процесса:

$$f_1^* = f_1(X_1^*) = -5.8834 \leq$$

$$f_1(X^o) = 3.9345 \leq$$

$$f_1(X_{q=3}) = 2.9777 \leq$$

$$f_1^0 = f_1(X_1^0) = 2.8664$$

$f_2(X)$ вторая характеристика технологического процесса в физических единицах показана на фиг. 8.



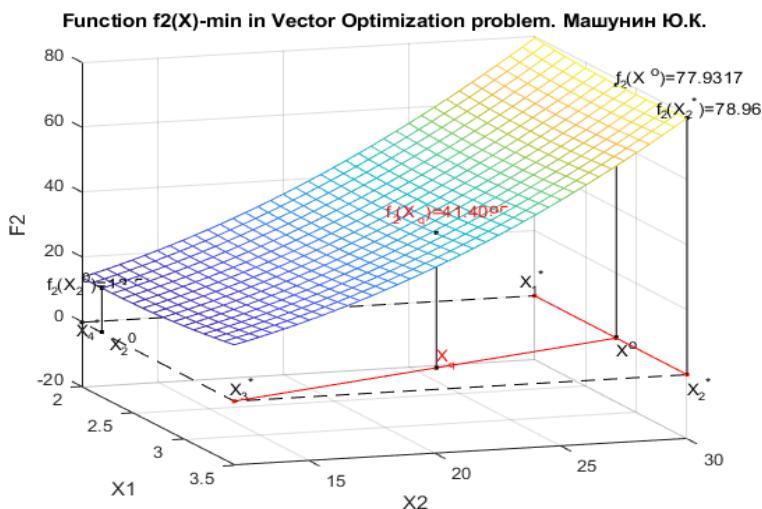


Рисунок 8 – Вторая характеристики $f_2(X)$ технологического процесса в физических единицах в трехмерной системе координат $\{x_1, x_2 \text{ and } f_2(X)\}..$

Точки оптимума:

X_2^* - точка максимума;

X^0 – равнозначные критерии;

$X_{q=3}$ – приоритет 3 критерия;

X_2^0 – точка минимума

– это параметры физических характеристик технологического процесса.

Представим в физических единицах характеристики технологического процесса:

$$f_2^* = f_2(X_2^*) = 78.931 \leq$$

$$f_2(X^0) = 77.409 \leq$$

$$f_2(X_{q=3}) = 41.409 \leq$$

$$f_2^0 = f_2(X_2^0) = 13.561$$

$f_3(X)$ третья характеристика технологического процесса в физических единицах показана на фиг. 9.

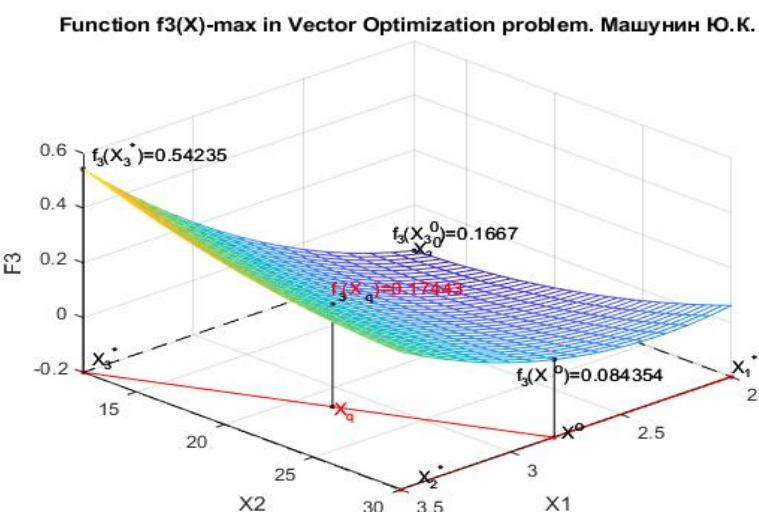


Рисунок 9 – Третья характеристики $f_3(X)$ технологического процесса в физических единицах в трехмерной системе координат $\{x_1, x_2 \text{ and } f_3(X)\}..$



Точки оптимума:

X_3^* – точка максимума;
 X^o – равнозначные критерии;
 $X_{q=3}$ – приоритет 3 критерия;
 X_3^0 – точка минимума

– это параметры физических характеристик технологического процесса.

Представим в физических единицах характеристики технологического процесса:

$$\begin{aligned}f_3^* &= f_3(X_3^*) = 0.5424 \leq \\f_3(X^o) &= 0.0841 \leq \\f_3(X_{q=3}) &= 0.3174 \leq \\f_3^0 &= f_3(X_3^0) = 0.1667\end{aligned}$$

$f_4(X)$ четвертая характеристики технологического процесса в физических единицах показана на рис. 10.

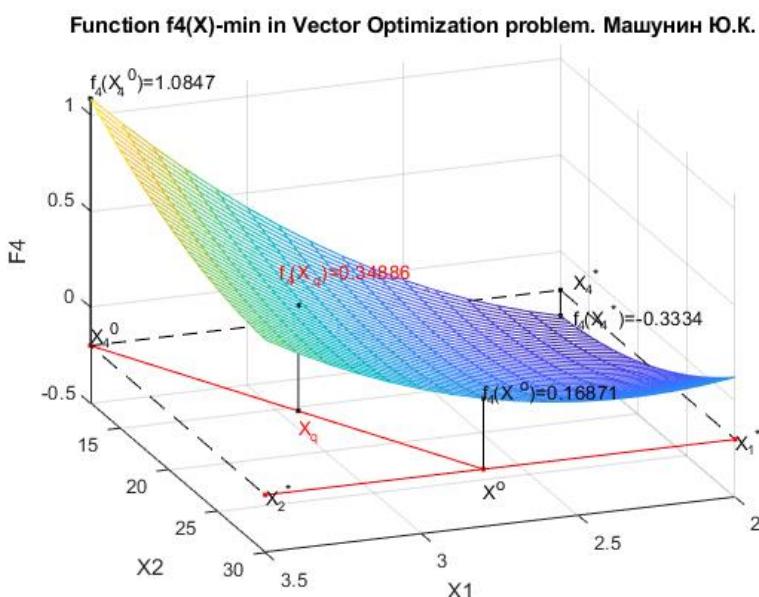


Рисунок 10 – Четвертая характеристики $f_4(X)$ технологического процесса в физических единицах в трехмерной системе координат $\{x_1, x_2 \text{ and } f_2(X)\}$.

Точки оптимума:

X_4^* - точка максимума;
 X^o – равнозначные критерии;
 $X_{q=3}$ – приоритет 3 критерия;
 X_4^0 – точка минимума

– это параметры физических характеристик технологического процесса.

Представим в физических единицах характеристики технологического процесса:

$$\begin{aligned}f_4^* &= f_4(X_4^*) = 0.3335 \leq \\f_4(X^o) &= 0.1687 \leq \\f_4(X_{q=3}) &= 0.3468 \leq \\f_4^0 &= f_4(X_4^0) = 1.0848\end{aligned}$$



4. Математическая модель и Методология моделирования и выбора оптимальных параметров сложных инженерных систем в условиях определенности, неопределенности

4.1. Математическая модель технической системы, технологического процесса и структуры материала в условиях определенности и неопределенностью в общем виде

Математические модели технической системы, технологического процесса и структуры материала представлены в условиях определенности в моделях: (1a)-(4a), (1b)-(4b), (1c)-(1b) и неопределенности: (5a)-(10a), (5b)-(10b), (5c)-(10c). Представим эти модели в общем виде - векторной задачей математического программирования: Математическая модель инженерной системы (обозначения структуры материала).

$$Opt H(Y) = \{ \max H_1(Y) = \{ \max h_k(Y), k = \overline{1, K_1^{def}} \}, \quad (101)$$

$$\max I_1(Y) = \{ \max h_k(Y_i, i = \overline{1, M}), k = \overline{1, K_1^{unc}} \}, \quad (102)$$

$$\min H_2(Y) = \{ \min h_k(Y), k = \overline{1, K_2^{def}} \}, \quad (103)$$

$$\min I_2(Y) = \{ \min h_k(Y_i, i = \overline{1, M}), k = \overline{1, K_2^{unc}} \}, \quad (104)$$

$$\text{при ограничениях } h_k^{\min} \leq h_k \leq h_k^{\max}, k = \overline{1, K}, \quad (105)$$

$$G(X) \leq 0, \sum_{v=1}^V y_v = 100\%, \quad (106)$$

$$y_v^{\min} \leq y_v \leq y_v^{\max}, v = \overline{1, V}, \quad (107)$$

где Y - вектор управляемых переменных (конструктивных параметров материала);

$H(Y) = \{H_1(Y) I_1(Y) H_2(Y) I_2(Y)\}$ - векторный критерий, каждая компонента которого представляет вектор критериев (характеристик) материала, которые функционально зависят от значений вектора переменных Y . Критерии $H_1(Y) H_2(Y)$ функционально зависят от значений вектора переменных Y , которые сформированы в условиях определенности и обозначены $K_1^{def} K_2^{def}$, (*definiteness*). Критерии $I_1(Y) I_2(Y)$ характеризуют дискретные значения функций, которые функционально зависят от дискретных значений вектора переменных Y , обозначены $K_1^{unc} K_2^{unc}$ (*uncertainty*) множество критериев \max и \min сформированы в условиях неопределенности.

Стандартные ограничения (105) и (106): функциональные, параметрические и общие, (107) параметрические ограничения.

4.2. Методология моделирования и выбора оптимальных параметров сложных инженерных систем в условиях определенности, неопределенности

В качестве объекта исследования нами рассматриваются «сложная (многофункциональная) инженерная система», [17, 42, 44]. В организационном плане процесс моделирования и симулирования (the process of modeling and simulation of a engineering system) сложных инженерных систем, включающий три вида выше представленных задач, сформирован в виде методологии.

Методология разделена на две части. Первая часть – «Выбор оптимальных параметров инженерных систем в условиях определенности – равнозначные критерии»: включает два блока, вторая часть – «Выбор оптимальных параметров инженерных систем в условиях неопределенности - с приоритетом одного из критериев»: включает два блока. Каждый блок разделен на ряд этапов.

«Методология выбора оптимальных параметров инженерных систем в условиях определенности и неопределенности на базе многомерной математики».

Часть 1. Выбор оптимальных параметров инженерных систем в условиях определенности – равнозначные критерии.



Блок 1. Формирование технического задания, преобразование условий неопределенности (связанных с экспериментальными данными) в условия определенности, построение математической и численной модели инженерной системы (the process of modeling of a engineering system) включает 4 этапа.

1 этап. Формирование технического задания (исходных данных) для численного моделирования и выбора оптимальных параметров системы. Исходные данные формирует конструктор, который проектирует инженерную систему.

2 этап. Построение математической и численной модели инженерной системы в условиях определенности.

3 этап. Преобразование условий неопределенности в условия определенности и построение математической и численной модели инженерной системы в условиях определенности.

4 этап. Построение агрегированной математической и численной модели инженерной системы в условиях определенности.

Блок 2. Принятие оптимального решения (выбора оптимальных параметров) в инженерной системе (материал) при равнозначных критериях на базе многомерной математики (the process of simulation of a engineering system)

5 этап. Решение векторной задачи математического программирования (ВЗМП) - модели инженерной системы при равнозначных критериях (решение прямой задачи).

6 этап. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП при равнозначных критериях в трехмерной системе координат в относительных единицах.

7 этап. Анализ результатов решения Векторной Задачи Математического Программирования при равнозначных критериях - подготовка информации для принятия решений с приоритетом отдельного критерия из всего множества критериев.

Часть 2. Выбор оптимальных параметров инженерных систем в условиях неопределенности - с приоритетом одного из критериев.

Блок 3. Анализ, сравнение результатов решения ВЗМП при равнозначных критериях сложной инженерной системы (модели структуры материала) и подготовка к выбору оптимальных параметров по приоритетному критерию.

8 этап. 1. Анализ и сравнение результатов решения векторной задачи с равнозначными критериями с четырьмя и двумя переменными. 2. Вывод из анализа: **Информация об Инженерной Системе** в физических единицах для принятия решений с приоритетом критерия. 3. Подготовка к геометрической интерпретации решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по приоритетному критерию.

9 этап. Геометрическая интерпретация результатов решения при проектировании инженерной системы перехода от двухмерного к N -мерному пространству в относительных единицах.

Блок 4.k1. Исследование, выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы (структуре материала) по первому приоритетному критерию, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП

4.1.k1. Решение ВЗМП - модели сложной инженерной системы (структуре материала) при заданном приоритете первого критерия в многомерной математике. (решение обратной задачи). **4.2.k1.** Анализ результатов решения векторной задачи математического программирования - модели инженерной системы при заданном приоритете первого критерия.



4.3.k1. Геометрическая интерпретация результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по первому приоритетному критерию **в относительных единицах**.

4.4.k1. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП с приоритетом первого критерия – модели структуры материала при проектировании в трехмерной системе координат **в физических единицах**. Остальные три блока сформированы по аналогии

Блок 4.k2. Исследование, выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы (структуре материала) по второму приоритетному критерию, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП.

Блок 4.k3. Исследование, выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы (структуре материала) по третьему приоритетному критерию, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП.

Блок 4.k4. Исследование, выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы (структуре материала) по четвертому приоритетному критерию, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП.

4.3. Моделирование и принятие оптимального решения по числовому множеству критериев структуры материала с четырьмя параметрами

В качестве объекта исследования нами рассматриваются «Инженерные системы», к которым относятся «структуре материала», [18, 20-26]. Структура материала рассматривается с четырьмя параметрами и четырьмя характеристиками. Экспериментальные данные структуры материала представим в виде задачи принятия решений второго вида (70):

$$F = \begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{2,1} & x_{3,1} & x_{4,1} & f_1^1, \dots, f_1^K \\ & \dots & & & \\ x_{1,M} & x_{2,M} & x_{3,M} & x_{4,M} & f_M^1, \dots, f_M^K \end{vmatrix} \text{ - problem of 2-type, } K = 4. \quad (108)$$

Исследование инженерной системы (структуре материала) выполнено:
во-первых, в условиях определенности, когда известны данные о функциональных характеристиках инженерной системы;

во-вторых, в условиях неопределенности, когда известны дискретные значения отдельных характеристик; также известны данные об ограничениях, которые накладываются на функционирование системы (структуре материала).

Используя регрессионный анализ экспериментальные данные F преобразуются в векторную задачу математического программирования:

$$\max f_k(X, A) = a_{0k} + a_{1k}x_1 + a_{2k}x_2 + a_{3k}x_3 + a_{4k}x_4 + a_{5k}x_1x_2 + a_{6k}x_1x_3 + a_{7k}x_1x_4 + a_{8k}x_2x_3 + a_{9k}x_2x_4 + a_{10k}x_3x_4 + a_{11k}x_1^2 + a_{12k}x_2^2 + a_{13k}x_2^2 + a_{14k}x_2^2, k = \overline{1, K_1}.$$

$$\min f_k(X, A) = a_{0k} + a_{1k}x_1 + a_{2k}x_2 + a_{3k}x_3 + a_{4k}x_4 + a_{5k}x_1x_2 + a_{6k}x_1x_3 + a_{7k}x_1x_4 + a_{8k}x_2x_3 + a_{9k}x_2x_4 + a_{10k}x_3x_4 + a_{11k}x_1^2 + a_{12k}x_2^2 + a_{13k}x_2^2 + a_{14k}x_2^2, k = \overline{1, K_2}. \quad (109)$$

При ограничениях $x_1^0 \leq x_1 \leq x_1^*, x_2^0 \leq x_2 \leq x_2^*, x_3^0 \leq x_3 \leq x_3^*, x_4^0 \leq x_4 \leq x_4^*$.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100. \quad (110)$$

Математический аппарат моделирования инженерной системы (109)-(110) базируется на теории и методах векторной оптимизации, которые представлены в предыдущих главах.



5. Выбор оптимальных параметров инженерной системы (материал сложной структуры) в условиях определенности и неопределенности на базе многомерной математики. Численная реализация.

Первый этап, а также этап анализа результатов решения, выбора приоритетного критерия и его величины выполняется *конструктором материала сложной структуры*. Остальные этапы выполняются *математиком - программистом*.

5.1. Часть 1. Выбор оптимальных параметров инженерных систем в условиях определенности – равнозначные критерии.

5.1.1. 1 этап. Формирование Технического задания (исходных данных): «Выбор оптимальных параметров материала сложной структуры».

Исходные данные формирует конструктор, который проектирует инженерную систему.

Дано. Мы исследуем структуру материала. Состав структуры материала определяется четырьмя компонентами: $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, которые представляют вектор управляемых переменных. Параметры структуры материала заданы в следующих пределах:

$$21 \leq y_1 \leq 79; 5 \leq y_2 \leq 59; 2.1 \leq y_3 \leq 9.0; 2.2 \leq y_4 \leq 7.0. \quad (111)$$

Качество состава структуры материала определяются четырьмя характеристиками:

$H(Y) = \{h_1(Y), h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)\}$, величина оценки которых зависит от вектора параметров $Y = \{y_j, j = \overline{1, N}, N = 4\}$.

Условия определенности. Они характеризуются тем, что для первой характеристики $h_1(Y)$ известна функциональная зависимость от параметров $Y = \{y_j, j = \overline{1, N}, N = 4\}$.

$$\begin{aligned} h_1(Y) = 323.84 - 2.249y_1 - 3.49y_2 + 10.7267y_3 + 13.124y_4 + 0.0968y_1y_2 - \\ 0.062y_1y_3 - 0.169y_1y_4 + 0.0743y_2y_3 - 0.1042y_2y_4 - 0.0036y_3y_4 + 0.0143y_1^2 + 0.0118y_2^2 - \\ 0.2434y_3^2 - 0.5026x_4^2, \quad (112) \end{aligned}$$

Условия неопределенности. Они характеризуются тем, что для второй, третьей и четвертой характеристики: $h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)$ известны результаты экспериментальных данных: величины параметров и соответствующих характеристик. Числовые значения параметров Y и характеристик $h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)$ представлены в таблице 1.

Таблица 1

Числовые значения параметров и характеристик материала

y_1	y_2	y_3	y_4	$h_2(Y)$	$h_3(Y)$	$h_4(Y)$
20	0	2	2	1149.6	115.1	24.24
20	0	2	5	1164.0	114.5	27.60
20	0	2	8	1176.0	114.4	28.80
20	0	5	2	1212.0	118.8	30.00
20	0	5	5	1260.0	113.8	31.20
20	0	5	8	1257.6	113.3	32.40
20	0	8	2	1256.4	110.7	33.60
20	0	8	5	1252.8	109.2	34.80
20	0	8	8	1251.6	108.5	34.80
20	30	2	2	2143.2	128.3	19.92
20	30	2	5	2154.0	127.4	21.60
20	30	2	8	2163.6	126.8	25.20
20	30	5	2	2176.8	126.1	29.76
20	30	5	5	2185.2	124.3	33.48
20	30	5	8	2198.4	124.1	37.20



20	30	8	2	2211.6	123.9	39.48
20	30	8	5	2232.0	121.4	42.00
20	30	8	8	2245.2	121.7	49.20
20	60	2	2	2954.4	150.4	15.60
20	60	2	5	2820.0	144.9	18.00
20	60	2	8	2772.0	140.8	21.60
20	60	5	2	2748.0	138.6	24.24
20	60	5	5	2832.0	140.8	28.80
20	60	5	8	2904.0	143.5	32.40
20	60	8	2	3022.8	146.0	35.16
20	60	8	5	3036.0	144.9	39.60
20	60	8	8	3056.4	143.8	44.88
50	0	2	2	3583.2	181.3	11.28
50	0	2	5	3601.2	180.8	14.40
50	0	2	8	3608.4	179.4	16.80
50	0	5	2	3616.8	179.1	21.12
50	0	5	5	3622.8	178.0	22.80
50	0	5	8	3637.2	177.6	27.60
50	0	8	2	3651.6	176.9	30.84
50	0	8	5	3672.0	175.3	36.00
50	0	8	8	36852	174.7	40.56
50	30	2	2	1195.2	123.6	52.80
50	30	2	5	1212.0	118.7	60.00
50	30	2	8	1236.0	115.9	64.80
50	30	5	2	1251.6	115.1	68.64
50	30	5	5	1272.0	113.2	75.60
50	30	5	8	1296.0	111.8	82.80
50	30	8	2	1318.8	110.7	88.08
50	30	8	5	1344.0	108.2	97.20
50	30	8	8	1388.4	106.3	107.64
50	60	2	2	2176.8	132.8	40.56
50	60	2	5	2196.0	131.1	45.60
50	60	2	8	2220.0	129.7	52.80
50	60	5	2	2245.2	128.3	60.00
50	60	5	5	2286.0	127.0	67.20
50	60	5	8	2294.4	125.6	73.20
50	60	8	2	2313.6	123.9	79.44
50	60	8	5	2340.0	114.5	85.20
50	60	8	8	2382.0	119.5	99.00
80	0	2	2	2988.0	154.8	31.92
80	0	2	5	3012.0	153.2	36.00
80	0	2	8	3036.0	151.8	43.20
80	0	5	2	3056.4	150.4	51.36
80	0	5	5	3108.0	150.7	61.20



80	0	5	8	3156.0	151.2	72.00
80	0	8	2	3244.8	151.5	82.80
80	0	8	5	3228.0	144.9	86.40
80	0	8	8	3193.2	140.8	90.36
80	30	2	2	3616.8	185.7	23.28
80	30	2	5	3639.6	183.5	30.00
80	30	2	8	3660.0	182.2	36.00
80	30	5	2	3685.2	181.3	42.72
80	30	5	5	3708.0	179.4	48.00
80	30	5	8	3732.0	178.0	54.00
80	30	8	2	3753.6	176.9	62.16
80	30	8	5	3672.0	175.3	73.20
80	30	8	8	3822.0	172.5	81.72
80	60	2	2	1218.0	128.3	87.00
80	60	2	5	1248.0	125.6	94.80
80	60	2	8	1272.0	124.2	103.20
80	60	5	2	1318.8	121.7	116.16
80	60	5	5	1344.0	118.7	126.00
80	60	5	8	1392.0	115.9	136.80
80	60	8	2	1422.0	115.1	145.44
80	60	8	5	1464.0	110.4	156.00
80	60	8	8	1524.0	108.5	174.72
$\min y_i(X), i=1, \dots, 81$				1149.6	92.4	11.3
$\max y_i(X), i=1, \dots, 81$				3822.0	161.5	174.7

На числовые значения параметров $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ наложены ограничения:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 100.$$

Величину оценки по первой и третьей характеристики (по критерию) желательно, получить как можно выше: $h_1(Y) \rightarrow \max, h_3(Y) \rightarrow \max$; второй и четвертой как можно ниже: $h_2(Y) \rightarrow \min, h_4(Y) \rightarrow \min$. Параметры (состав) материала:

$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ изменяются в следующих пределах:

$$y_1 \in [20.0 \ 50.0 \ 80.0], y_2 \in [0.0 \ 30.0 \ 60.0], y_3 \in [2.0 \ 5.0 \ 8.0], y_4 \in [2.2 \ 5.5 \ 8.8]. \quad (113)$$

Требуется. 1) Разработать математическую модель структуры исследуемого материала в виде векторной задачи математического программирования. 2) На основе разработанных методов решения ВЗНП построить программное обеспечение в системе MATLAB. Решить векторную задачу с равнозначными критериями: выбрать оптимальную структуру материала. 4) Выбрать приоритетный критерий. Решить задачу векторной оптимизации и принять наилучшее (оптимальное) решение с заданным приоритетом критерия. 5) Представить геометрическую интерпретацию результатов решения при проектировании инженерной системы перехода от двухмерного к N-мерному пространству в относительных единицах. 6) Показать геометрическую интерпретацию результатов решения при проектировании инженерной системы перехода от двухмерного к N-мерному пространству в физических единицах.



Примечание. Автором разработано программное обеспечение в системе MATLAB для решения векторных задач математического программирования. Векторная задача включает четыре переменных (параметров технической системы): $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ и четырьмя критерия (характеристики)

$F(X) = \{f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)\}$. Но для каждого новых данных (новая система) программа настраивается индивидуально. В программном обеспечении критерии $F(X) = \{f_1(X), f_2(X), \dots, f_6(X)\}$ с условиями неопределенности (в таблице 1 они представлены как часть $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$) могут изменяться от нуля (т.е. все критерии построены в условиях определенности) до шести (т.е. все критерии построены в условиях неопределенности).

1а этап. Математическая модель структуры материала в условиях определенности

Построение математической модели для принятия оптимального управлеченческого решения структуры материала показано в разделе 7.5. В соответствии с (101)-(107) представим математическую модель материала в условиях определенности и неопределенности в совокупности в виде векторной задачи:

$$Opt H(Y) = \{\max H_1(Y) = \{\max h_k(Y), k = \overline{1, K_1^{def}}\}, \quad (114)$$

$$\max I_1(Y) \equiv \{\max h_k(Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}, \quad (115)$$

$$\min H_2(Y) = \{\min h_k(X), k = \overline{1, K_2^{def}}\}, \quad (116)$$

$$\min I_2(Y) \equiv \{\min h_k(Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_2^{unc}}\}, \quad (117)$$

при ограничениях: $h_k^{min} \leq h_k(Y) \leq h_k^{max}, k = \overline{1, K}$,
 $y_j^{min} \leq y_j \leq y_j^{max}, j = \overline{1, N}$, $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 100$, (118)

где $Y = \{y_j, j = \overline{1, N}\}$ - вектор управляемых переменных (конструктивных параметров материала);

$H(Y) = \{H_1(Y) H_2(Y) I_1(Y), I_2(Y)\}$ представляет векторный критерий, каждая компонента которого является вектором критериев (характеристик) материала, которые функционально зависят от дискретных значений вектора переменных;

$H_1(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K_1^{def}}\}$, $H_2(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K_2^{def}}\}$ – это множество функций *max* и *min* соответственно;

$$I_1(Y) = \{\{h_k(Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\},$$

$I_2(Y) = \{\{h_k(Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_2^{unc}}\}$ – это множество матриц *max* и *min* соответственно; (*definiteness*), $K_1^{unc} \cdot K_2^{unc}$ (*uncertainty*) множество критериев *max* и *min* сформированные в условиях определенности и неопределенности;

в (118) $h_k^{min} \leq h_k(Y) \leq h_k^{max}, k = \overline{1, K}$ представлена вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование материала;

в (118) $y_j^{min} \leq y_j \leq y_j^{max}, j = \overline{1, N}$ – параметрические ограничения.

Примем, что функции $h_k(X), k = \overline{1, K}$ дифференцируемы и выпуклы, $g_i(X), i = \overline{1, M}$ непрерывны, а заданное ограничениями (118) множество допустимых точек S не пусто:

$S = \{Y \in R^n | G(Y) \leq 0, Y^{min} \leq Y \leq Y^{max}\} \neq \emptyset$, и представляет собой компакт.

5.1.2. 2 этап. Построение численной модели структуры материала в условиях определенности

Условия определенности характеризуются функциональной зависимостью каждой характеристики и ограничений от параметров материала. В примере известны характеристика



(112) и ограничения (111). Используя информационные данные (111), (112) построим однокритериальную задачу нелинейного программирования в условиях определенности:

$$\max h_1(Y) = 323.84 - 2.249y_1 - 3.49y_2 + 10.7267y_3 + 13.124y_4 + 0.0968y_1y_2 - 0.062y_1y_3 - 0.169y_1y_4 + 0.0743y_2y_3 - 0.1042y_2y_4 - 0.0036y_3y_4 + 0.0143y_1^2 + 0.0118y_2^2 - 0.2434y_3^2 - 0.5026y_4^2, \quad (119)$$

при ограничениях: $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 100$,

$$21 \leq y_1 \leq 79, 5 \leq y_2 \leq 59, 2.1 \leq y_3 \leq 9.0, 2.2 \leq y_4 \leq 7.0. \quad (120)$$

Эти данные в дальнейшем используются при построении математической модели материала.

5.1.3. 3 этап. Преобразование экспериментальных данных в данные с функциональной зависимостью и построение математической модели инженерной системы в условиях неопределенности.

Условия неопределенности характеризуются тем, что исходные данные, характеризующие исследуемого объекта, представлены: а) случайными, б) нечеткими, или, в) не полными данными, т. е. в условиях неопределенности известны лишь конечное множество Y измеренных параметров $y = \overline{1, Y}$:

$Y_v = \{y_{iv}, v = \overline{1, V}\}, i = \overline{1, M}$, где $v = \overline{1, V}$ - число компонент (параметров), из которых может быть составлен (изготовлен) материал, $i = \overline{1, M}$ – номер и множество данных; и соответствующее множество K характеристик:

$$h_k(Y_v = \{y_{iv}, v = \overline{1, V}\}, i = \overline{1, M}), k = \overline{1, K}.$$

Поэтому в условиях неопределенности отсутствует достаточная информация о функциональной зависимости каждой характеристики и ограничений от параметров. Информационные данные опций а) и б) преобразуются в числовые данные опции с) и представляются в табличной форме. В работе рассматривается опция с) информация с неполными данными, которые, как правило, **получены в результате эксперимента**.

С учетом измеренных параметров Y_v и соответствующего множества K характеристик: $h_k(Y_v = \{y_{iv}, v = \overline{1, V}\}, i = \overline{1, M}), k = \overline{1, K}$ представим матрицу результатов экспериментальных данных по исследуемому материалу:

$$I = \begin{vmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_M \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_1 = y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{14} & h_2(Y_1), h_3(Y_1), h_4(Y_1) \\ & \dots \\ Y_M = y_{M1}, y_{M2}, y_{M3}, y_{M4} & h_2(Y_M), h_3(Y_M), h_4(Y_M) \end{vmatrix}, \quad (121)$$

Представим математическую модель структуры материала в условиях неопределенности в виде векторной задачи математического программирования:

$$Opt H(X) = \{\max I_1(Y) \equiv \{\max h_k(Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}, \quad (122)$$

$$\min I_2(Y) \equiv \{\min h_k(Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_2^{unc}}\}, \quad (123)$$

$$\text{at restriction} \quad h_k^{\min} \leq h_k(Y) \leq h_k^{\max}, k = \overline{1, K}, \quad (123)$$

$$\sum_{v=1}^V y_v(t) = 100\%, \quad y_v^{\min} \leq y_v \leq y_v^{\max}, v = \overline{1, V}, \quad (125)$$

где $Y = \{y_v, v = \overline{1, V}\}$ - вектор управляемых переменных (параметров);

$H(Y) = \{I_1(Y) I_2(Y)\}$ - векторный критерий, каждая компонента которого представляет вектор критериев (выходных характеристик исследуемого объекта). Величина характеристики (функции) зависит от дискретных значений вектора переменных Y . $I_1(Y) = \overline{1, K_1^{unc}}$, $I_2(Y) = \overline{1, K_2^{unc}}$ (*uncertainty*) – множество критериев *max* и *min* сформированные в условиях неопределенности;



в (124) $h_k^{min} \leq h(X) \leq h_k^{max}, k = \overline{1, K}$ – вектор-функция ограничений, накладываемых на функционирование исследуемого объекта, $y_v^{min} \leq y_v \leq y_v^{max}, v = \overline{1, V}$ – параметрические ограничения исследуемого объекта.

5.1.4. 4 этап. Построение численной модели структуры материала в условиях неопределенности.

Формирование в условиях неопределенности состоит в использовании качественных, количественных описаний материала, полученных по принципу “вход-выход” в таблице 2.

Преобразование исходные данных (информации):

$$h_2(Y_i, i = \overline{1, M}), h_3(Y_i, i = \overline{1, M}), h_4(Y_i, i = \overline{1, M})$$

в функциональный вид: $h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)$ осуществляется путем использования математических методов регрессионного анализа.

Исходные данные сформированы в таблице 2 в системе MATLAB в виде матрицы:

$$I = |Y, H| = \{y_{i1}, y_{i2}, y_{i3}, y_{i4}, h_{i2}, h_{i3}, h_{i4}, i = \overline{1, M}\}. \quad (126)$$

Для каждого набора экспериментального данных таблицы 2 $h_k, k = 2, 3, 4$ строится функция регрессии методом наименьших квадратов $\min \sum_{i=1}^M (y_i - \bar{y}_i)^2$ в системе MATLAB. Формируется полином A_k , определяющий взаимосвязь параметров $Y_i = \{y_{i1}, y_{i2}, y_{i3}, y_{i4}\}$ и функции $\bar{y}_{kl} = h(Y_i, A_k), k = 2, 3, 4$. Результатом является система коэффициентов:

$A_k = \{A_{0k}, A_{1k}, \dots, A_{14k}\}$, определяющие коэффициенты квадратичного полинома:

$$h_k(Y, A) = A_{0k} + A_{1k}y_1 + A_{2k}y_2 + A_{3k}y_3 + A_{4k}y_4 + A_{5k}y_1y_2 + A_{6k}y_1y_3 + A_{7k}y_1y_4 + A_{8k}y_2y_3 + A_{9k}y_2y_4 + A_{10k}y_3y_4 + A_{11k}y_1^2 + A_{12k}y_2^2 + A_{13k}y_3^2 + A_{14k}y_4^2, k = 2, 3, 4. \quad (127)$$

Программное обеспечение полиномиальной аппроксимации с четырьмя переменными и четырнадцатью факторами разработано. В итоге экспериментальные данные таблицы 2 преобразуются систему коэффициентов трех функции (127) в виде таблицы (Программа: Z_Material_MM32_os13_4k):

$$Ao=[323.8408 \quad 954.8634 \quad 110.02 \quad 21.0051] \quad (128)$$

$$\begin{array}{cccc} -2.2495 & 28.6719 & 0.9106 & -0.0101 \\ -3.4938 & 37.0392 & 0.6206 & -0.8403 \\ 10.7267 & -31.0303 & -0.4287 & -0.4314 \\ 13.1239 & -54.0031 & -2.5176 & 1.1718 \\ 0.0969 & -0.9219 & -0.0151 & 0.0166 \\ -0.0621 & 0.5644 & -0.0094 & 0.0850 \\ -0.1696 & 0.8966 & 0.0222 & -0.0001 \\ 0.0743 & -0.1540 & -0.0198 & 0.0522 \\ -0.1042 & 0.3919 & 0.0184 & 0.0003 \\ 0.0036 & -0.0135 & -0.0006 & 0.0006 \\ 0.0142 & 0.0477 & -0.0004 & -0.0021 \\ 0.0117 & 0.0437 & -0.0003 & 0.0035 \\ -0.2433 & 3.8489 & 0.0390 & 0.0061 \\ -0.5026 & 3.1748 & 0.1414 & -0.0310; \end{array}$$

$$Rj=[0.6115 \quad 0.7149 \quad 0.6551 \quad 0.9017];$$

$$RRj=[0.3740 \quad 0.5111 \quad 0.4292 \quad 0.8130];$$

На основе Ao(2) Ao(3) Ao(4) строятся функции $h_2(Y)$, $h_3(Y)$ и $h_4(Y)$, которые с учетом полученных коэффициентов примут вид:



$$\begin{aligned} \max h_3(Y) = & 110.22 + 0.7918y_1 + 1.73y_2 - 0.3713y_3 - 2.20y_4 - 0.0132y_1y_2 - \\ & 0.008y_1y_3 + 0.0193y_1y_4 - 0.0172y_2y_3 + 0.0161y_2y_4 - 0.0006y_3y_4 - 0.0004y_1^2 - \\ & 0.0002y_2^2 + 0.0335y_3^2 + 0.124y_4^2, \end{aligned} \quad (129)$$

$$\begin{aligned} \min h_2(Y) = & 954.86 + 28.67y_1 + 37.03y_2 - 31.03y_3 + 54y_4 - 0.922y_1y_2 - 2y_1y_3 + \\ & 0.896y_1y_4 - 0.154y_2y_3 + 0.3919y_2y_4 - 0.0134y_3y_4 + 0.0478y_1^2 + 0.0438y_2^2 + 3.8489y_3^2 + \\ & 3.1748y_4^2, \end{aligned} \quad (130)$$

$$\begin{aligned} \min h_4(Y) = & 21.004 - 0.0097y_1 - 0.841y_2 - 0.4326y_3 + 1.1723y_4 + 0.166y_1y_2 + \\ & 0.085y_1y_3 - 0.0001y_1y_4 + 0.0523y_2y_3 + 0.0002y_2y_4 + 0.0006y_3y_4 - 0.0022y_1^2 + \\ & 0.0035y_2^2 + 0.006y_3^2 - 0.0311y_4^2, \end{aligned} \quad (131)$$

при ограничениях: $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 100$, (132)

$$21 \leq y_1 \leq 79, 5 \leq y_2 \leq 59, 2.1 \leq y_3 \leq 9.0, 2.2 \leq y_4 \leq 7.0. \quad (133)$$

Минимальные и максимальные значения экспериментальных данных y_1, \dots, y_4 представлены в нижней части таблицы 2. Минимальные и максимальные значения функций $h_1(Y), h_3(Y), h_2(Y), h_4(Y)$ незначительно отличаются от экспериментальных данных. Индекс корреляции и коэффициенты детерминации представлены в нижних строках таблицы 2. Результаты регрессионного анализа (129)-(133) в дальнейшем используются при построении математической модели материала.

Получившаяся математическая модель в виде ВЗМП (129)-(133) является численной моделью структуры материала в условиях неопределенности.

5.1.5. 5 этап. Построение агрегированной (включающей условия определенности и неопределенности) математической и численной модели инженерной системы в условиях определенности

Объединяя математические модели структуры материала в условиях определённости (119)-(120) и неопределённости (122)-(125) представим математическую модель материала в условиях определенности и неопределенности в совокупности в виде векторной задачи:

$$Opt H(Y) = \{\max H_1(Y) = \{\max h_k(Y), k = \overline{1, K_1^{def}}\}, \quad (134)$$

$$\max I_1(Y) \equiv \{\max h_k(Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}, \quad (135)$$

$$\min H_2(Y) = \{\min h_k(X), k = \overline{1, K_2^{def}}\}, \quad (136)$$

$$\min I_2(Y) \equiv \{\min h_k(Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_2^{unc}}\}, \quad (137)$$

при ограничениях

$$h_k^{min} \leq h_k(Y) \leq h_k^{max}, k = \overline{1, K}, y_j^{min} \leq y_j \leq y_j^{max}, j = \overline{1, N}, \quad (138)$$

где $Y = \{y_j, j = \overline{1, N}\}$ - вектор управляемых переменных (конструктивных параметров);

$$H_1(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K_1^{def}}\}, H_2(Y) = \{h_k(Y), k = \overline{1, K_2^{def}}\} -$$

множество функций \max и \min соответственно;

$$I_1(Y) = \{\{h_k(Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_1^{unc}}\}, I_2(Y) = \{\{h_k(Y_i, i = \overline{1, M})\}^T, k = \overline{1, K_2^{unc}}\} - (139)$$

множество матриц \max и \min соответственно; (*definiteness*), $K_1^{unc} \cdot K_2^{unc}$ (*uncertainty*) множество критериев \max и \min сформированные в условиях определенности и неопределенности;

Объединяя численные модели структуры материала в условиях определённости (126) и неопределённости (129)-(133) представим числовую модель материала в условиях определенности и неопределенности в совокупности в виде векторной задачи:



$$\begin{aligned} \text{opt } H(Y) = \{\max H_1(X) = \{\max h_1(Y) = 323.84 - 2.25y_1 - 3.49y_2 + 10.72y_3 + 13.124y_4 + \\ 0.0968y_1y_2 - 0.062y_1y_3 - 0.169y_1y_4 + 0.0743y_2y_3 - 0.1y_2y_4 - 0.0036y_3y_4 + 0.0143y_1^2 + \\ 0.0118y_2^2 - 0.2434y_3^2 - 0.5026y_4^2\}, \end{aligned} \quad (140)$$

$$\begin{aligned} \max h_3(Y) = 110.22 + 0.7918y_1 + 1.73y_2 - 0.3713y_3 - 2.20y_4 - 0.0132y_1y_2 - 0.008y_1y_3 + \\ 0.0193y_1y_4 - 0.0172y_2y_3 + 0.0161y_2y_4 - 0.0006y_3y_4 - 0.0004y_1^2 - 0.0002y_2^2 + 0.0335y_3^2 + \\ 0.124y_4^2\}, \end{aligned} \quad (141)$$

$$\begin{aligned} \min H_2(Y) = \{\min h_2(Y) = 954.86 + 28.67y_1 + 37.03y_2 - 31.03y_3 + 54y_4 - 0.922y_1y_2 - \\ 2y_1y_3 + 0.896y_1y_4 - 0.154y_2y_3 + 0.3919y_2y_4 - 0.0134y_3y_4 + 0.0478y_1^2 + 0.0438y_2^2 + \\ 3.8489y_3^2 + 3.1748y_4^2\}, \end{aligned} \quad (142)$$

$$\begin{aligned} \max h_4(Y) = 21.004 - 0.0097y_1 - 0.841y_2 - 0.4326y_3 + 1.1723y_4 + 0.166y_1y_2 + 0.085y_1y_3 - \\ 0.0001y_1y_4 + 0.0523y_2y_3 + 0.0002y_2y_4 + 0.0006y_3y_4 - 0.0022y_1^2 + 0.0035y_2^2 + 0.006y_3^2 - \\ 0.0311y_4^2\}\}, \end{aligned} \quad (143)$$

$$\text{at restrictions: } y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 100, \quad (144)$$

$$21 \leq y_1 \leq 79, 5 \leq y_2 \leq 59, 2.1 \leq y_3 \leq 9.0, 2.2 \leq y_4 \leq 7.0. \quad (145)$$

Векторная задача математического программирования (140)-(145) представляет численную модель принятия оптимального решения структуры материала в условиях определенности и неопределенности в совокупности.

5.1.6. б этап. Процесс принятия оптимального решения (выбора оптимальных параметров) структуры материала. Решение векторной задачи при равнозначных критериях (решение прямой задачи).

Для формирования структуры материала на базе векторной задачи математического программирования с равнозначными критериями (140)-(145) представлены методы, основанные на аксиоматике нормализации критериев и принципе гарантированного результата, вытекающие из аксиомы 1 и принципа оптимальности 1.

Методика решения представлена в виде ряда шагов.

Шаг 1. Решение ВЗМП (127)-(131) по каждому критерию отдельно. Для решения используется функция *fmincon(...)* системы MATLAB, обращение к функции *fmincon(...)* в [18, 19].

Как результат расчета, по каждому критерию получаем точки оптимума: Y_k^* и $h_k^* = h_k(Y_k^*)$, $k = \overline{1, K}$, $K=4$ – величины критериев - наилучшее решение по каждому критерию:

Критерий 1: $Y_1^* = \{y_1 = 46.56, y_2 = 43.23, y_3 = 8.0, y_4 = 2.2\}$, $h_1^* = h_1(Y_1^*) = -387.99$;

Критерий 2: $Y_2^* = \{y_1 = 55.60, y_2 = 34.19, y_3 = 8.0, y_4 = 2.2\}$, $h_2^* = h_2(Y_2^*) = 1361.41$;

Критерий 3: $Y_3^* = \{y_1 = 31.90, y_2 = 59.00, y_3 = 2.1, y_4 = 7.0\}$, $h_3^* = h_3(Y_3^*) = -210.3$;

Критерий 4: $Y_4^* = \{y_1 = 36.70, y_2 = 59.00, y_3 = 2.1, y_4 = 2.2\}$, $h_4^* = h_4(Y_4^*) = 30.714$.

Результат решения ВЗМП (127)-(131), ограничения (131) и точки оптимума $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$ в координатах x_1, x_3 представлены на рис. 3.

Шаг 2. Вычисляем наихудшую величину каждого критерия (антиоптимум): Y_k^0 и $h_k^0 = h_k(Y_k^0)$, $k = \overline{1, K}$, $K=4$. Для этого решается задача (127)-(131) для каждого критерия $k = \overline{1, K_1}$ на минимум, для каждого критерия $k = \overline{1, K_2}$ на максимум. В результате получим: $X_k^0 = \{x_j, j = \overline{1, N}\}$ - точка оптимума по соответствующему критерию, $k = \overline{1, K}$; $f_k^0 = f_k(X_k^0)$ – величина k -го критерия в точке, $X_k^0, k = \overline{1, K}$, (верхний индекс ноль):

$$Y_1^0 = \{y_1 = 31.9, y_2 = 59.0, y_3 = 2.1, y_4 = 7.00\}, h_1^0 = h_1(Y_1^0) = 296.6;$$

$$Y_2^0 = \{y_1 = 31.9, y_2 = 59.0, y_3 = 2.1, y_4 = 7.\}, h_2^0 = h_2(Y_2^0) = -2458.5;$$

$$Y_3^0 = \{y_1 = 78.16, y_2 = 9.02, y_3 = 8, y_4 = 4.81\}, h_3^0 = h_3(Y_3^0) = 169.26;$$

$$Y_4^0 = \{y_1 = 62.71, y_2 = 22.9, y_3 = 8, y_4 = 6.39\}, h_4^0 = h_4(Y_4^0) = -73.62.$$



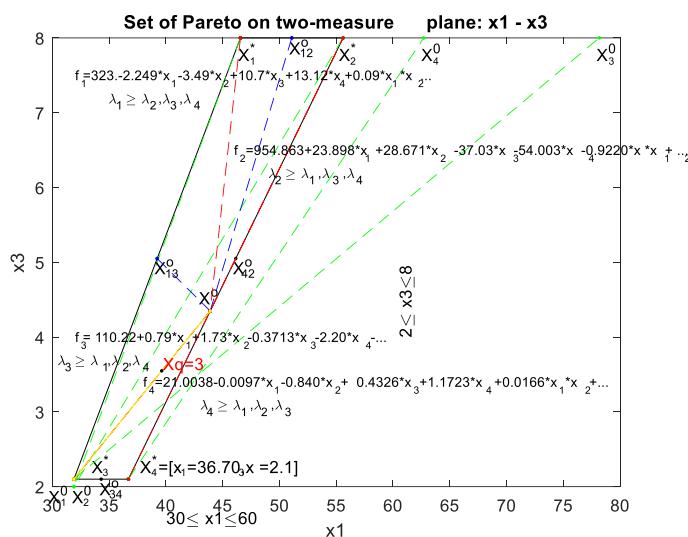


Рисунок 11 – Допустимое множество точек S в координатах x_1, x_3 . Множество точек, оптимальных по Парето, $S^o \subset S$, ограничено точками $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$, и локально S_1^o между $X_1^*, X_{13}^*, X^o, X_{12}^*, X_1^*$ в двухмерной системе координат $\{x_1, x_3\}$.

Шаг 3. Системный анализ множества точек, оптимальных по Парето, (т.е. анализ по каждому критерию) реализуется. Для этого в точках оптимума $Y^* = \{Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, Y_4^*\}$ определяются величины целевых функций $H(Y^*) = \|h_q(Y_k^*)\|_{q=1,K}^{k=1,K}$, $D = (d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4)^T$ - вектор отклонений по каждому критерию на допустимом множестве S : $d_k = h_k^* - h_k^0, k = \overline{1,4}$, и матрица относительных оценок:

$$\lambda(Y^*) = \|\lambda_q(Y_k^*)\|_{q=1,K}^{k=1,K}$$

где $\lambda_k(X) = (h_k^* - h_k^0)/d_k$,

$$d_k = \{91.4, -1097, 41.09, -42.9\}.$$

$$H(Y^*) = \begin{vmatrix} 388 & 1444 & 183.9 & 68.5 \\ 382 & 1361 & 177.3 & 72.1 \\ 296 & 2458 & 210.4 & 30.2 \\ 330 & 2210 & 208.0 & 30.7 \end{vmatrix}, \quad \lambda(Y^*) = \begin{vmatrix} 1.0 & 0.924 & 0.356 & 0.1197 \\ 0.936 & 1.0 & 0.1968 & 0.036 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 1.011 \\ 0.366 & 0.2257 & 0.942 & 1.0 \end{vmatrix}. \quad (146)$$

Системный анализ величин критериев в относительных оценках в ВЗМП (141)-(145) показывает, что в точках оптимума $Y^* = \{Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, Y_4^*\}$ (по диагонали) относительная оценка равна единице. Остальные критерии (132) $\lambda(X^*) = \|\lambda_q(X_k^*)\|_{q=1,K}^{k=1,K}$ значительно меньше единицы. Требуется найти такую точку (параметры), при которых относительные оценки наиболее близки к единице. На решение проблемы направлено решение λ -задачи - шаг 4, 5.

Шаг 4. Формирование λ -задачи реализуется в два этапа:

На 1-м этапе строится максиминная задача оптимизации с нормализованными критериями:

$$\lambda^o = \max_{Y \in S} \min_{k \in K} \lambda_k(Y), G(Y) \leq 0, Y \geq 0; \quad (147)$$

на 2-м этапе максиминная задача (147) преобразуется в стандартную задачу математического программирования (λ -задача):



$$\lambda^o = \max \lambda, \quad (148)$$

с ограничениями $\lambda - \frac{h_1(Y) - h_1^0}{h_1^* - h_1^0} \leq 0, \quad \lambda - \frac{h_3(Y) - h_3^0}{h_3^* - h_3^0} \leq 0,$
 $\lambda - \frac{h_2(Y) - h_2^0}{h_2^* - h_2^0} \leq 0, \quad \lambda - \frac{h_4(Y) - h_4^0}{h_4^* - h_4^0} \leq 0, \quad (149)$

$$0 \leq \lambda \leq 1, \quad 21 \leq y_1 \leq 79, \quad 5 \leq y_2 \leq 59, \quad 2.1 \leq y_3 \leq 9.0, \quad 2.2 \leq y_4 \leq 7.0.$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 100, \quad (150)$$

Вектор неизвестных имеет размерность $N+1: Y = \{y_1, \dots, y_N, \lambda\}$; функции $h_1(Y), h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)$ соответствуют (148)-(153) соответственно. Подставив числовые значения функций $h_1(Y), h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)$, мы получим λ -задачу следующего вида:

$$\lambda^o = \max \lambda, \quad (151)$$

Ограничения $\lambda - \frac{323.84 - 2.249y_1 - 3.49*x2 \dots - 0.2434y_3^2 - 0.5026y_4^2 - h_1^0}{h_1^* - h_1^0} \leq 0, \quad (152)$

$$\lambda - \frac{110.22 + 0.7918y_1 + 1.73y_2 \dots + 0.0335y_3^2 + 0.124y_4^2 - h_3^0}{f_3^* - f_3^0} \leq 0, \quad (153)$$

$$\lambda - \frac{954.8 + 28.67y_1 + 37y_2 \dots + 3.8489y_3^2 + 3.1748y_4^2 - h_2^0}{h_2^* - h_2^0} \leq 0, \quad (154)$$

$$\lambda - \frac{21 - 0.0097y_1 - 0.841y_2 \dots + 0.006y_3^2 - 0.0311y_4^2 - h_4^0}{h_4^* - h_4^0} \leq 0, \quad (155)$$

$$0 \leq \lambda \leq 1, \quad 21 \leq y_1 \leq 79, \quad 5 \leq y_2 \leq 59, \quad 2.1 \leq y_3 \leq 9.0, \quad 2.2 \leq y_4 \leq 7.0.$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 100, \quad (156)$$

Шаг 4. Решение λ -задачи (151)-(155). Обращение к функции $fmincon(\dots)$, [16]:

$[Xo, Lo] = fmincon('Z_TehnSist_4Krit_L', X0, Ao, bo, Aeq, beq, lbo, ubo, 'Z_TehnSist_LConst', options).$

В результате решения векторной задачи (140)-(145) при равнозначных критериях и соответствующей ей λ -задачи (151)-(156) получили:

$$X^o = \{Y^o, \lambda^o\} = \{Y^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2, \lambda^o = 0.6087\}, \quad (157)$$

точку оптимума X^o – конструктивные параметры материала, которая представлена на рис. 3;

$h_k(Y^o), k = \overline{1, K}$ - величины критериев (характеристик структуры материала):

$$\{h_1(Y^o) = 364.0, h_2(Y^o) = 1790.7, h_3(Y^o) = 194.3, h_4(Y^o) = 47.5\}; \quad (158)$$

$\lambda_k(Y^o), k = \overline{1, K}$ - величины относительных оценок

$$\{\lambda_1(Y^o) = 0.7372, \lambda_2(Y^o) = 0.6087, \lambda_3(Y^o) = 0.6087, \lambda_4(Y^o) = 0.6087\}; \quad (159)$$

$\lambda^o = 0.60870$ – это максимальный нижний уровень среди всех относительных оценок, измеренный в относительных единицах: $\lambda^o = \min(\lambda_1(Y^o), \lambda_2(Y^o), \lambda_3(Y^o), \lambda_4(Y^o)) = 0.6087$,

$\lambda^o = 0.6087$ называют также гарантированным результатом в относительных единицах. $\lambda_k(Y^o)$ и соответственно характеристики структуры материала $f_k(Y^o)$ нельзя улучшить, не ухудшая при этом другие характеристики.

В соответствии с теоремой с 1, в точке X^o критерии 2, 3 и 4 противоречивы. Это противоречие определяется равенством: $\lambda_2(Y^o) = \lambda_3(Y^o) = \lambda_4(Y^o) = \lambda^o = 0.6087$, а остальные критерии неравенством $\{\lambda_2(X^o) = 0.7372\} > \lambda^o$. Теорема 1 служит основой для определения правильности решения векторной задачи. В ВЗМП, как правило, для двух критериев выполняется равенство: $\lambda^o = \lambda_q(Y^o) = \lambda_p(Y^o)$, $q, p \in K, X \in S$, (в нашем примере такие критерии 2, 3, 4), для других критериев определяется как неравенство.



5.1.7. 7 этап. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП с 4 параметрами и 4 критериями в двухмерную систему координат (с 2 параметрами) в относительных единицах.

Для геометрической интерпретации результатов решения ВЗМП с 4 параметрами и 4 критериями в двухмерную систему координат (с 2-мя параметрами) в относительных единицах введем изменения. В ВЗМП (140)-(145) параметры y_1 и y_3 рассматриваются как переменные, параметры y_2 и y_4 рассматриваются как постоянные. Присвоим постоянным параметрам размерность: $y_2 = 49.5492, y_4 = 2.2$ в соответствии с результатом решения ВЗМП (140)-(145) при равнозначных критериях, представленных в (157).

В итоге ВЗМП (140)-(145) стала двухмерной.

Представим в целом результаты решения с двумя переменными параметрами x_1 и x_3 (двухмерная задача):

$$Y = [Y_{opt}(1,:) = \{46.5676 \quad 43.2324 \quad 8.0000 \quad 2.2000\}, \lambda_1(Y_{10max}) = 0.5; \\ Y_{opt}(2,:) = \{55.6075 \quad 34.1925 \quad 8.0000 \quad 2.2000\}, \lambda_2(Y_{20max}) = 0.6087; \\ Y_{opt}(3,:) = \{31.9000 \quad 59.0000 \quad 2.1000 \quad 7.0000\}, \lambda_3(Y_{30max}) = 0.6087; \\ Y_{opt}(4,:) = \{36.7000 \quad 59.0000 \quad 2.1000 \quad 2.2000\}, \lambda_4(Y_{40max}) = 0.7372; \\ Y_o(1:4) = \{43.9022 \quad 49.5492 \quad 4.3486 \quad 2.200\}, \lambda(Y_o) = \lambda^o = 0.5196. \quad (160)$$

Характеристики материала в относительных единицах $\lambda_1(Y), \lambda_2(Y), \lambda_3(Y), \lambda_4(Y)$ показаны на рис. 12 в трехмерном пространстве $x_1 x_3$ и λ , где третья ось λ - относительная оценка.

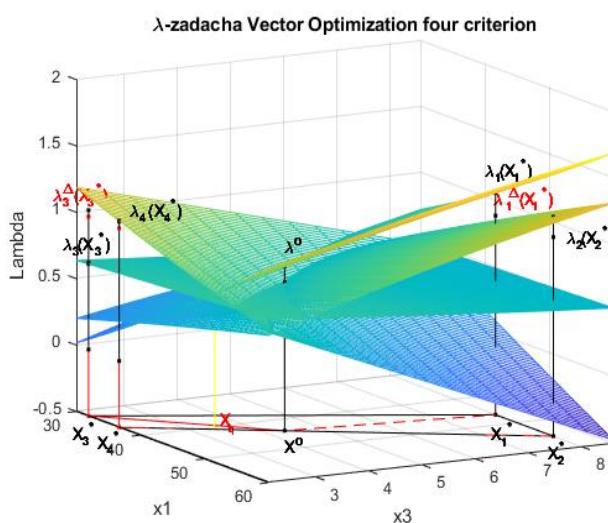


Рисунок 12 – Геометрическая интерпретация результатов решения λ -задачи в трехмерной системе координат $x_1 x_2$ и λ

В допустимом множестве точек S , образованных ограничениями (158)-(159), точки оптимума $Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, Y_4^*$, объединенных в контур, представляют множество точек, оптимальных по Парето, $S^o \subset S$, представлены на рис. 11. Координаты этих точек, а также характеристики материала в относительных единицах $\lambda_1(Y), \lambda_2(Y), \lambda_3(Y), \lambda_4(Y)$ показаны на рис. 12 в трех мерном пространстве $x_1 x_2$ и λ , где третья ось λ - относительная оценка.

5.1.8. 8 этап. Результаты решения Векторной Задачи Математического Программирования при равнозначных критериях - подготовка информации для принятия решений с приоритетом критерия.

В результате решения ВЗМП при равнозначных критериях получили.

Результаты решения Векторной Задачи Математического Программирования

(Математическая модель Инженерной Системы - ИС) при равнозначных критериях

1. Критерии (характеристики ИС), параметры в точке оптимума:

Критерий 1: $h_1^* = h_1(Y_1^*) = -387.9$; Параметры: $Y_1^* = \{y_1 = 46.56, y_2 = 43.23, y_3 = 8.0, y_4 = 2.2\}$;

Критерий 2: $h_2^* = h_2(Y_2^*) = 1361.4$; Параметры: $Y_2^* = \{y_1 = 55.60, y_2 = 34.19, y_3 = 8.0, y_4 = 2.2\}$;

Критерий 3: $h_3^* = h_3(Y_3^*) = -210.3$; Параметры: $Y_3^* = \{y_1 = 31.90, y_2 = 59.00, y_3 = 2.1, y_4 = 7.0\}$;

Критерий 4: $h_4^* = h_4(Y_4^*) = 30.71$; Параметры: $Y_4^* = \{y_1 = 36.7, y_2 = 59, y_3 = 2.1, y_4 = 2.2\}$; (161)

2. Критерии (характеристики ИС), параметры в точке антиоптимума:

Критерий 1: $h_1^0 = h_1(Y_1^0) = 296.6$; Параметры: $Y_1^0 = \{y_1 = 31.9, y_2 = 59.0, y_3 = 2.1, y_4 = 7.00\}$;

Критерий 2: $h_2^0 = h_2(Y_2^0) = -2458.5$; Параметры: $Y_2^0 = \{y_1 = 31.9, y_2 = 59.0, y_3 = 2.1, y_4 = 7.\}$;

Критерий 3: $h_3^0 = h_3(Y_3^0) = 169.26$; Параметры: $Y_3^0 = \{y_1 = 78.16, y_2 = 9.02, y_3 = 8, y_4 = 4.81\}$;

Критерий 4: $h_4^0 = h_4(Y_4^0) = -73.6$; Параметры: $Y_4^0 = \{y_1 = 62.7, y_2 = 22.9, y_3 = 8, y_4 = 6.39\}$; (162)

3. Критерии (характеристики ИС) в относительных единицах в точке Y^0 :

$\lambda^0 = 0.6087$ – максимальный нижний уровень в относительных единицах

$\lambda_k(Y^0), k = \overline{1, K}$ - величины относительных оценок:

$\{\lambda_1(Y^0) = 0.7372, \lambda_2(Y^0) = 0.6087, \lambda_3(Y^0) = 0.6087, \lambda_4(Y^0) = 0.6087\}$; (163)

$X^0 = \{Y^0, \lambda^0\} = \{Y^0 = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.5, x_3 = 4.34, x_4 = 2.2, \lambda^0 = 0.6087\}\}$. (164)

4. Критерии (характеристики ИС) в физических единицах:

$h_k(Y^0), k = \overline{1, K}$ - величины критериев (характеристик) в физических единицах:

$\{h_1(Y^0) = 364.0, h_2(Y^0) = 1790.7, h_3(Y^0) = 194.3, h_4(Y^0) = 47.5\}$; (165)

5. Информация об ИС в физических единицах для принятия решений с приоритетом критерия:

1. $h_1(Y) \rightarrow \max$: $h_1^* = h_1(Y_1^*) = -387.9 \leq h_1(Y^0) = 364.0 \leq h_1^0 = h_1(Y_1^0) = 296.6$;

2. $h_2(Y) \rightarrow \min$: $h_2^* = h_2(Y_2^*) = 1361.4 \leq h_2(Y^0) = 1790.7 \leq h_2^0 = h_2(Y_2^0) = -2458.5$;

3. $h_3(Y) \rightarrow \max$: $h_3^* = h_3(Y_3^*) = -210.3 \leq h_3(Y^0) = 194.3 \leq h_3^0 = h_3(Y_3^0) = 169.26$;

4. $h_4(Y) \rightarrow \min$: $h_4^* = h_4(Y_4^*) = 30.71 \leq h_4(Y^0) = 47.5 \leq h_4^0 = h_4(Y_4^0) = -73.62$; (166)

Заключение по результатам решения векторной задачи математического программирования при равнозначных критериях.

Мы представили методологию решения векторной задачи математического программирования при равнозначных критериях (характеристиках) на примере инженерной системы - материалы. В процессе решения задачи системе MATLAB нами представлена геометрическая интерпретация результатов решения в двухмерной системе координат. Результаты решения векторной задачи математического программирования с равнозначными критериями с четырьмя переменными совпадают с результатами решения векторной задачи с двумя переменными.

Таким образом, впервые в отечественной и зарубежной практике показан переход и его геометрическая иллюстрация от N -мерного к двухмерному измерению функции в векторных задачах математического программирования с соответствующими ошибками линейной аппроксимации. Нами подготовлена информация для исследования и выбора оптимального решения при приоритете того или иного критерия (характеристики) инженерной системы. На решение этой проблемы направлена вторая часть работы.

5.2. Часть 2. Выбор оптимальных параметров инженерных систем в условиях неопределенности - с приоритетом критерия.

5.2.1. 9 этап. Анализ, сравнение результатов решения векторной задачи при равнозначных критериях сложной инженерной системы (модели структуры материала) и подготовка к выбору оптимальных параметров по приоритетному критерию.



Сравним результаты решения векторной задачи математического программирования с равнозначными критериями (151)-(156) с четырьмя переменными y_1, y_2, y_3 и y_4 с результатами решения векторной задачи (151)-(156) с двумя переменными y_1 и y_3 .

Результаты решения четырехмерной ВЗМП (151)-(156) с переменными координатами $\{y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4\}$ представлены в (157), (158), (159), а результаты решения двухмерной ВЗМП с переменными координатами $\{y_1 \ y_3\}$ представлены в (160).

Результаты решения и сравнения исследуемых задач представлены в трехмерной системе координат $x_1 \ x_3$ (обозначения: $y_1 \ y_3$) и λ на рис. 13.

(Замечание. На рисунках 11, 12, 13, ...: вектор параметров $Y = \{y_1, \dots, y_N, \lambda\}$ заменен на $X = \{x_1, \dots, x_N, \lambda\}$; функции $h_1(Y), h_2(Y), h_3(Y), h_4(Y)$ заменены на функции $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$ в соответствии с программным обеспечением).

На рис. 13 представлены точка оптимума в координатах x_1, x_3 :

$$X^o = \{Y^o, \lambda^o\} = \{Y^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2, \lambda^o = 0.6087\}\}$$

из (157); и относительная оценка:

$\{\lambda_1(Y^o) = 0.7372, \lambda_2(Y^o) = 0.6087, \lambda_3(Y^o) = 0.6087, \lambda_4(Y^o) = 0.6087\}$ из (158) в тех же координатах $x_1 \ x_3$.

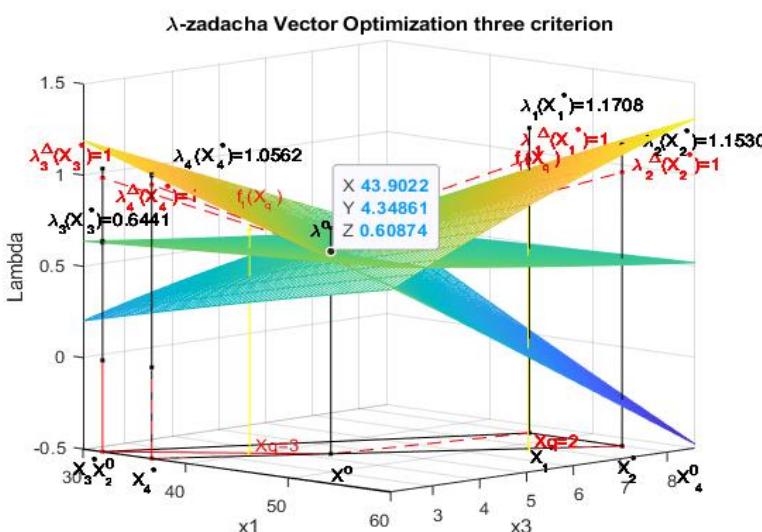


Рисунок 13 – Решение λ -задачи
в трехмерной системе координат $x_1 \ x_3 (= y_1 \ y_3)$ и λ .

Рассмотрим, например, оптимальную точку X_3^* . Функция $\lambda_3(X)$ сформирована из функции $f_3(X)$ с переменными координатами $\{x_1 \ x_3\}$, с постоянными координатами $\{x_2=49.54, x_4=2.2\}$, взятые из оптимальной точки X^o (160). В точке X_3^* относительная оценка $\lambda_3(X_3^*) = 0.6441$ – показана на рис. 13 черной точкой. Но мы знаем, что относительная оценка $\lambda_3(X_3^*)$ полученная из функции $f_3(X_3^*)$ на третьем шаге равна единице, обозначим ее как $\lambda_3^A(X_3^*) = 1$ – показана на рис. 13 красной точкой.

В итоге: *во-первых*, при равнозначных критериях координаты точек оптимума x_1, x_3 :

$$X^o = \{Y^o, \lambda^o\} = \{Y^o = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348, \lambda^o = 0.6087\}\} - \text{в двухмерной}$$

$$X^o = \{Y^o, \lambda^o\} = \{Y^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2, \lambda^o = 0.6087\}\}$$

в двухмерной, в четырёхмерной системе совпадают, покажем числовые значения точки оптимума $\{Y^o, \lambda^o\}$ на рис. 13;



во-вторых, в точке оптимума X_3^* оптимальные величины критериев $h_k(Y_k^*)$, $k = 3$ и относительные оценки $\lambda_k(Y_k^*) = 0.6441$, $k = 3$ и $\lambda_k^\Delta(X_k^*) = 1$, $k = 3$ не совпадают.

Разность между относительными оценками $\lambda_3^\Delta(X_3^*) = 1$ и $\lambda_3(X_3^*) = 0.6441$ является ошибкой $\Delta = 0.3559$ перехода от четырехмерной (а в общем случае N -мерной) к двухмерной системе измерений. Аналогично на рис. 13 показаны:

точка X_1^* , соответствующие относительные оценки $\lambda_1(X_1^*) = 1.1708$, $\lambda_1^\Delta(X_1^*) = 1$;

точка X_2^* , соответствующие относительные оценки $\lambda_2(X_2^*) = 1.1530$, $\lambda_2^\Delta(X_2^*) = 1$;

точка X_4^* , соответствующие относительные оценки $\lambda_4(X_4^*) = 1.0562$, $\lambda_4^\Delta(X_4^*) = 1$.

5.2.2. 10 этап. Вывод из анализа: Информация об Инженерной Системе в физических единицах. Подготовка к геометрической интерпретации решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по приоритетному критерию.

Таким образом, по результатам решения векторной задачи математического программирования при равнозначных критериях мы сформулировали информацию: принятия управлеченческого решения для улучшения любого критерия (характеристики инженерной системы): $h_k(Y_k^*) \leq h_k(Y^0) \leq h_k(Y_k^0)$, $k = \overline{1, K}$.

Информация об ИС в физических единицах для принятия решений с приоритетом критерия:

1. $h_1(Y) \rightarrow \max$: $h_1^* = h_1(Y_1^*) = -387.9 \leq h_1(Y^0) = 364.0 \leq h_1^0 = h_1(Y_1^0) = 296.6$;

2. $h_2(Y) \rightarrow \min$: $h_2^* = h_2(Y_2^*) = 1361.4 \leq h_2(Y^0) = 1790.7 \leq h_2^0 = h_2(Y_2^0) = -2458.5$;

3. $h_3(Y) \rightarrow \max$: $h_3^* = h_3(Y_3^*) = -210.3 \leq h_3(Y^0) = 194.3 \leq h_3^0 = h_3(Y_3^0) = 169.26$;

4. $h_4(Y) \rightarrow \min$: $h_4^* = h_4(Y_4^*) = 30.714 \leq h_4(Y^0) = 47.5 \leq h_4^0 = h_4(Y_4^0) = -73.62$;

При подготовке геометрической интерпретации решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по приоритетному критерию используем рис. 13, удалив функции в относительных единицах $\lambda_1(Y), \lambda_2(Y), \lambda_3(Y), \lambda_4(Y)$ и представим его на рис. 14. На рис. 14 сформируем относительные оценки четырех критериев: $\lambda_k(Y_k^*)$, $\lambda_k^\Delta(X_k^*) = 1$, $k = \overline{1, K}$.

На третьем шаге решения ВЗМП с равнозначными критериями в (145) в точках оптимума $Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, Y_4^*$ получены величины всех относительных оценок:

$$L(Y^*) = \begin{vmatrix} L(Y_1^*) \\ L(Y_2^*) \\ L(Y_3^*) \\ L(Y_4^*) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.0000 & 0.9245 & 0.3560 & 0.1197 \\ 0.9367 & 1.0000 & 0.1968 & 0.0363 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0000 & 1.011 \\ 0.3669 & 0.2257 & 0.9427 & 1.0000 \end{vmatrix}.$$

Представим из (146) величины относительных оценок в точке оптимума, например Y_2^* :

$L(Y_2^*) = \{\lambda_1(Y_2^*) = 0.9367, \lambda_2(Y_2^*) = 1.0000, \lambda_3(Y_2^*) = 0.1968, \lambda_4(Y_2^*) = 0.0363\}$

на рис. 6. Линейная функция, соединяющая точки $\lambda^0 = 0.60874$ и $\lambda_2^\Delta(X_2^*) = 1$ в относительных единицах характеризует функцию $f_2(X)$ в относительных единицах в четырехмерном измерении параметров x_1, \dots, x_4 . Эта линейная функция представляет геометрическую интерполяцию функций $f_2(X)$ в относительных единицах из N -мерного (4-мерного) в двухмерную систему координат.



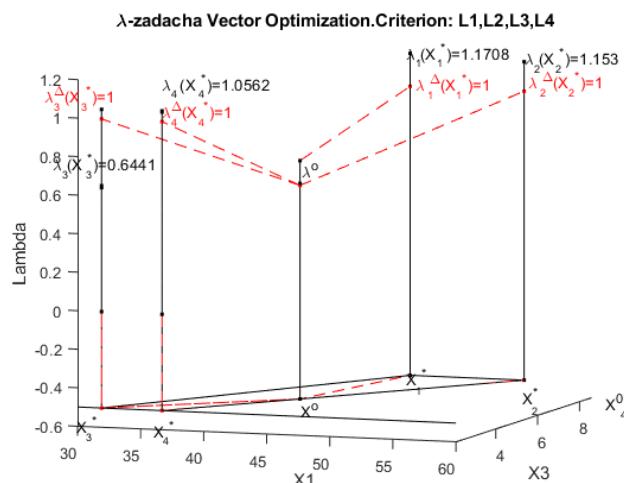


Рис. 14. λ -задача в системе координат $x_1 x_3 (= y_1 y_3)$ и λ . Результаты решения $\lambda_1(Y_1^*) = \lambda_2(Y_2^*) = \lambda_3(Y_3^*) = \lambda_4(Y_4^*) = 1$; $L(Y_2^*) = \{\lambda_1(Y_2^*), \lambda_2(Y_2^*), \lambda_3(Y_2^*), \lambda_4(Y_2^*)\}$.

Аналогично исследуются все функции (критерии) инженерной системы.

В целом на рис. 14 в точке X_2^* показана геометрическая (линейная) интерполяция всех функций (критериев):

$f_1(X)$ и соответствующая относительная оценка $\lambda_1^\Delta(X_2^*) = 0.9367$;

$f_2(X)$ и соответствующая относительная оценка $\lambda_2^\Delta(X_2^*) = 1.0$;

$f_3(X)$ и соответствующая относительная оценка $\lambda_3^\Delta(X_2^*) = 0.1968$;

$f_4(X)$ и соответствующая относительная оценка $\lambda_4^\Delta(X_2^*) = 0.0363$.

На рис. 14 также показаны координаты точки оптимума:

$$\begin{aligned} X^o &= \{Y^o, \lambda^o\} = \{Y^o = \{x_1(X)\} \\ &= 43.9, x_3(Y) = 4.348, \lambda^o(Y^o) = 0.6087\} \end{aligned}$$

и координаты относительной оценки $\lambda_3^\Delta(X_2^*) = 0.1968$:

$$\{Y^o = \{x_1(X) = 55.6075, x_3(Y) = 8, \lambda_3^\Delta(Z) = 0.1968\}\}.$$

Результаты решения X^o и Y^o показывают, что математические результаты полностью совпадают с геометрическими.

В дальнейшем используем рис. 14 как структуру, на которую наложена информация геометрической интерпретации решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по приоритетному критерию $q \in K$.

В последующих разделах 11.k1, 12.k2, 13.k3, 14.k4 проведено исследование, выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы (структура материала), а также геометрическая интерпретация результатов решения по каждому приоритетному критерию, которые обозначены $k1, k2, k3, k4$.

Каждый раздел исследования: выбора параметров и геометрическая интерпретация результатов решения по соответствующему критерию включает следующую последовательность работ:

1. Решение векторной задачи - модели сложной инженерной системы (структуры материала) при заданном приоритете первого критерия в многомерной математике;
2. Выбор численной величины исследуемого (приоритетного) критерия;
3. Решение векторной задачи с выбранной величиной критерия (выбор параметров);



4. Геометрическая интерпретация результатов решения векторной задачи в относительных и физических единицах.

5.2.3. 11.k1 этап. Исследование, выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы (структурь материала) по отдельному (первому) приоритетному критерию, геометрическая интерпретация результатов решения.

1.k1. Решение векторной задачи - модели сложной инженерной системы (структурь материала) при заданном приоритете первого критерия в многомерной математике.

Как правило, лицом, принимающим решения, является конструктор системы.

Шаг 1. Решается векторная задача при равнозначных критериях. Решения векторной задачи представлено на стадии 4. Численные результаты решения векторной задачи представлены выше. Точки, оптимальные по Парето $S^o \subset S$ находятся между оптимальными точками $X_1^* X_{13}^* X_3^* X_{34}^* X_4^* X_{42}^* X_2^* X_{21}^* X_1^*$. Проведем анализ множества точек Парето $S^o \subset S$. Для этой цели мы соединим вспомогательные точки: $X_{13}^* X_{34}^* X_{42}^* X_{21}^*$ с точкой X^o , которая условно представляет центр множества Парето.

Как результат решения получили четыре подмножества точек $X \in S_q^o \subset S^o \subset S, q = \overline{1,4}$. Подмножество точек $S_1^o \subset S^o \subset S$ выделенное точками $X_1^* X_{13}^* X^o X_{12}^* X_1^*$, характеризуется тем, что относительная оценка $\lambda_1 \geq \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, то есть в поле первого критерия S_1^o имеет приоритет над остальными. Аналогично S_2^o, S_3^o, S_4^o - подмножества точек, характеризуется тем, что второй, третий и четвертый критерий имеет приоритет над другими соответственно. Множество точек, оптимальных по Парето, обозначим: $S^o = S_1^o \cup S_2^o \cup S_3^o \cup S_4^o$. Геометрическая интерпретация координат всех полученных точек и относительные оценки представлены в двумерном пространстве $\{x_1 x_3\}$ на рис. 11. Эти координаты показаны в трех измеренных пространствах $\{x_1 x_3 \lambda\}$ на рис. 12, где третья ось λ - относительная оценка.

Ограничения на рис. 12 снижены до -0,5 (чтобы были видимы ограничения). Полученная информация является основой для дальнейшего исследования структуры множества Парето.

Анализируем, если результаты решения векторной задачи с равнозначными критериями не удовлетворяют лицо, принимающее решение, то выбор оптимального решения осуществляется из какого-либо подмножества точек $S_1^o, S_2^o, S_3^o, S_4^o$. Эти подмножества точек Парето показаны на рис. 12 в виде функций $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$.

Шаг 2. Выбор приоритетного критерия $q \in K$.

Из теоремы 1 известно, что в оптимальной точке X^o всегда имеется два наиболее противоречивых критерия, $q \in K$ и $p \in K$, для которых выполняется точное равенство:

$$\lambda^o = \lambda_q(X^o) = \lambda_p(X^o), q, p \in K, X \in S, \quad (167)$$

а для остальных выполняется неравенства: $\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), \forall k \in K, q \neq p \neq k$.

В модели структуры материала (157)-(161) и соответствующей λ -задачи (170)-(175) такими критериями являются второй и третий: $\lambda^o = \lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o) = 0.6087$, т.е. выполняется числовая симметрия. Из этой пары $\lambda^o = \lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o) = 0.6087$ противоречивых критериев выбирается критерий, который ЛПР хотел бы улучшить. Такой критерий называется «приоритетным критерием», обозначим его $q = 3 \in K$. Этот критерий исследуется во взаимодействии с первым критерием $q = 1 \in K$.

Выбор приоритетного критерия:

На дисплей выдается общая информация для принятия решений:

Критерии в точке оптимума X^o : FXo = 363.968 1790.681 194.2795 47.5045. (168)

Относительные оценки в X^o : LXo = 0.73718 0.60874 0.60874 0.60874. (169)

Антиоптимум: $Y_1^o = \{y_1 = 31.9, y_2 = 59, y_3 = 2.1, y_4 = 7.0\}, h_1^o = h_1(Y_1^o) = 296.6$.



ВЫВОД: Критерии 2, 3, 4 наиболее противоречивы, из них выбираем приоритетный.

В данном разделе **исследуется первый критерий** (функция) $q = 1 \in K$

Выдается сообщение на дисплей:

`q=input('Введите приоритетный критерий (номер) q=')` – Ввели критерий **q=1**.

Шаг 3. Формируются числовые пределы изменения величины приоритета критерия $q = 1 \in K$. Для приоритетного критерия $q = 1 \in K$ определяются изменения числовых пределов в натуральных единицах при переходе из точки оптимума X^o (172) в точку X_q^* , полученную на первом шаге. Информационные данные о критерии $q=1$ выдаются на дисплей:

$$f_q(X^o) = 363.9686 \leq f_q(X) \leq 387.9904 = f_q(X_q^*), q = 1 \in K. \quad (170)$$

Аналогично, в относительных единицах критерий $q=1$ изменяется в следующих пределах: $\lambda_q(X^o) = 0.7372 \leq \lambda_q(X) \leq 1.0 = \lambda_q(X_q^*), q = 1 \in K$.

Эти данные анализируются.

Шаг 4. Определяется величина приоритетного критерия $q \in K$. (Decision-making).

На сообщение: «Введите величину приоритетного критерия $f_q=»$ - вводим, например, $f_q=375$.

Шаг 5. Для $f_q=375$ вычисляется относительная оценка.

Для приоритетного критерия $f_q = 375$ вычисляется относительная оценка:

$$\lambda_q = \frac{f_q - f_q^0}{f_q^* - f_q^0} = \frac{375 - 296.6}{387.9904 - 296.6} = 0.8579,$$

которая при переходе от точки X^o к точке X_q^* лежит в пределах:

$$\lambda_q(X^o) = 0.7372 \leq \lambda_q(X) = 0.8579 \leq 1.0 = \lambda_q(X_q^*), q = 1 \in K. \quad (171)$$

Шаг 6. Вычислим коэффициент линейной аппроксимации

Предполагая линейный характер изменения критерия $f_q(X)$ в (179) и соответственно относительной оценки λ_q в (150), используя стандартные приемы линейной аппроксимации, вычислим коэффициент пропорциональности между $\lambda_q(X^o)$, λ_q , который назовем ρ :

$$\rho = \frac{\lambda_q - \lambda_q(X^o)}{\lambda_q(X_q^*) - \lambda_q(X^o)} = \frac{0.7489 - 0.6087}{1 - 0.6087} = 0.3558, q = 3 \in K. \quad (172)$$

Шаг 7. Определяются координаты приоритета критериев с размерностью f_q .

Предполагаем линейный характер изменения вектора $X^q = \{x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4\}$, $q = 1$ определим координаты для точки с размерностью $f_q = 375$ с относительной оценкой (171):

$$\begin{aligned} x_{\lambda=0.74}^{q=3} &= \{x_1 = X^o(1) + \rho(X_q^*(1) - X^o(1)), \\ x_2 &= X^o(2) + \rho(X_q^*(2) - X^o(2)), \\ x_3 &= X^o(3) + \rho(X_q^*(3) - X^o(3)), \\ x_4 &= X^o(4) + \rho(X_q^*(4) - X^o(4))\}, \end{aligned} \quad (173)$$

где $X^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2\}$,

$$X_1^* = \{x_1 = 46.56, x_2 = 59.00, x_3 = 2.1, x_4 = 7.0\}.$$

Как результат решения мы получим точку с координатами:

$$X^q = \{x_1 = 45.1262, x_2 = 46.6484, x_3 = 6.0254, x_4 = 2.2000\}. \quad (174)$$

Шаг 8. Формирование главных показателей точки X^q .

В полученной точке X^q , вычислим:

все критерии в натуральных единицах $f_k(X^q) = \{f_k(X^q), k = \overline{1, K}\}$:



$$f_k(X^{q=1}) = \{f_1(X^q) = 376.6, f_2(X^q) = 1618.4, f_3(X^q) = 189.3, f_4(X^q) = 57.3\}; \quad (175)$$

все относительные оценки критериев: $\lambda^q = \{\lambda_k^q, k = \overline{1, K}, \lambda_k(X^q) = \frac{f_k(X^q) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}\}$:

$$\lambda_k(X^q) = \{\lambda_1(X^q) = 0.8759, \lambda_2(X^q) = 0.7657, \lambda_3(X^q) = 0.4868, \lambda_4(X^q) = 0.3815\}; \quad (176)$$

минимальная относительная оценка: $\min \lambda(X^q) = \min_{k \in K}(\lambda_k(X^q)) = 0.3815$.

$$P^q = [p_1^1 = 1.0, p_2^1 = 1.1438, p_3^1 = 1.7991, p_4^1 = 2.2956];$$

$$\text{вектор приоритетов } P^q(X) = \{p_k^q = \frac{\lambda_q(X^q)}{\lambda_k(X^q)}, k = \overline{1, K}\}:$$

$$\lambda_k(X^q) * P^q = \{p_1^1 * \lambda_1(X^q) = 0.8759, p_2^1 * \lambda_2(X^q) = 0.8759, p_3^1 * \lambda_3(X^q) = 0.8759, p_4^1 * \lambda_4(X^q) = 0.8759\}$$

минимальная относительная оценка:

$$\lambda^{oo} = \min(p_1^3 \lambda_1(X^q), p_2^3 \lambda_2(X^q), p_3^3 \lambda_3(X^q), p_4^3 \lambda_4(X^q)) = 0.8759$$

Аналогично получены другие точки из области Парето $X_t^o = \{\lambda_t^o, X_t^o\} \in S^o$.

2.k1. Анализ результатов решения векторной задачи - модели инженерной системы при заданном приоритете первого критерия.

Рассчитанная в (175) величина первого критерия при заданном приоритете

$f_q(X_t^o) = 376.6, q = \overline{1, K}, q \in K$ обычно не равна заданной $f_q = 375$. Ошибка выбора $\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q| = |376.6 - 375| = 1.6$ определяется ошибкой линейной аппроксимации: $\Delta f_{q\%} = 0.5\%$.

Если ошибка $\Delta f_q = |f_q(X_t^o) - f_q| = |376.6 - 375| = 1.6$, которая измерена в натуральных единицах или в процентах $\Delta f_{q\%} = \frac{\Delta f_q}{f_q} * 100 = 0.05\%$, больше заданной

$\Delta f, \Delta f_q > \Delta f$, то переходим к шагу 2, если $\Delta f_q \leq \Delta f$, то вычисления завершаются. **Конец.**

При моделировании могут быть изменены параметрические ограничения (161) и функции (160), т. е. получено некоторое множество оптимальных решений. Из этого множества оптимальных решений выбираем окончательный вариант.

В примере окончательный вариант включает параметры:

$$X^o = \{X^o, \lambda^o\} = \{X^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2\}, \lambda^o = 0.6087\};$$

параметры структуры материала при заданном приоритете критерия:

$$q=1: X^q = \{x_1 = 45.1262, x_2 = 46.6484, x_3 = 6.0254, x_4 = 2.2000\}.$$

3.k1. Геометрическая интерпретация результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по первому приоритетному критерию в относительных единицах.

Для геометрической интерпретации результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров решения векторной задачи по первому приоритетному критерию в относительных единицах сформируем рис. 14.k1.

Аналогично рис. 14, сформируем относительные оценки четырех критериев в точке оптимума $Y_k^* = \lambda_k(Y_k^*), k = \overline{1, K}$ (черный цвет) и $\lambda_k^A(X_k^*) = 1, k = \overline{1, K}$ (красный цвет) и представим их рис. 14.k1.



λ -задача Векторная оптимизация: L1(X), L2(X), L3(X), L4(X). Машунин Ю.К.

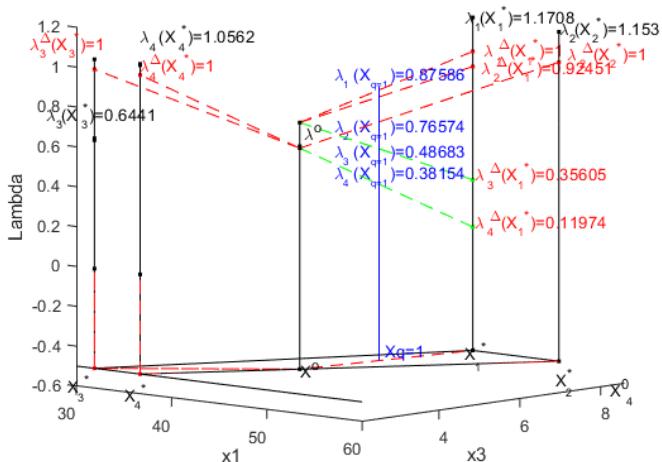


Рисунок 14 – k1. λ -задача в системе координат $x_1 x_3 \lambda$. Результаты решения:

$\lambda_k^{\Delta}(X_k^*) = 1, k = \overline{1, K}$; относительные оценки четырех критериев

с приоритетом первого критерия в точке оптимума $X_{q=1}$: $\lambda_k(X_{q=1}), k = \overline{1, K}$

На третьем шаге решения ВЗМП с равнозначными критериями в (176) в точках оптимума $Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, Y_4^*$ получены величины всех относительных оценок:

$$L(Y^*) = \begin{vmatrix} L(Y_1^*) \\ L(Y_2^*) \\ L(Y_3^*) \\ L(Y_4^*) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.0000 & 0.9245 & 0.3560 & 0.1197 \\ 0.9367 & 1.0000 & 0.1968 & 0.0363 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0000 & 1.011 \\ 0.3669 & 0.2257 & 0.9427 & 1.0000 \end{vmatrix}.$$

На рис. 14.k1 $\lambda_1(Y_1^*) = 1.0000$ обозначена как $\lambda_2^{\Delta}(X_2^*)=1$.

Линейная функция, соединяющая точки $\lambda(X^0) = 0.7372$ и $\lambda_1^{\Delta}(X_1^*)=1$ в относительных единицах характеризует функцию $f_1(X)$ в относительных единицах в четырехмерном измерении параметров x_1, \dots, x_4 . Эта линейная функция представляет геометрическую интерполяцию функций $f_1(X)$ в относительных единицах из N -мерного (4-мерного) в двухмерную систему координат. Аналогично исследуются все функции (критерии). В целом на рис. 14.k1 в точке X_1^* показана геометрическая (линейная) интерполяция всех функций (критериев):

$f_1(X)$ и соответствующая относительная оценка $\lambda_1^{\Delta}(X_1^*) = 1.0$;

$f_2(X)$ и соответствующая относительная оценка $\lambda_2^{\Delta}(X_1^*) = 0.92451$;

$f_3(X)$ и соответствующая относительная оценка $\lambda_3^{\Delta}(X_1^*) = 0.35605$;

$f_4(X)$ и соответствующая относительная оценка $\lambda_4^{\Delta}(X_1^*) = 0.11974$.

Относительные оценки с приоритетом первого критерия в точке оптимума $X_{q=1}$

$$\lambda_k(X_{q=1}) = \frac{f_k(X_{q=1}) - f_k^0}{f_k^* - f_k^0}, k = \overline{1, K}; \lambda_k(X_{q=1}) = \{\lambda_1(X_{q=1}) = 0.87586, \lambda_2(X_{q=1}) =$$

$$0.76574, \lambda_3(X_{q=1}) = 0.48683, \lambda_4(X_{q=1}) = 0.38154\};$$

Результаты решения показывают, что математические результаты полностью совпадают с геометрическими.



4.k1. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП (функций: $f_1(X), \dots, f_4(X)$) с приоритетом первого критерия – модели структуры материала при проектировании в трехмерной системе координат в физических единицах.

Исходной информацией для геометрической интерпретации результатов решения векторной задачи (ВЗМП) с приоритетом первого критерия являются:

параметры точки оптимума при равнозначных критериях:

$X^o = \{X^o, \lambda^o\} = \{Y^o = \{x_1 = 43.9, x_2 = 49.54, x_3 = 4.348, x_4 = 2.2\}, \lambda^o = 0.6087\}$, рассчитанной на пятом шаге алгоритма в двухмерной системе координат x_1, x_3 (см. Рис. 11) и представленной в трехмерной системе координат x_1, x_3 и λ в относительных единицах на рис. 12, 13, 14 при проектировании.

Исследуем и представим параметры последовательно для каждой характеристики структуры материала (критерия): $f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)$ в **физических единицах**.

1. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП с приоритетом первого критерия – первой характеристики $f_1(X)$ при проектировании в физических единицах.

На Рис. 15.k1 исследованы: точки оптимума X_1^* , $X_{q=1}$, с соответствующими относительными оценками $\lambda_1(X_1^*)$, $\lambda_1(X_{q=1})$. Также исследованы линейные функции в координатах: $\lambda^o - \lambda_1(X_{q=1})$ и $\lambda^o - \lambda_1^\Delta(X_1^*)$ в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_1(X)$ в четырехмерном измерении параметров x_1, \dots, x_4 .

Первая характеристика структуры материала $h_1(X)$ (170) сформирована в 6.1.4:
 $\max h_1(X) \equiv 323.84 - 2.25y_1 - 3.49y_2 + 10.72y_3 + 13.124y_4 + 0.0968y_1y_2 - 0.062y_1y_3 - 0.169y_1y_4 + 0.0743y_2y_3 - 0.1y_2y_4 - 0.0036y_3y_4 + 0.0143y_1^2 + 0.0118y_2^2 - 0.2434y_3^2 - 0.5026y_4^2$,

Представим геометрическую интерпретацию функции $h_1(Y)$ в физических единицах с переменными координатами $\{y_1, y_3\}$ и с постоянными координатами $\{y_2 = 49.54, y_4 = 2.2\}$ на рис. 15.k1.

Координаты точки и функция первого критерия на **максимум**:

$Y_1^* = \{y_1 = 46.56, y_2 = 43.23, y_3 = 8.0, y_4 = 2.2\}, h_1^* = h_1(Y_1^*) = -387.9$ при расчете по четырем переменным. На рисунке обозначена как $f_1^\Delta(X_1^*) = -387.9$;

$Y_1^* = \{y_1 = 46.5676, y_3 = 8.0\}$ (на рис. 15.k1 обозначена как X_1^*). В двухмерной системе координат y_1, y_3 величина целевой функции равна $h_1^* = f_1(X_1^*) = 403.6$. (Черный цвет). В системе MANLAB обозначено как $h_1^* = Z = 402.666$.

Координаты точки и функция первого критерия на **минимум**:

В точке $X_1^0 = \{x_1 = 31.9, x_3 = 2.1\}$ величина целевой функции $F_1^0 = f_1(X_1^0) = 303.66$.

Величина целевой функции в четырехмерной системе координат $f_1^\Delta(X_1^0) = 296.59$.

Координаты точки и функция первого критерия **при равнозначных критериях**:

Координаты точки $X^o = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$. Величина целевой функции $f_1(X^o) = 363.96$. Относительная оценка с приоритетом первого критерия в точке оптимума $X_{q=1}$:

$\lambda_1(X_{q=1}) = \frac{f_1(X_{q=1}) - f_1^0}{f_1^* - f_1^0} = 0.87586$. В физических единицах величина первого критерия с

приоритетом в точке оптимума $X_{q=1}$ равна $f_1(X_{q=1}) = 376.64$ близка к заданной $f_1(X_{q=1}) = 375$ (Показана фиолетовым цветом).



Линейная функция, соединяющая точки $f_1(X^0)$ и $f_1^\Delta(X_1^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_1(X)$ в четырехмерном измерении параметров x_1, \dots, x_4 .

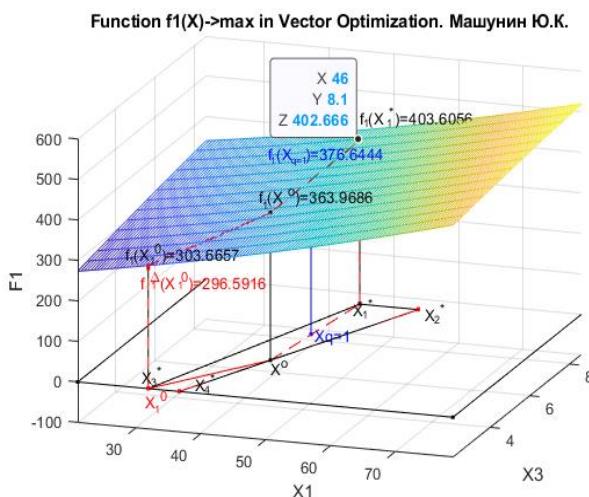


Рисунок 15 – *k1*. Функция $f_1(X)$ с приоритетом первого критерия в двухмерной системе координат $x_1 x_3$, геометрическая интерпретация функции $f_1(X)$ в системе координат $x_1 x_2 x_3 x_4$

А в целом отрезки $f_1^\Delta(X_1^*) - f_1(X^0)$ - $f_1^\Delta(X_1^0) - f_1(X^0)$ представляют геометрическую интерпретацию функции $f_1(X)$ в четырехмерном измерении параметров x_1, \dots, x_4 .

2. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – второй характеристики $f_2(X_{2,q=1})$ с приоритетом первого критерия - структуры материала при проектировании в физических единицах.

На Рис. 16.*k1* исследованы: точки оптимума X_2^* , $X_{2,q=1}$, с соответствующими относительными оценками $\lambda_2(X_2^*)$ $\lambda_2(X_{2,q=1})$, а также линейные функции $\lambda^0\lambda_2(X_{2,q=1}) - \lambda_2^\Delta(X_2^*)$ λ^0 в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_2(X_{2,q=1})$ в четырехмерном измерении параметров x_1, \dots, x_4 .

Вторая характеристика структуры материала $h_2(X)$ (172) сформирована в 4.1.4:

$$\min f_2(X) \equiv 795.72 + 23.89x_1 + 30.866x_2 - 25.8586x_3 - 45.0026x_4 - 0.7683x_1x_2 + 0.4703x_1x_3 + 0.7472x_1x_4 - 0.1283x_2x_3 + 0.3266x_2x_4 - 0.0112x_3x_4 + 0.0398x_1^2 + 0.0365x_2^2 + 3.2x_3^2 + 2.6457x_4^2.$$

Представим геометрическую интерпретацию функцию $h_2(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1 x_3\}$ и с постоянными координатами $\{y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки Y^0 (160) на рис. 16.*k1*.

Координаты точки и функция второго критерия на **оптимум (минимум)**:

$$Y_2^* = \{y_1 = 55.60, y_2 = 34.19, y_3 = 8.0, y_4 = 2.2\}, h_2^* = h_2(X_2^*) = 1361.4$$

при расчёте по четырем переменным. На рисунке обозначена как $f_2^\Delta(X_2^*) = 1361.41$.

В системе MATLAB обозначено как $h_2^* = Z = 1361.42$.

$Y_2^* = \{x_1 = 55.6, x_3 = 8.0\}$ (на рис. 16.*k1* обозначена как X_2^*). В двухмерной системе координат y_1, y_3 величина целевой функции равна $h_2^* = f_2(X_2^*) = 1193.56$. (Черный цвет).

Координаты точки **минимума** (Наихудшее решение – максимальное) в точке $X_2^0 = \{x_1 = 31.9, x_3 = 2.1\}$ величина целевой функции $F_2^0 = f_2(X_2^0) = 2207.2$.

Величина целевой функции в четырехмерной системе координат $f_2^\Delta(X_2^0) = 2458.5$.



Координаты точки и функция второго критерия при равнозначных критериях:

Координаты точки $X^0 = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$. Величина целевой функции $f_2(X^0) = 1790.68$.

Относительная оценка с приоритетом первого критерия в точке оптимума $X_{q=1}$ второго критерия: $\lambda_2(X_{q=1}) = \frac{f_2(X_{q=1}) - f_2^0}{f_2^* - f_2^0} = 0.76574$. В физических единицах величина второго критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=1}$ равна $f_2(X_{2,q=1}) = 1618.43$. (Показана фиолетовым цветом).

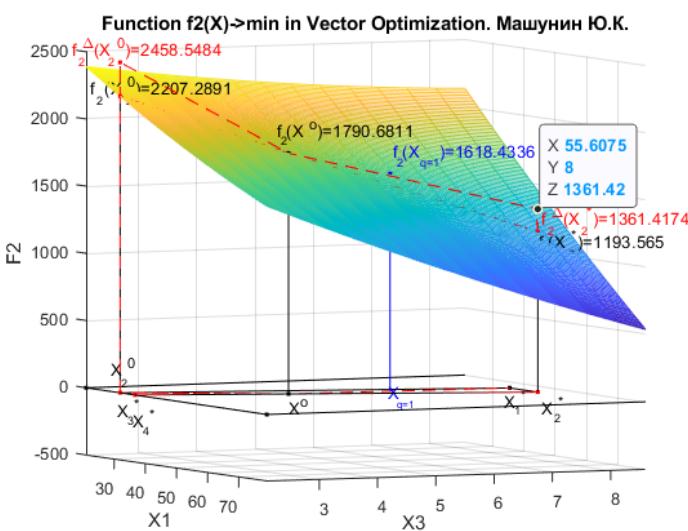


Рисунок 16 – k1. Функция $f_2(X)$ с приоритетом первого критерия в двухмерной системе координат $x_1 x_3$, геометрическая интерпретация функции $f_2(X_{2,q=1})$ – координаты $x_1 x_2 x_3 x_4$.

Линейная функция, соединяющая точки $f_2(X^0)$ и $f_2^\Delta(X_2^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_2(X)$ в четырехмерном измерении параметров x_1, \dots, x_4 . А в целом отрезки $f_2^\Delta(X_2^*) - f_2(X^0)$ - $f_2^\Delta(X_2^0)$ представляют геометрическую интерполяцию функции $f_2(X)$ в четырехмерном измерении параметров x_1, \dots, x_4 .

3. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – третьей характеристики $f_3(X_{3,q=1})$ с приоритетом первого критерия - структуры материала при проектировании в физических единицах.

На Рис. 17.k1 исследованы: точки оптимума X_3^* , $X_{3,q=1}$, с соответствующими относительными оценками $\lambda_3(X_3^*)$ $\lambda_3(X_{3,q=1})$, а также линейные функции $\lambda^0 \lambda_3(X_{3,q=1})$ – $\lambda_3^\Delta(X_3^*)$ λ^0 в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_3(X_{3,q=1})$ в четырехмерном измерении параметров x_1, \dots, x_4 .

Третья характеристика структуры материала $h_3(X)$ (171) сформирована в 6.1.4:

$$\max h_3(Y) \equiv 110.22 + 0.7918y_1 + 1.73y_2 - 0.3713y_3 - 2.20y_4 - 0.0132y_1y_2 - 0.008y_1y_3 + 0.0193y_1y_4 - 0.0172y_2y_3 + 0.0161y_2y_4 - 0.0006y_3y_4 - 0.0004y_1^2 - 0.0002y_2^2 + 0.0335y_3^2 + 0.124y_4^2 \}$$



Представим геометрическую интерпретацию функции $h_3(X)$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1, x_3\}$ и с постоянными координатами $y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки Y^o на рис. 17.k1.

Координаты точки и функция третьего критерия на **максимум**:

$$Y_3^* = \{y_1 = 31.90, y_2 = 59.00, y_3 = 2.1, y_4 = 7.0\}, h_3^* = h_3(Y_3^*) = -210.35$$

при расчете по четырем переменным. На рис. 17.k1 обозначена как $f_3^\Delta(X_3^*) = -210.35$

$$Y_3^* = \{x_1 = 31.9, x_3 = 2.1\} \text{ (на рис. 17.k1 обозначена как } X_3^*).$$

В двухмерной системе координат y_1, y_3 величина целевой функции равна $h_3^* = f_3(X_3^*) = 195.73$. (Черный цвет) Величина целевой функции $F_3^* = 210.3$.

Координаты точки **минимума** $X_3^0 = \{x_1 = 78.16, x_3 = 8.0\}$ (на рис. 17.k1. Величина целевой функции $f_3^0 = 169.26$).

Координаты точки и функция третьего критерия **при равнозначных критериях**:

Координаты точки $X^o = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$. Величина целевой функции:

$f_3(X^o) = 194.27$. Относительная оценка с приоритетом первого критерия в точке оптимума

$X_{q=1}$ третьего критерия: $\lambda_3(X_{q=1}) = \frac{f_3(X_{q=1}) - f_3^0}{f_3^* - f_3^0} = 0.48683$. В физических единицах

величина третьего критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=1}$ равна

$$f_3(X_{3,q=1}) = 189.2. \text{ (Фиолетовый цвет).}$$

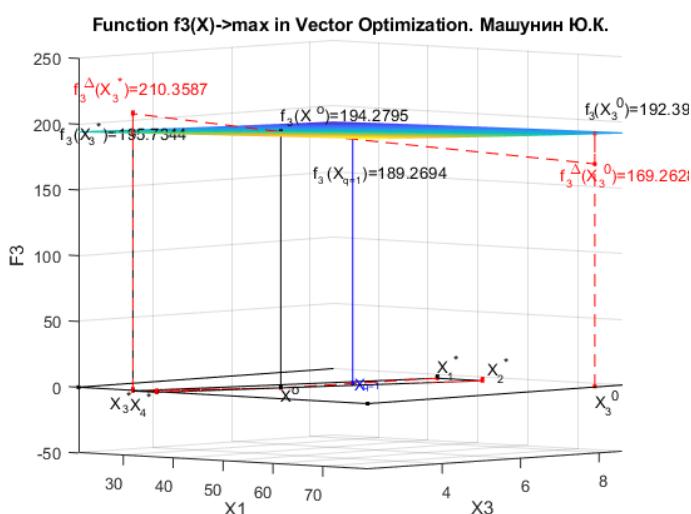


Рисунок 17 – k1. Функция $f_3(X_{3,q=1})$ с приоритетом первого критерия в двухмерной системе координат x_1, x_3 , геометрическая интерпретация функции $f_3(X)$ в системе координат x_1, \dots, x_4 .

Линейная функция, соединяющая точки $f_3(X^o)$ и $f_3^\Delta(X_3^*)$ в физических единицах характеризует функцию $f_3(X)$ в четырехмерном измерении параметров x_1, \dots, x_4 . А в целом отрезки $f_3^\Delta(X_1^*) - f_3(X^o)$ - $f_3^\Delta(X_3^0)$ представляют геометрическую интерпретацию функции $f_3(X_{3,q=1})$ в четырехмерном измерении параметров x_1, \dots, x_4 .

4. Геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП – четвертой характеристики $f_4(X_{4,q=1})$ с приоритетом первого критерия структуры материала при проектировании в физических единицах.



На Рис. 18.k1 исследованы: точки оптимума X_4^* , $X_{q=1}$, с соответствующими относительными оценками $\lambda_4(X_4^*)$ $\lambda_4(X_{q=1})$, а также линейные функции $\lambda^0\lambda_4(X_{4,q=1}) - \lambda_4^\Delta(X_4^*)$ λ^0 в относительных единицах, которые характеризует функцию $f_4(X_{4,q=1})$ в четырехмерном измерении параметров x_1, \dots, x_4 .

Четвертая характеристика структуры материала $h_4(X)$ (173) сформирована в 3:

$$\max h_4(Y) = 21.004 - 0.0097y_1 - 0.841y_2 - 0.4326y_3 + 1.1723y_4 + 0166y_1y_2 + 0.085y_1y_3 - 0.0001y_1y_4 + 0.0523y_2y_3 + 0.0002y_2y_4 + 0.0006y_3y_4 - 0.0022y_1^2 + 0.0035y_2^2 + 0.006y_3^2 - 0.0311y_4^2 \}.$$

Представим геометрическую интерпретацию функцию $f_4(X_{4,q=1})$ в физических единицах с переменными координатами $\{x_1 x_3\}$ и с постоянными координатами $y_2 = \{49.54, y_4 = 2.2\}$, взятые из оптимальной точки Y^0 на рис. 18.k1.

Координаты точки и функция четвертого критерия на **максимум**:

$Y_4^* = \{y_1 = 36.70, y_2 = 59.00, y_3 = 2.1, y_4 = 2.2\}$, $h_4^* = h_4(Y_4^*) = 30.714$ при расчете по четырем переменным. На рис. 20.k1 обозначена как $f_4^\Delta(X_4^*) = 30.714$

$X_4^* = \{x_1 = 36.70, x_3 = 2.1\}$ (на рис. 20.k1 обозначена как X_4^*). В двухмерной системе координат y_1, y_3 величина целевой функции равна $h_4^* = f_4(X_4^*) = 28.302$. (Черный цвет) Величина целевой функции $F_4^* = 30.714$.

Координаты точки и функция четвертого критерия **минимума** $X_4^0 = \{x_1 = 62.71, x_3 = 8\}$. Величина целевой функции $f_4^0 = f_4^\Delta(X_4^*) = -73.62$.

Координаты точки $X^0 = \{x_1 = 43.9, x_3 = 4.348\}$ (на рис. 18.k1 обозначена как X^0). Величина целевой функции $f_4(X^0) = 47.5$.

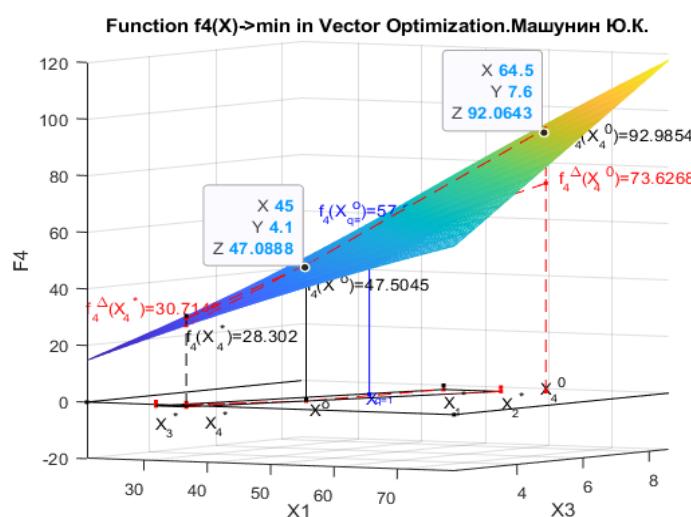


Рисунок 18 – k1. Функция $f_4(X_{4,q=1})$ в двухмерной системе координат $x_1 x_3$

и геометрическая интерпретация функции $f_4(X_{4,q=1})$ с приоритетом первого критерия в системе координат x_1, \dots, x_4 .

Относительная оценка с приоритетом первого критерия в точке оптимума $X_{q=1}$ четвертого критерия: $\lambda_4(X_{q=1}) = \frac{f_4(x_{q=1}) - f_4^0}{f_4^* - f_4^0} = 0.38154$. В физических единицах величина



четвертого критерия с приоритетом в точке оптимума $X_{q=1}$ равна $f_4(X_{4,q=1}) = 57.254$. (Показана фиолетовым цветом).

Линейная функция, соединяющая точки $f_4(X^0)$ и $f_4^\Delta(X_4^*)$, в физических единицах характеризует функцию $f_4(X)$ в четырехмерном измерении параметров x_1, \dots, x_4 . А в целом отрезки $f_4^\Delta(X_4^*) - f_4(X^0)$ - $f_4^\Delta(X_4^0)$ представляют геометрическую интерполяцию функции $f_4(X)$ в четырехмерном измерении параметров x_1, \dots, x_4 .

Заключение по разделу: приоритетный критерий k1.

В разделе рассмотрена и решена проблема (фрагмент) разработки и принятия управлеченческого решения условиях неопределенности в сложной инженерной системы (структуры материала). Проведен анализ результатов решения ВЗМП при заданном приоритете первого критерия, представлена геометрическая интерпретация результатов решения при проектировании в трехмерной системе координат четырех характеристик (критериев), во-первых, в относительных единицах, во-вторых, в физических единицах.

5.2.4. Этап 11.k2. Исследование, выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы (структура материала: функций: $f_1(X), \dots, f_4(X)$) по второму приоритетному критерию, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП.

В разделе представлено решение векторной задачи математического программирования - модели сложной инженерной системы (структуры материала) при заданном **приоритете второго критерия** на базе многомерной математики.

Этап 11.k2 выполнен точно по той же схеме, что и этап 11.k1 В работе представлен шаг 2, 3, 4 и Геометрическая интерпретация результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по второму приоритетному критерию в относительных единицах.

Шаг 2. Выбор приоритетного критерия $q \in K$.

Из пары $\lambda^0 = \lambda_2(X^0) = \lambda_3(X^0) = 0.6087$ противоречивых критериев выбирается критерий, который ЛПР хотел бы улучшить. Такой критерий называется «приоритетным критерием», обозначим его $q = 2 \in K$.

Этот критерий исследуется во взаимодействии с первым критерием $q = 1 \in K$.

Выбор приоритетного критерия: на дисплей выдается общая информация для принятия решений: Критерии в точке оптимума X^0 :

$$FX_0 = \{363.9686 \quad 1790.6811 \quad 194.2795 \quad 47.504\}. \quad (178)$$

Относительные оценки в X^0 :

$$LX_0 = \{0.73718 \quad 0.60874 \quad 0.60874 \quad 0.60874\}. \quad (179)$$

Мы исследуем эти два критерия из всего множества критериев $K = 4$, показанных на рис. 6k2. Выдается сообщение на дисплей:

`q=input('Введите приоритетный критерий (номер) q=')` – Ввели критерий $q=2$.

Шаг 3. Формируются числовые пределы изменения величины приоритета критерия $q = 2 \in K$:

$$f_q(X^0) = 1790.68 \leq f_q(X) \leq 1361.4174 = f_q(X_q^*), q \in K. \quad (180)$$

Аналогично, в относительных единицах критерий $q=2$ изменяется в следующих пределах: $\lambda_q(X^0) = 0.6087 \leq \lambda_q(X) \leq 1 = \lambda_q(X_q^*), q = 2 \in K$.

Эти данные анализируются.

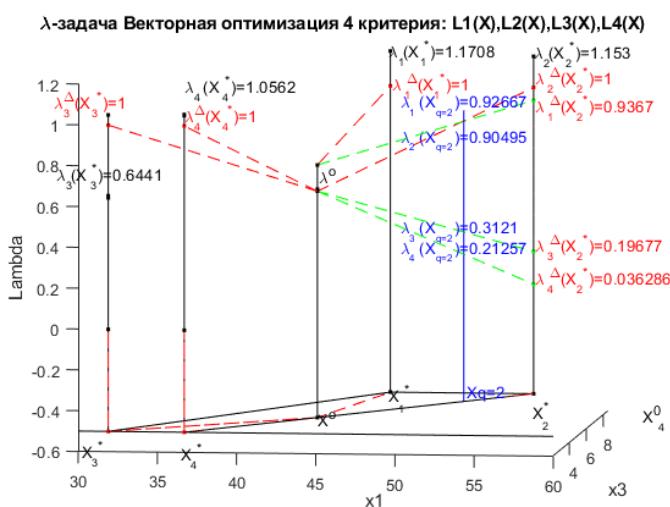
Шаг 4. Определяется величина приоритетного критерия $q \in K$. (Decision-making).



На сообщение: «Ведите величину приоритетного критерия $f_q=»$ - вводим, например, $f_q=1500$.

Геометрическая интерпретация результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по второму приоритетному критерию в относительных единицах.

Аналогично рис. 14.k1, сформируем относительные оценки четырех критериев в точке оптимума Y_k^* $\lambda_k(Y_k^*)$, $k = \overline{1, K}$ (черный цвет) и $\lambda_k^\Delta(X_k^*) = 1$, $k = \overline{1, K}$ (красный цвет) и представим их рис. 14.k2.



Аналогично рис. 15.k1, ..., 18.k1 формируется геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП с приоритетом второго критерия – модели структуры материала при проектировании в трехмерной системе координат в физических единицах. рис. 15.k2, ..., 18.k2.

5.2.5. 11.k3 этап. Исследование, выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы (структура материала - функций: $f_1(X), \dots, f_4(X)$) с приоритетом третьего критерия, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП.

В разделе представлено решение векторной задачи математического программирования - модели сложной инженерной системы (структуры материала) при заданном **приоритете третьего критерия** на базе многомерной математики.

Этап 11.k3 выполнен точно по той же схеме, что и этап 11.k1 В работе будет представлен шаг 2, 3, 4 и Геометрическая интерпретация результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по третьему приоритетному критерию в относительных единицах.

Шаг 2. Выбор приоритетного критерия $q \in K$.

Из пары $\lambda^0 = \lambda_2(X^0) = \lambda_3(X^0) = 0.6087$ противоречивых критериев выбирается критерий, который ЛПР хотел бы улучшить. Такой критерий называется «приоритетным критерием», обозначим его $q = 3 \in K$. Этот критерий исследуется во взаимодействии с первым критерием $q = 1$.



Выбор приоритетного критерия. На дисплей выдается общая информация для принятия решений. Критерии в точке оптимума X^o :

$$FXo = \{363.968 \ 1790.681 \ 194.2795 \ 47.5045\}. \quad (181)$$

Относительные оценки в X^o :

$$LXo = \{0.73718 \ 0.60874 \ 0.60874 \ 0.60874\}. \quad (182)$$

Мы исследуем эти два критерия из всего множества критериев $K = 4$, показанных на рис. 14.k3. Выдается сообщение на дисплей:

q=input('Введите приоритетный критерий (номер) q=') – Ввели критерий $q=3$.

λ-задача Векторная оптимизация: L1(X),L2(X),L3(X),L4(X). Машунин Ю.К.

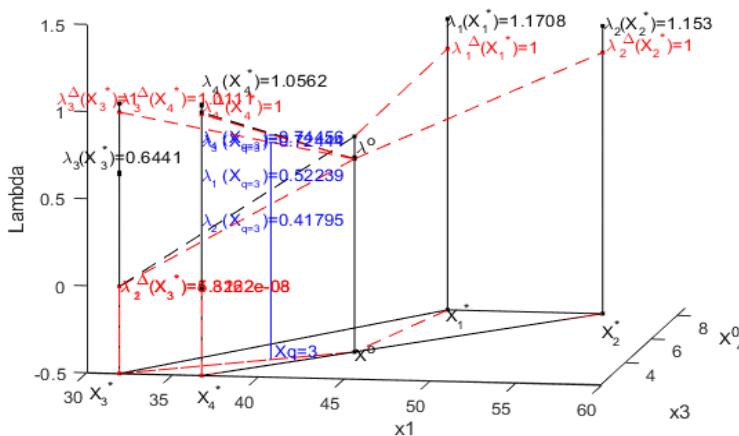


Рисунок 14 – k3. λ-задача в системе координат $x_1 \ x_3 \ \lambda$. Результаты решения:
 $\lambda_k^A(X_k^*) = 1, k = \overline{1, K}$; относительные оценки четырех критериев с приоритетом

третьего критерия в точке оптимума $X_{q=3}$: $\lambda_k(X_{q=3}), k = \overline{1, K}$.

Шаг 3. Определяются числовые пределы изменения величины приоритета критерия $q = 3 \in K$. Для приоритетного критерия $q = 3 \in K$ определяются изменения числовых пределов в натуральных единицах при переходе из точки оптимума X^o в точку X_q^* , полученную на первом шаге. Данные о критерии $q=3$ выдаются на экран:

$$f_q(X^o) = 194.2 \leq f_q(X) \leq 210.35 = f_q(X_q^*), q \in K. \quad (183)$$

В относительных единицах критерий $q=3$ изменяется в следующих пределах: $\lambda_q(X^o) = 0.6087 \leq \lambda_q(X) \leq 1$

$$= \lambda_q(X_q^*), q = 3 \in K. \quad (184)$$

Эти данные анализируются.

Шаг 4. Выбор величины приоритетного критерия $q \in K$. (Decision-making). На сообщение: «Введите величину приоритетного критерия $f_q=»$ - вводим, например, $f_q=200$.

Геометрическая интерпретация результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по третьему приоритетному критерию в относительных единицах.

Аналогично рис. 14.k1, сформируем относительные оценки четырех критериев в точке оптимума Y_k^* $\lambda_k(Y_k^*), k = \overline{1, K}$ (черный цвет) и $\lambda_k^A(Y_k^*) = 1, k = \overline{1, K}$ (красный цвет) и представим их рис. 14.k3. Аналогично рис. 15.k1, ..., 18.k1 формируется геометрическая



интерпретация результатов решения ВЗМП с приоритетом третьего критерия – модели структуры материала при проектировании в трехмерной системе координат в физических единицах рис. 15.k3, ..., 18.k3.

5.2.6. 11.k4 этап. Исследование, выбор оптимальных параметров сложной инженерной системы (структура материала - функций: $f_1(X), \dots, f_4(X)$) по четвертому приоритетному критерию, геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП.

В разделе представлено решение векторной задачи математического программирования - модели сложной инженерной системы (структуры материала) при заданном **приоритете четвертого критерия** на базе многомерной математики.

Этап 11.k4 выполнен точно по той же схеме, что и этап 11.k1 В работе будет представлен шаг 2, 3, 4 и геометрическая интерпретация результатов решения векторной задачи выбора оптимальных параметров по четвертому приоритетному критерию в относительных единицах.

Шаг 2. Выбор приоритетного критерия $q \in K$. Из пары $\lambda^o = \lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o) = \lambda_4(X^o) = 0.6087$ противоречивых критериев выбирается критерий, который ЛПР хотел бы улучшить. Такой критерий называется «приоритетным критерием», обозначим его $q = 4 \in K$. Этот критерий исследуется во взаимодействии с первым критерием $q = 1$.

Выбор приоритетного критерия. На дисплей выдается общая информация для принятия решений. Критерии в точке оптимума X^o :

$$FX_o = \{363.968 \ 1790.681 \ 194.2795 \ 47.5045\}. \quad (185)$$

Относительные оценки в X^o :

$$LX_o = \{0.73718 \quad 0.60874 \quad 0.60874 \quad 0.60874\}. \quad (186)$$

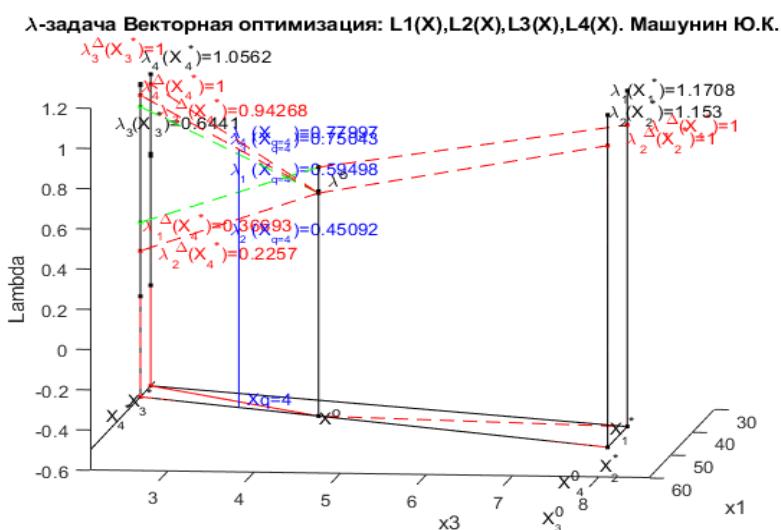


Рис. 16.k4. λ -задача в системе координат $x_1 x_3 \lambda$. Результаты решения:
 $\lambda_k^A(X_k^*) = 1, k = \overline{1, K}$; относительные оценки четырех критериев с приоритетом четвертого критерия в точке оптимума $X_{q=4}$: $\lambda_k(X_{q=4}), k = \overline{1, K}$.

Мы исследуем эти два критерия из всего множества критериев $K = 4$, показанных на рис. 12.k4. Выдается сообщение на дисплей:



q=input('Введите приоритетный критерий (номер) q= ') – Ввели критерий **q=4**.
Геометрическая интерпретация результатов решения векторной задачи - функции $f_1(X), \dots, f_4(X)$ выбора оптимальных параметров **по четвертому приоритетному критерию в относительных единицах**.

Аналогично рис. 12.k1, сформируем относительные оценки четырех критериев в точке оптимума $Y_k^* \quad \lambda_k(Y_k^*), k = \overline{1, K}$ (черный цвет) и $\lambda_k^\Delta(X_k^*) = 1, k = \overline{1, K}$ (красный цвет) и представим их рис. 12.k4. Аналогично рис. 13.k1, ..., 16.k1 формируется геометрическая интерпретация результатов решения ВЗМП с приоритетом четвертого критерия – модели структуры материала при проектировании в трехмерной системе координат в физических единицах. рис. 13.k4, ..., 16.k4.

6. Сравнение прикладных методов многомерной математики с методами искусственного интеллекта.

Оценим прикладные методы многомерной математики - {аксиоматика Машунин Ю.К., принципы оптимальности и методы решения векторных задач математического (выпуклого) программирования, представленные в третьем и четвертом разделе данной работы, и сравним их с методами искусственного интеллекта. Используя теорию векторной оптимизации, мы получили для инженерной системы (в частности, технологического процесса, структуры материала):

точки оптимума при равнозначных критериях - $X^o = (x_j^o, j = \overline{1, N})$;

характеристики (критерии) при равнозначных критериях: $F(X^o) = \{f_k(X^o), k = \overline{1, K}\}$;

относительные оценки при равнозначных критериях – $\lambda(X^o) = \{\lambda_k(X^o), k = \overline{1, K}\}$, которые лежат в пределах $\{0 \leq \lambda_k(X^o) \leq 1 (100\%), k = \overline{1, K}\}$, и легко переводится в натулярные (физические) данные.

Может ли эти результаты получить искусственный интеллект, функционирующий, как правило, по принципу перебора. Ответим: «Нет». Искусственный интеллект может получить только приблизительный результат, который задал человек, но чем этот результат лучше других результатов также должен оценить человек на основе интуиции.

Таким образом, разработанная теория векторной оптимизации может являться математическим аппаратом вычислительного интеллекта искусственного интеллекта.

7. Заключение

Проблема разработки математических методов многомерной математики в приложении к векторной задаче оптимизации и принятия оптимального решения на их основе в сложной технической системе по некоторому набору функциональных характеристик и экспериментальных данных является одной из важнейших задач системного анализа и проектирования инженерно-технических систем.

В работе разработана теория и конструктивные методы решения векторных (многокритериальных) задач математического программирования, *во-первых*, при равнозначных критериях (характеристик инженерных систем), *во-вторых*, при заданной числовой величине приоритетного (представляющего интерес для разработчика) критерия.

В работе на базе векторной оптимизации разработана методология выбора оптимальных параметров при проектировании инженерных систем: построена *математическая модель* инженерной системы в условиях определенности и неопределенности; разработаны конструктивные методы решения векторной задачи; разработаны и построены численные модели много параметрических, много функциональных инженерных систем; представлена



численная реализация модели технологического процесса при равнозначных критериях и с заданным приоритетом критерия; представлена численная реализация модели структуры материала при равнозначных критериях и с заданным приоритетом любого критерия; представлена геометрическая интерпретация результатов решения при моделировании в трехмерной системе координат четырех характеристик (критериев) в относительных и физических единицах в технологическом процессе и материаловедении.

Список литературы:

1. Pareto V. Cours d'Economie Politique. Lausanne: Rouge, 1896.
2. Математическая энциклопедия. Редакционная коллегия: И.М. Виноградов и другие. - М.: «Советская энциклопедия», 1977. – 1152 с.
3. Carlin S. Mathematical methods in a game theory, programming and economy. - M.: World, 1964, p. 837.
4. Zak Yu. A. Multi-stage decision-making processes in the problem of vector optimization // A.iT. 1976. No. 6, pp. 41-45.
5. Mikhailevich V. S., Volkovich V. L. Computational methods of research and design of complex systems. M.: Science, 1979, p. 319.
6. Машунин Ю.К. Методы и модели векторной оптимизации. М.: Наука, 1986. 141 с.
7. Машунин Ю. К. , Левицкий В. Л. Методы векторной оптимизации в анализе и синтезе технических систем: монография. - Владивосток: ДВГАЭУ, 1996. 131 с.
8. Машунин Ю.К. Решение композиционных и декомпозиционных задач синтеза сложных технических систем методами векторной оптимизации//Изв. РАН. ТиСУ. 1999. №3. С. 88-93.
Yu. K. Mashunin, “Solving composition and decomposition problems of synthesis of complex engineering systems by vector optimization methods,” Comput. Syst. Sci. Int. 38, 421 (1999). (Scopus)
9. Машунин Ю.К., Машунин К.Ю. Моделирование технических систем в условиях неопределенности и принятие оптимального решения //Изв. РАН. ТиСУ. 2013. №4. С. 19-35.
Mashunin K. Yu., and Mashunin Yu. K. Simulation Engineering Systems under Uncertainty and Optimal Descision Making. Journal of Comput. Syst. Sci. Int. Vol. 52. No. 4. 2013. 519-534. (Scopus).
10. Машунин Ю.К. Теория управления. Математический аппарат управления в экономических системах. – М.: Логос. 2013. 448 с.
11. Mashunin Yu.K. Mashunin K.Yu. Modeling of technical systems on the basis of vector optimization (1. At equivalent criteria) / International Journal of Engineering Sciences & Research Technology. 3(9): September, 2014. P. 84-96.
12. Mashunin Yu.K. Mashunin K.Yu. Modeling of technical systems on the basis of vector optimization (2. with a Criterion Priority) / International Journal of Engineering Sciences & Research Technology. 3(10): October, 2014. P. 224-240.
13. Yu. K. Mashunin, K. Yu. Mashunin. Simulation and Optimal Decision Making the Design of Technical Systems // American Journal of Modeling and Optimization. 2015. Vol. 3. No 3, 56-67.
14. Yu. K. Mashunin, K. Yu. Mashunin. Simulation and Optimal Decision Making the Design of Technical Systems (2. The Decision with a Criterion Priority) // American Journal of Modeling and Optimization. 2016. Vol. 4. No 2, 51-66.



15. Yu. K. Mashunin, "Methodology of the Choice of Optimum Parameters of Technological Process on Experimental to Data." *American Journal of Modeling and Optimization*, vol. 7, no. 1 (2019): 20-28. doi: 10.12691/ajmo-7-1-4.
16. Yu. K. Mashunin. Vector optimization in the system optimal Decision Making the Design in economic and technical systems // International Journal of Emerging Trends & Technology in Computer Science. 2017. Vol. 7. No 1, 42-57.
17. Mashunin, Yu. K, Optimal designing in the interrelation Technical system – Materials (Theory) // Mathematical methods in engineering and technology: proceedings of international. Science. Conf.: 12 tons 4 /under General Ed. A. A. Bolshakova. –SPb.: Publishing house of Polytechnical Institute. Un-t, 2018. P. 40-46.
18. Yu. K. Mashunin. Concept of Technical Systems Optimum Designing (Mathematical and Organizational Statement)// International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2017 Proceedings 8076394. Saint Petersburg. Russia/ WOS: 000414282400287 ISBN:978-1-5090-5648-4. (Web of science)
19. Yu. K. Mashunin. Optimum Designing of the Technical Systems Concept (Numerical Realization) // International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2017 Proceedings 8076395. Saint Petersburg. Russia/ WOS: 000414282400288 ISBN:978-1-5090-5648-4. (Web of science)
20. Mashunin K. Yu., and Mashunin Yu. K. Vector Optimization with Equivalent and Priority Criteria. *Journal of Comput. Syst. Sci. Int.*, 2017, Vol. 56. No. 6. pp. 975-996. <https://rdcu.be/bhZ8i> (Scopus)
21. Mashunin Yu.K. Mathematical Apparatus of Optimal Decision-Making Based on Vector Optimization," *Appl. Syst. Innov.* 2019, 2, 32. <https://doi.org/10.3390/asi2040032>
22. Mashunin Yu.K. Theory and Methods Vector Optimization (Volume One), Cambridge Scholars Publishing. 2020, 183 p. ISBN (10): 1-5275-4831-7
23. Торгашов А.Ю., Кривошеев В.П., Машунин Ю.К., Холланд Ч.Д. Расчет и многокритериальная оптимизация статических режимов массообменных процессов на примере абсорбции в производстве газоразделения // Изв. ВУЗов. Нефть и газ, 2001, №3, с. 82-86.
24. Кетков Ю. Л., Кетков А.Ю., Шульц М. М. МАТЛАБ 6.x.: программирование численных методов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. - 672 с.
25. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения: Пер. с англ./Под ред. И. Ф. Шахнова. - М.: Радио и связь, 1981. – 560 с.
26. Jahn Johannes. Vector Optimization: Theory, Applications, and Extensions. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York. 2010. 460 p.
27. Qamrul Hasan Ansari, Jen-Chih Yao. Recent Developments in Vector Optimization. Springer Heidelberg Dordrecht. London. New York. 2010. 550 p.
28. Nakayama Hirotaka, Yun Yeboon, Yoon Min. Sequential Approximate Multiobjective Optimization Using Computational Intelligence. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg . 2009. 197 p.
29. Shankar R. Decision Making in the Manufacturing Environment: Using Graft Theory and fuzzy Multiple Attribute Decision Making Methods. Springer; 2007. 373 p.
30. Cooke T., Lingard H., Blismas N. The development end evaluation of a decision support tool for health and safety in construction design // Engineering, Construction and Architectural Management. 2008. V. 15. №4. P. 336-351.



31. Walras L. 1874. Elements of Pure Economies , or the theory of social wealth, Lau-sanne.
32. Samuelson P. 1964. Economics. Part 1. -M: Progress.
33. Marshall A. 1993. Principles of economic science. Tom 2. -M: Progress, 145 p.
34. Coase, Ronald. The Institutional Structure of Production // The American Economic Review, vol.82, n°4, pp. 713-719, 1992. (Nobel Prize lecture)Gilbert, J., 1976. Economic theory and goals of the society. - M: Progress. - 230 p.
35. Saimone, G., 1995. Theory of decision making in economic theory and the behavioral Sciences. // In the book: The theory of the firm. St. Petersburg.
36. Seo, K.K., 2000. Managerial Economics: Text, Problems, and Short cases. Per. from English. - M: INFA-M. - 671 p.
37. Khan K. 2004. Controlling. - M: INFA-M. - 671 p.
38. Fayol A. (1992). General and industrial management. - M: Controlling.
39. Mashunin Yu. K., 2010. Theory and modeling of the market on the basis of vector optimization. - M: University book. - 352 p.
40. Mashunin, Yu. K., Mashunin, K., Yu. Numerical realization of innovative development of the industrial enterprise//Global challenges in economy and development of the industry (INDUSTRY-2016): proceedings of scientific – practical Konf. with foreign participation on March 21-23 2016/under the editorship of the Dr. of economic Sciences, prof. A. V. Babkin. – SPb.: Publishing house Politekhn. University, 2016. 455-484. (rus.).
41. Mashunin, Yu. K., 2016. Modeling and software implementation of innovative development of the industrial enterprise. St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Economics, no. 3(245), pp. 78-92. (rus)
42. Mashunin, Yu. K., Mashunin, K., Yu., 2017. Analysis of the organization of control, optimization and practice of innovative development of the industrial cluster, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Economics, 10(4), 187-197. DOI: 10.18721/JE. 10418
43. Mashunin, Yu. K., 2017. Management of the region economy. M: RuSCience. - 344. (rus) ISBN 978-5-4365-1984-5
44. Mashunin Yu. K., K. Yu. Mashunin, Strategic and Innovative Development of the Cluster based on the digital economy, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Economics, 11 (4) (2018) 85—99. DOI: 10.18721/JE.11406
45. Mashunin, Yu. K., 2019. Theory of management and the practice of making managerial decisions: textbook. - Moscow: RuSCience. – 494 p. (rus) ISBN 978-5-4365-3088-8
46. Машунин Ю.К. Выбор оптимальных параметров сложных технических систем на базе многомерной математики // Математические методы в технологиях и технике. 2024. №12-2. С. 46-58

